

7. Vetrov, O.S. (2012), “Fundamental solutions of the dynamic equations of the theory of spherical shells with the damping”, *Fourth International Conference for young mathematicians on Differential Equations and Its Applications dedicated to Ya.B. Lopatinskii. Book of abstracts*, pp. 31-32.
8. Kristensson, G. (2010), “Second Order Differential Equations: Special Functions and Their Classification”, Springer, Germany.
9. Mathai, A.M., Saxena, R.K. and Haubold, H.J (2010), “The H-function: Theory and Applications”, Springer, Germany.

УДК 539.3, 538.54

## ПРО ВПЛИВ ПЕРІОДИЧНОГО ЗА ЧАСОМ МАГНІТНОГО ПОЛЯ НА ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО ШАРУ

<sup>1</sup>Гачкевич О. Р., д. ф.-м. н., професор, <sup>2</sup>Солодяк М. Т., к. ф.-м. н., <sup>3</sup>Махоркін М. І., к. ф.-м. н.,  
<sup>2</sup>Торський А. Р., к. т. н., <sup>3</sup>Станік-Беслер А., Ph. D.

<sup>1,2,3</sup>*Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,  
вул. Наукова 3-б, Львів, 79060, Україна*

<sup>4</sup>*Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України,  
вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, Україна*

<sup>5</sup>*Technical University in Opole, Liuboshitska str., 3, Opole, Poland*

1,2dept13@iapmm.lviv.ua; 3mahorkin@ukr.net, 4adrian@cmm.lviv.ua,  
5a.stanik-besler@po.opole.pl

Запропоновано розрахункову модель визначення параметрів, які описують магнітне, температурне та фізико-механічні поля в електропровідному шарі, який знаходиться в гармонічному за часом магнітному полі. Отримано критерії, за якими визначають необхідність враховувати коливні складові температури та переміщень  
*Ключові слова: гармонічне за часом магнітне поле, коливні складові тепловиділень, динамічні члени задачі термопружності, пондеромоторна сила.*

## О ВЛИЯНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ВО ВРЕМЕНИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО СЛОЯ

<sup>1</sup>Гачкевич А.Р., д. ф.-м. н., профессор, <sup>2</sup>Солодяк М. Т., к. ф.-м. н.,  
<sup>3</sup>Махоркин Н. И., к. ф.-м. н., <sup>4</sup>Торский А. Р., к. т. н., <sup>5</sup>Станик-Беслер А., Ph. D.

<sup>1,2,3</sup>*ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України,  
ул. Наукова 3-б, Львов, 79060, Украина*

<sup>4</sup>*ЦММ ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України,  
ул. Дж. Дудаєва, 15, Львов, 79005, Украина*

<sup>1,5</sup>*Technical University in Opole,  
Liuboshitska str., 3, Opole, Poland*

1,2dept13@iapmm.lviv.ua; 3mahorkin@ukr.net, 4adrian@cmm.lviv.ua,  
5a.stanik-besler@po.opole.pl

Предложена расчетная модель определения параметров, описывающих магнитное, температурное и физико-механические поля в электропроводящем слое, который находится в гармоничном во времени магнитном поле. Получены критерии, при выполнении которых необходимо учитывать колебательные составляющие температуры и перемещений.  
*Ключевые слова: гармоническое во времени магнитное поле, колебательные составляющие тепловыделений, динамические члены задачи термоупругости, пондеромоторная сила.*

## ON INFLUENCE OF TIME-PERIODIC MAGNETIC FIELD ON THERMOELASTIC STATE OF ELECTROCONDUCTING LAYER

<sup>1</sup>Hachkevych O. R., D. Sc., Professor, <sup>2</sup>Solodiak M. T., Ph. D., <sup>3</sup>Makhorkin M. I., Ph. D.  
<sup>4</sup>Torskyi A. R., Ph. D., <sup>5</sup>Stanik-Besler A., Ph. D.

<sup>1,2,3</sup>*Pidstrygach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NASU,  
3b Naukova str, Lviv, 79060, Ukraine*

<sup>4</sup>*Center of Mathematical Modelling within Ya. S. Pidstryhach  
Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics,  
15 D. Dudayeva str., Lviv, 79005, Ukraine*

<sup>5</sup>*Technical University in Opole,  
Liuboshitska str., 3, Opole, Poland*

1,2dept13@iapmm.lviv.ua; 3mahorkin@ukr.net, 4adrian@cmm.lviv.ua, 5a.stanik-  
besler@po.opole.pl

A refined calculation procedure of determination the thermoelastic state of electroconducting non-ferromagnetic layer in time-harmonic magnetic field is offered. It takes into account the oscillation components of heat releases and ponderomotive force and dynamic terms in the thermoelasticity problem. According to it from equations of electrokinematics the electromagnetic field in the stationary approximation is determined. Then the power of heat releases and density of ponderomotive force are determined according to the know formulas. In addition, both time independent and oscillation components are considered, and on the basis of thermoelasticity equation the temperature and displacements are calculated.

According to the relations obtained in the work the numerical studies are carried out for dependence on time of temperature and displacement change on the layer surface and also for distribution of time independent and oscillation components of temperature and displacements through the layer thickness for different values of the parameter of penetration depth of magnetic field into the medium. The conditions, under which the oscillation components in the expressions of thermoelastic state should be considered, are clarified.

By numerical experiment it is found out that: the thermoelastic state of nonferromagnetic conductive layer under the action of time-harmonic magnetic field depends essentially on the parameter  $H_0$  (the amplitude of harmonic component of magnetic field intensity) and the relative depth of the magnetic field penetration  $\delta = 1/\gamma$  ( $\gamma = l\sqrt{\pi\lambda\mu_0\nu}$ ;  $\mu_0$  is the permeability of free space;  $\lambda$  is the electrical conductivity;  $\nu$  is the frequency of oscillation of external magnetic field;  $l$  is the layer thickness); the contribution of ponderomotive force in thermoelastic state of electroconducting non-ferromagnetic bodies can always be neglected in comparison with heat releases; for small  $\gamma$  (up to 1% for  $\gamma < 0,1$ ) both the stable component of the temperature and its oscillating component are to be considered (in this case the temperature and displacement are of explicitly oscillating nature); the values of frequency  $\nu$  and the layer thickness  $l$ , for which both the stable component of the temperature and its oscillation component should be considered, are clarified.

*Key words: time-harmonic magnetic field, oscillation components of heat release, dynamic terms of thermoelasticity problem, ponderomotive force.*

### ВСТУП

Індукційна технологія нагріву (ІН) широко використовується в промисловості, медицині чи побуті [1]. Такий широкий спектр застосувань зумовлений її перевагами в плані ефективності, економічності, швидкості нагріву та безпеки перед іншими технологіями нагрівання. Очевидно, що для точності контролю процесу нагріву необхідні ефективні математичні моделі, котрі описуватимуть термопружну поведінку електропровідних матеріалів у змінних за часом електромагнітних полях (ЕМП).

Дослідженню термопружного стану електропровідних неферромагнітних тіл у зовнішньому гармонічному за часом ЕМП (індукційному нагріву) присвячена фундаментальна монографія [2]. У даній роботі подано спрощену методику знаходження магнітоелектропружного стану, яка полягає в наступному. На першому етапі із рівнянь електродинаміки визначають ЕМП в усталеному наближенні. Після цього записують усереднені за період коливань зовнішнього ЕМП відповідні вирази для потужності тепловиділень і густини пондеромоторної сили. При цьому нехтують їх коливними (гармонічними) складовими. На другому етапі з рівняння

теплопровідності (у якому джерелами тепла є тепловиділення, визначені на першому етапі) знаходять температурне поле. На третьому етапі з рівнянь квазістатичної термопружності [2, 3] (нехтується динамічними членами, пондеромоторними силами та зв'язністю полів деформації та температури) розраховують переміщення та напруження. У рівняннях термопружності вирази для густини енергії беруть з першого, а вирази для температури – з другого етапів.

Останнім часом у літературі [1, 4-6] приділяють все більшу увагу чисельному розв'язанню задач про знаходження ЕМП та температури в електропровідних тілах при індукційному нагріві та їх експериментальній перевірці. Однак, недостатня увага приділена дослідженню механічних полів (напружень та переміщень), які можуть перевищувати допустимі значення, тобто переходити в зону пластичності та руйнування. Не завжди також враховують вклад коливних складових тепловиділень та пондеромоторної сили (чи не розрізняють їх та усереднені за часом) у термопружний стан таких тіл [6].

Для практичних потреб виникає необхідність розробити більш уточнену розрахункову модель, де враховувались би коливні складові тепловиділень і пондеромоторної сили, а також динамічні члени в квазістатичній задачі термопружності. Критеріальне обґрунтування такої моделі подано в роботі [7].

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається електропровідний шар товщиною  $l$ , віднесений до прямокутної безрозмірної системи координат  $(x, y, z)$  (рис. 1). На шар діє дотична компонента зовнішнього магнітного поля  $H_y$  на верхній поверхні

$$H_y(0;t) = H_0 \cos \omega t, \quad H_y(1;t) = 0. \quad (1)$$

Тут  $\omega = 2\pi\nu$ ,  $\nu$  – частота,  $t$  – час;  $H_0$  – амплітуда гармонічної складової напруженості магнітного поля. Надалі індекс « $y$ » опускаємо.

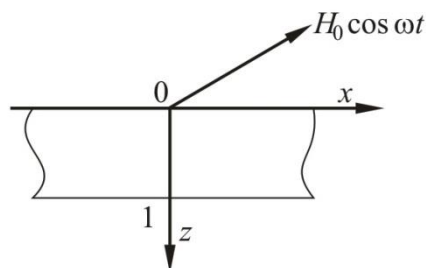


Рис. 1. Схема задачі

Напруженість магнітного поля  $H(z;t)$  в області шару знаходимо з рівняння Максвелла, яке для даного випадку буде

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \mu_0 \lambda^2 \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (2)$$

де  $\mu_0$  – магнітна стала,  $\lambda$  – електропровідність.

Знаючи магнітне поле в області шару, потужність джоулевого тепла  $Q$ , густину енергії ЕМП  $W$ , запасеної в тілі, та густину пондеромоторної сили  $F$  знаходимо за формулами:

$$Q = \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{\partial H}{\partial z} \right)^2, \quad W = \frac{1}{2} \mu_0 H^2, \quad F = -\frac{1}{l} \frac{\partial W}{\partial z}. \quad (3)$$

Останнє співвідношення (3) дозволяє в цій моделі замість пондеромоторної сили  $F$  використовувати густину енергії ЕМП  $W$ , що в подальшому буде використано.

Визначаючи термопружний стан, вважатимемо, що на верхній основі шару відбувається конвективний теплообмін з довкіллям, температура якого дорівнює  $T_0$  шару, а нижня – теплоізолювана. Прийmemo також, що основа  $z=0$  вільна від силового навантаження, а  $z=1$  жорстко скріплена з діелектричним півпростором.

Тоді температурне поле знаходимо з рівняння

$$\frac{1}{a_T} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{l^2} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{Q}{\kappa} \quad (4)$$

за таких початкової та крайових умов:

$$T(z;0) = T_0, \quad \frac{\partial T(0;t)}{\partial z} = Bi[T(0;t) - T_0], \quad \frac{\partial T(1;t)}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

Тут  $\kappa$  і  $a_T$  – коефіцієнти тепло- і температуропровідності;  $Bi$  – критерій Біо.

У системі рівнянь термопружності матимемо ненульову компоненту переміщень  $u_z = u(z;t)$  та три діагональних компоненти тензора механічних напружень  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  та  $\sigma_{zz}$ . Рівняння руху запишемо у вигляді:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{zz} - W) \quad (6)$$

за таких початкових та крайових умов

$$u(z;0) = \frac{\partial u(z;0)}{\partial t} = 0, \quad u(1;t) = 0, \quad \sigma_{zz}(0;t) = 0. \quad (7)$$

У формулах (4) і (6) у класичній теорії [2] значення  $Q$  і  $W$  усереднені за періодом коливань зовнішнього ЕМП.

Використовуючи закон Гука та співвідношення (6) і (7), отримаємо рівняння для переміщень

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{l^2}{c_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1+\nu_p}{1-\nu_p} l \frac{\partial}{\partial z} \left( \alpha_T T + \frac{1-2\nu_p}{E_p} W \right) \quad (8)$$

та крайові умови

$$u(1;t) = 0, \quad \frac{1}{l} \frac{\partial u(0;t)}{\partial z} = \frac{1+\nu_p}{1-\nu_p} \alpha_T [T(0;t) - T_0]. \quad (9)$$

Тут  $c_1 = \sqrt{(1-\nu_p)E_p [\rho(1+\nu_p)(1+2\nu_p)]^{-1}}$  – швидкість поширення поздовжніх хвиль,  $\rho$  – густина.

## 2. МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ

Розв'язок задачі електродинаміки (1)-(2) подаємо у вигляді

$$H(z;t) = 0, 5H_0 [h(z)e^{i\omega t} + \tilde{h}(z)e^{-i\omega t}]. \quad (10)$$

Тут тильда « $\sim$ » над величиною означає її комплексно спряжене значення;  $i$  – уявна одиниця.

Підставляючи подання (10) у співвідношення (1), (2), для функції  $h(z)$  отримаємо таке звичайне диференціальне рівняння та граничні умови:

$$\frac{d^2 h}{dz^2} = 2i\gamma^2 h, \quad h(0) = 1, \quad h(1) = 0, \quad (11)$$

де  $\gamma = l\sqrt{\pi\lambda\mu_0\nu}$ ,  $\delta = 1/\gamma$  – відносна глибина проникання магнітного поля в середовище.

Розв'язок задачі (11) буде таким:

$$h(z) = \text{sh}[(1+i)\gamma(1-z)] \text{sh}^{-1}[(1+i)z]. \quad (12)$$

З формули (3) для тепловиділень  $Q$  та густини енергії ЕМП  $W$ , запасеної в тілі, матимемо

$$\Psi(z;t) = \bar{\Psi}(z) + \Psi_2(z)e^{2i\omega t} + \Psi_2(z)e^{-2i\omega t}, \quad (13)$$

де  $\Psi \equiv \{Q; W\}$ ,  $\bar{\Psi}(z)$  – усереднені величини по періоду коливань ЕМП;  $\Psi_2(z)$  – їхні другі гармоніки.

Запишемо конкретні вирази величин

– усереднені значення:

$$\begin{aligned} \bar{Q}(z) &= \frac{H_0^2}{2\lambda l^2} \frac{dh(z)}{dz} \frac{dh(z)}{dz} = \frac{\gamma^2 H_0^2}{\lambda l^2} \frac{\text{ch } 2\gamma(1-z) + \cos 2\gamma(1-z)}{\text{ch } 2\gamma - \cos 2\gamma}, \\ \bar{W}(z) &= \frac{\mu_0 H_0^2}{4} h(z)h(z) = \frac{\mu_0 H_0^2}{4} \frac{\text{ch } 2\gamma(1-z) - \cos 2\gamma(1-z)}{\text{ch } 2\gamma - \cos 2\gamma}, \end{aligned} \quad (14)$$

– гармонічні складові:

$$\begin{aligned} Q_2(z) &= \frac{H_0^2}{4\lambda l^2} \left( \frac{dh(z)}{dz} \right)^2 = \frac{i\gamma^2 H_0^2}{2\lambda l^2} \frac{\text{ch } 2(1+i)\gamma(1-z) + 1}{\text{ch } 2(1+i)\gamma - 1}, \\ W_2(z) &= \frac{\mu_0 H_0^2}{8} h^2(z) = \frac{\mu_0 H_0^2}{8} \frac{\text{ch } 2(1+i)\gamma(1-z) - 1}{\text{ch } 2(1+i)\gamma - 1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Отримані вирази (14), (15), з урахуванням подання (13), входять у рівняння теплопровідності (4) та в рівняння для переміщень (8).

### 3. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ТА ЧИСЛОВІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Температурне поле шукатимемо із задачі теплопровідності (4)-(5), у якій вираз для тепловиділень  $Q$  задається формулами (13)-(15). Використовуючи перетворення Лапласа за часом  $t$  [8], для функції  $T(z;t)$  матимемо:

$$T(z;t) = T_0 + \bar{T}(z) + T_2(z)e^{2i\omega t} + T_2(z)e^{-2i\omega t} + T_*(z;t), \quad (16)$$

де  $\bar{T}(z)$  – складова частина температури, спричинена усередненими тепловиділеннями  $\bar{Q}(z)$ ;  $T_2(z)$  – гармонічна складова, викликана коливними тепловиділеннями  $Q_2(z)$ ;  $T_*(z;t)$  – складова, що описує перехідний температурний режим.

Враховуючи подання (13) для густини енергії ЕМП та (16) – для температури, в аналогічному вигляді можна записати також і вигляд для переміщень:

$$u(z;t) = \bar{u}(z) + u_2(z)e^{2i\omega t} + u_2(z)e^{-2i\omega t} + u_*(z;t). \quad (17)$$

Зауважимо, що кожний член у поданні (17) має таку ж інтерпретацію, що й для температури в поданні (16).

Розв'язуючи задачу (8), (9), з урахуванням вищесказаного, отримаємо конкретні вирази для компонент температури та переміщень (16), (17).

Для оцінки впливу коливних складових температури, переміщень та механічних напружень на термопружний стан електропровідного неферомагнітного шару в гармонічному за часом магнітному полі порівняно з усередненим за часом відповідними складовими проведено розрахунки для шару з міді, характеристики якої такі [9-11]:

$$\rho = 8,92 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad E_p = 1,29 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2, \quad \nu_p = 0,35, \quad \alpha_T = 1,18 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}, \quad \kappa = 406 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, \\ \alpha_T = 1,72 \cdot 10^{-5} \text{ 1/К}, \quad \lambda = 5,88 \cdot 10^7 \text{ А/(В} \cdot \text{м)}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2, \quad c_1 = 4,818 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Вважатимемо також, що  $T_0 = 300\text{K}$  та приймемо  $Bi = 0,2$ . Оскільки частота  $\nu$  змінюється в межах  $(50 \div 10^{10}) \text{ Гц}$ , а товщина  $l - (10^{-6} \div 1) \text{ м}$ , то параметр  $\gamma$  змінюватиметься в межах  $10^{-4} \div 10^4$ .

Надалі для зручності будемо працювати з безрозмірними температурою, переміщенням та часом, які введемо відповідно:

$$\Theta(0; \tau) = (T(0; \tau) - T_0) T_m^{-1}, \quad v(0; \tau) = u(0; \tau) u_m^{-1}, \quad \tau = \alpha_T l^{-2} t. \quad (18)$$

Одним із завдань даної роботи є дослідження впливу амплітуд коливних складових температури  $A_\Theta(z) = \sqrt{\Theta_2(z)\Theta_2(z)}$  та переміщень  $A_v(z) = \sqrt{v_2(z)v_2(z)}$  на термопружний стан електропровідних неферомагнітних тіл порівняно з їх усталеними величинами –  $\bar{\Theta}(z)$ ,  $\bar{v}(z)$ . Цей вплив будемо характеризувати відношеннями  $S_\Theta(z) = A_\Theta(z)/\bar{\Theta}(z)$  та  $S_v(z) = A_v(z)/\bar{v}(z)$ . Коливні складові розглядуваних величин будемо враховувати за умови:

$$S_\Theta > 10^{-2}, \quad S_v > 10^{-2}. \quad (19)$$

У табл. 1 наведено значення величин  $S_\Theta(z)$  та  $S_v(z)$  для різних значень  $\gamma$ ,  $z$ . Зауважимо, що  $S_v(z) < 0$ , оскільки переміщення  $\bar{u}(z) < 0$  по всій товщині шару.

Аналіз даних, поданих у таблиці, а також отриманих на основі (10)-(17) формул показує, що при доволі малих  $\gamma$  (у граничному випадку  $\gamma \rightarrow 0$ ) ці відношення дорівнюють одиниці (мінус одиниці) незалежно від  $z$ . Зі збільшенням  $\gamma$  вони зменшуються та на нескінченості прямують до нуля. Із означення (18) та умови (19) випливає, що для  $\gamma \leq 0,1$  необхідно враховувати як усталену складову температури та переміщення, так і їх коливні складові. При  $\gamma \geq 1$  величини  $S_\Theta(z)$  і  $S_v(z)$  є настільки нехтовними, що немає потреби їх досліджувати.

Таблиця 1

$\gamma$	0,001	0,01	0,1	1	10	100
$S_\Theta(0)$	0,99	0,97	$4,09 \cdot 10^{-2}$	$5,58 \cdot 10^{-4}$	$7,69 \cdot 10^{-5}$	$7,69 \cdot 10^{-6}$
$S_\Theta(0,25)$	0,99	0,97	$4,09 \cdot 10^{-2}$	$4,55 \cdot 10^{-4}$	$5,91 \cdot 10^{-7}$	$1,71 \cdot 10^{-27}$
$S_\Theta(0,5)$	0,99	0,97	$4,08 \cdot 10^{-2}$	$3,78 \cdot 10^{-4}$	$3,99 \cdot 10^{-9}$	$3,29 \cdot 10^{-49}$
$S_\Theta(0,75)$	0,99	0,97	$4,07 \cdot 10^{-2}$	$3,58 \cdot 10^{-4}$	$2,69 \cdot 10^{-11}$	$6,36 \cdot 10^{-71}$
$S_\Theta(1)$	0,99	0,97	$4,06 \cdot 10^{-2}$	$3,55 \cdot 10^{-4}$	$7,18 \cdot 10^{-13}$	$4,86 \cdot 10^{-92}$

$-S_v(0)$	0,99	0,97	$4,08 \cdot 10^{-2}$	$4,42 \cdot 10^{-4}$	$3,70 \cdot 10^{-5}$	$4,01 \cdot 10^{-6}$
$-S_v(0,25)$	0,99	0,97	$4,07 \cdot 10^{-2}$	$5,35 \cdot 10^{-4}$	$4,00 \cdot 10^{-5}$	$4,04 \cdot 10^{-6}$
$-S_v(0,5)$	0,99	0,97	$4,07 \cdot 10^{-2}$	$5,89 \cdot 10^{-4}$	$4,00 \cdot 10^{-5}$	$4,05 \cdot 10^{-6}$
$-S_v(0,75)$	0,99	0,97	$4,06 \cdot 10^{-2}$	$6,17 \cdot 10^{-4}$	$4,01 \cdot 10^{-5}$	$4,05 \cdot 10^{-6}$
$-S_v(1)$	0,99	0,97	$4,06 \cdot 10^{-2}$	$6,25 \cdot 10^{-4}$	$4,01 \cdot 10^{-5}$	$4,05 \cdot 10^{-6}$

У табл. 2 а наведено значення частот  $\nu$  і товщин  $l$ , для яких потрібно враховувати коливні складові температури та переміщень.

Таблиця 2 а

$\nu, \text{Гц}$	50	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$
$l, \text{м}$	$0,93 \cdot 10^{-3}$	$6,57 \cdot 10^{-4}$	$2,08 \cdot 10^{-4}$	$6,57 \cdot 10^{-5}$	$2,08 \cdot 10^{-5}$	$6,57 \cdot 10^{-6}$

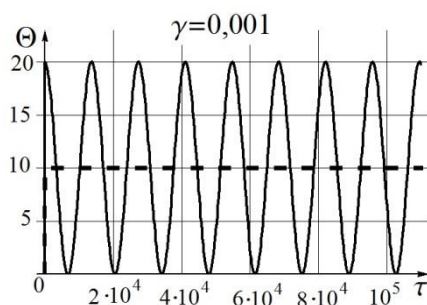
Отже, для дуже широкого діапазону частот умова (19) годиться лише для дуже малих товщин (тонких плівок).

Зауважимо, що для частот  $\nu < 50 \text{ Гц}$  (див. табл. 2 б), які існують, наприклад, у біосистемах [12, 13], необхідно враховувати коливні складові термопружних характеристик для товщин у діапазоні  $l = 1 \text{ мм} \div 1 \text{ м}$ .

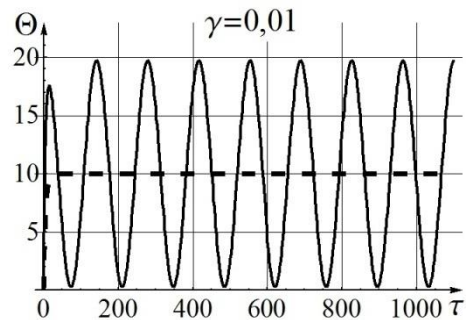
Таблиця 2 б

$l, \text{м}$	1	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$
$\nu, \text{Гц}$	$4,31 \cdot 10^{-5}$	$4,31 \cdot 10^{-3}$	0,43	43,12

На рис. 2 і 3 наведено графіки залежностей безрозмірних температури  $\Theta(0; \tau)$  та переміщень  $v(0; \tau)$  від безрозмірного часу  $\tau$  для тих же значень  $\gamma$ , що подані в табл. 1, на верхній поверхні  $z=0$ . Суцільні лінії на графіках описують температуру  $\Theta(0; \tau)$  та переміщення  $v(0; \tau)$ , що обчислювалися за уточненою розрахунковою моделлю, а пунктирні лінії – температурі  $\bar{\Theta}(0)$  та переміщенню  $\bar{v}(0)$  для випадку спрощеної методики, ( $v_2(z) = 0$  і  $v_*(z; \tau) = 0$ ).



а)



б)

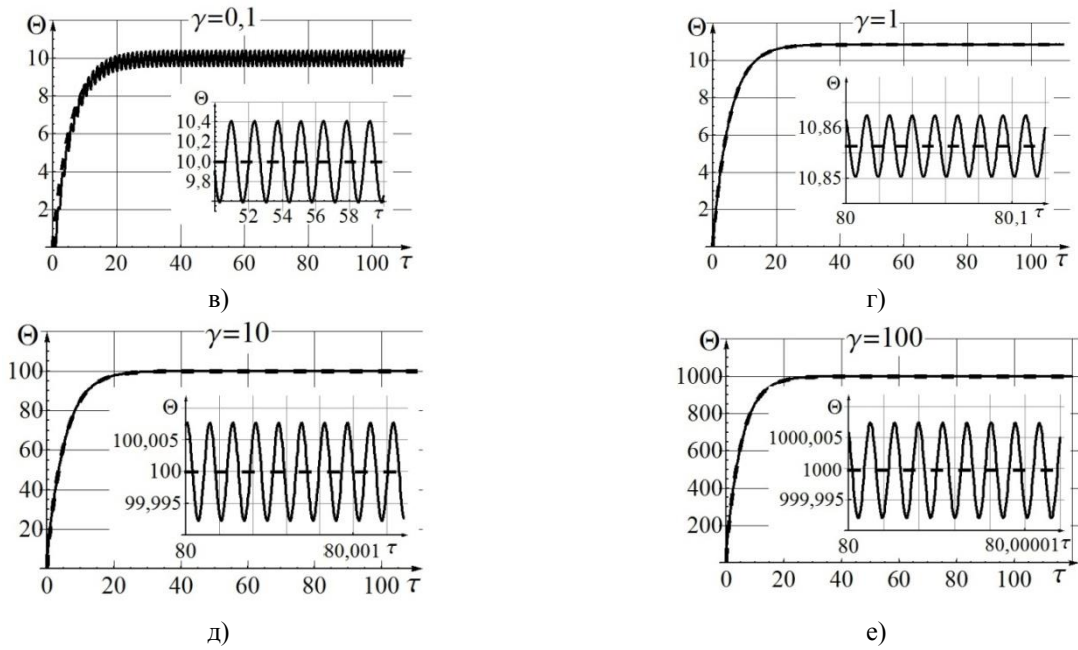


Рис. 2. Часова залежність температури на верхній поверхні шару

Для параметрів  $\gamma = 10^{-3}$  і  $\gamma = 10^{-2}$  (рис. 2 а, б та 3 а, б) температура та переміщення носять явно коливний характер. Вони коливаються відносно положення рівноваги, яким є усталена температура  $\bar{\Theta}(0; \tau)$  (переміщення  $\bar{v}(0)$ ). Для  $\gamma = 10^{-1}$  (рис. 2в і 3в) видно, що амплітуда коливань явно зменшується. Для більших  $\gamma$  (рис. 2г, д, е і 3г д, е) коливання практично відсутні. У цих випадках можна говорити лише про мікроколивання.

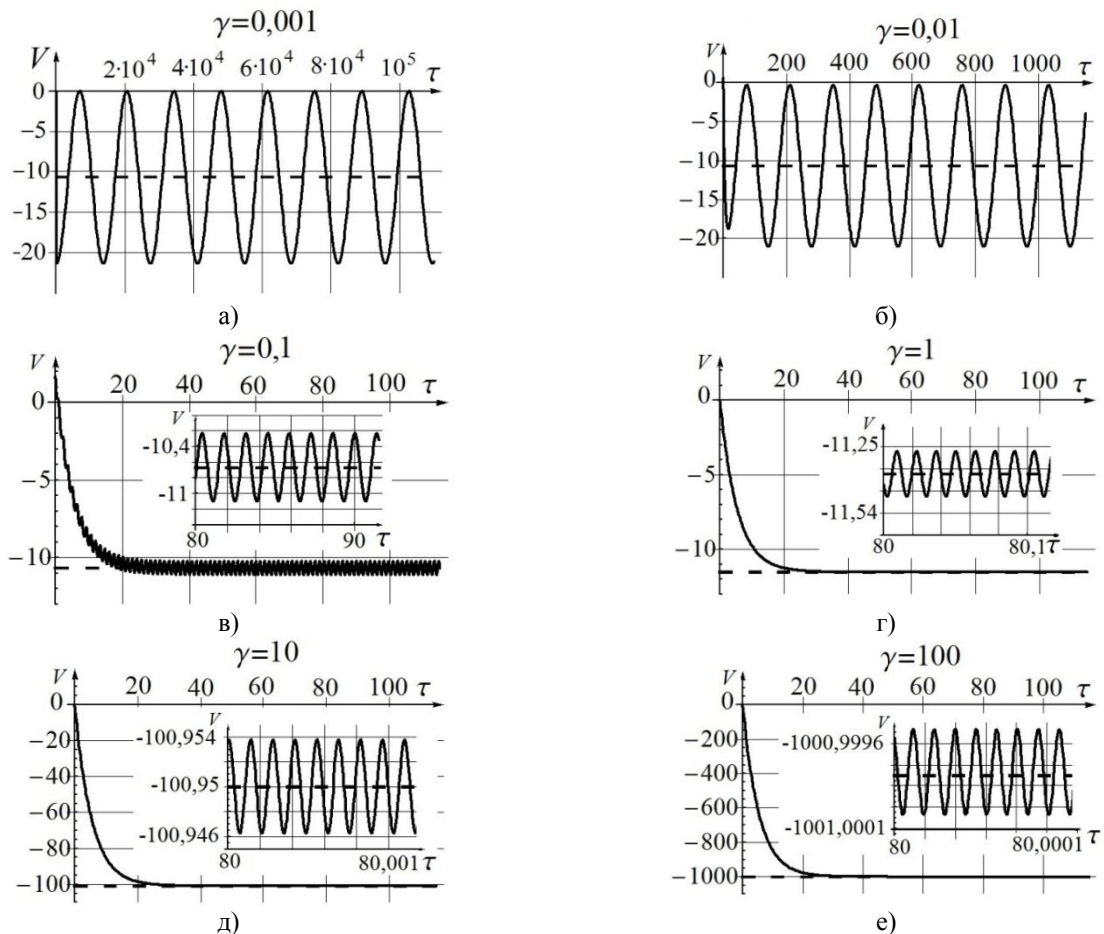


Рис. 3. Часова залежність переміщень на верхній поверхні шару



Розподіл безрозмірної температури  $\bar{\Theta}(z)$  в усталеному тепловому режимі та її амплітуди  $A_{\Theta}(z)$  її коливної складової по товщинній координаті є доволі рівномірний. Спостерігається надто слабка квадратична залежність, яка зі збільшенням параметра  $\gamma$  спочатку зменшується, а потім і зовсім зникає (стає лінійною). Для малих  $\gamma$  ( $\gamma \leq 10^{-3}$ ) амплітуда коливної складової  $A_{\Theta}(z)$  практично співпадає з розподілом усталеної складової  $\bar{\Theta}(z)$ . При  $\gamma \cong 10^{-2}$  вона зменшується на 2%, а при  $\gamma \cong 0,1$  амплітуда  $A_{\Theta}(z)$  становить лише 4% від  $\bar{\Theta}(z)$ . У випадку  $\gamma \geq 1$  – стає практично нехтовною.

Зауважимо, що різниця безрозмірної усталеної температури та амплітуди її коливної складової на верхній  $z=0$  та нижній  $z=1$  поверхнях дорівнює одиниці та не залежить від величини  $\gamma$ .

На відміну від температури, розподіли переміщень в усталеному режимі  $\bar{v}(z)$  та амплітуди її коливної складової  $A_v(z)$  носять повністю рівномірний характер по товщинній координаті. На верхній поверхні  $z=0$  переміщення  $\bar{v}(z)$  приймають мінімальне значення і рівномірно збільшуються з ростом  $z$  та згідно з першою граничною умовою (7) приймають нульове значення на нижній поверхні  $z=0$ .

Аналогічно поводитьься і амплітуда  $A_v(z)$  порівняно з  $\bar{v}(z)$ . Так для малих значень  $\gamma = 10^{-3}$  і  $\gamma = 10^{-2}$  вони з точністю до знаку співпадають, при  $\gamma = 0,1$  – розбіжність не перевищує 4%, а при подальшому збільшенні  $\gamma$  вплив амплітуди  $A_v(z)$  стає нехтовно малим.

Графіки для механічних напружень наводити не будемо, оскільки вони з точністю до множника повторюють розподіл температури.

## ВИСНОВКИ

Термопружний стан електропровідного неферромагнітного шару під дією гармонічного за часом магнітного поля суттєво залежить від параметра  $H_0$  та відносної глибини проникання магнітного поля  $\gamma$ . Ця величина в свою чергу залежить від товщини шару  $l$ , частоти зовнішнього магнітного поля  $\nu$  та електрофізичних характеристик матеріалу.

Показано, що вкладом пондеромоторної сили на термопружний стан електропровідних неферромагнітних тіл необхідно завжди нехтувати у порівнянні з тепловиділеннями.

Для малих  $\gamma$  (з точністю до 1% для  $\gamma < 0,1$ ) потрібно враховувати як усталену складову температури так і її коливну складову. Тоді температура та переміщення носять явно коливний характер. У коливній складовій переміщень входить характерний тепловий розмір, яким можна завжди нехтувати. Знайдено ті значення частоти  $\nu$  і товщини шару  $l$ , для яких потрібно враховувати як усталену складову температури, так і її коливну складову.

З'ясовано, що розподіли температури та переміщень практично лінійні по товщині шару.

Цю розрахункову модель для шару доцільно в подальшому застосовувати для розв'язування аналогічних задач для тіл більш складної конфігурації.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Lucia O. Induction Heating Technology and Its Applications: Past Developments, Current Technology, and Future Challenges / O. Lucia, P. Maussion, E.J. Dede, J.M. Burdío // IEEE Transactions on Industrial Electronics. – 2014. – Vol. 61. – №5. – P. 2509-2520.

2. Подстригач Я. С. Термоупругость электропроводных тел / Я.С. Подстригач, Я.И. Бурак, А.Р. Гачкевич, Л.В. Чернявская. – К. : Наук. думка, 1977. – 248 с.
3. Коваленко А. Д. Термоупругость / А. Д. Коваленко. – К. : Вища шк., 1975. – 216 с.
4. Bay F. A numerical model for induction heating processes coupling electromagnetism and thermomechanics / F. Bay, V. Labbe, Y. Favennec, J.L. Chenot // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 2003. – Vol. 58. – №6. – P. 839-867.
5. Kurose H. 3-D Eddy Current Analysis of Induction Heating Apparatus Considering Heat Emission, Heat Conduction, and Temperature Dependence of Magnetic Characteristics / H. Kurose, D. Miyagi, N. Takahashi, N. Uchida, K. Kawanaka // *IEEE Transactions on Magnetics*. – 2009. – Vol. 45. – Iss. 3. – P. 1847-1850.
6. Doležel I. Induction heating of thin metal plates in time-varying external magnetic field solved as nonlinear hard-coupled problem / I. Doležel, P. Kropík, B. Ulrych // *Applied Mathematics and Computation*. – 2013. – Vol. 219. – Iss. 13. – P. 7159-7169.
7. Солодяк М. Т. Термодифузійні процеси в електропровідних тілах у зовнішньому періодичному в часі магнетному полі / М.Т. Солодяк // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2000. – №5. – С. 91-98.
8. Диткин В. А. Справочник по операционному исчислению / В.А. Диткин, В.А. Прудников. – М. : Высш. шк., 1965. – 465 с.
9. Кикоин И. К. Таблицы физических величин : справ. / И. К. Кикоин. – М. : Атомиздат, 1976. – 1008 с.
10. Кей Дж. Таблицы физических и химических постоянных / Дж. Кей, Т. Леби. – М. : Физматгиз, 1962. – 247 с.
11. Лившиц Б. Г. Физические свойства металлов и сплавов / Б.Г. Лившиц, В.С. Крапошин, Я.Л. Липецкий. – М. : Metallurgiya, 1980. – 320 с.
12. Жиганин А. Д. Техногенные физические поля / А.Д. Жиганин // *Природа*. – 1993. – №2. – С. 15-23.
13. Посудін Ю. І. Фізика і біофізика навколишнього середовища / Ю.І. Посудін. – К. : Світ, 2000. – 304 с.

#### REFERENCES

1. Lucia, O., Maussion, P., Dede, E.J. and Burdío, J.M. (2014), “Induction Heating Technology and Its Applications: Past Developments, Current Technology, and Future Challenges”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 61, no. 5, pp. 2509-2520.
2. Podstrigach, Ja.S., Burak, Ja.I., Gachkevich, A.R., and Chernjavskaja, L.V. (1977), *Termouprugost elektroprovodnyh tiel* [Thermoelasticity conductive of bodies], Nauk. dumka, Kyiv.
3. Kovalenko, A.D. (1975), *Termouprugost* [Thermoelasticity], Vyshcha shk., Kyiv.
4. Bay, F., Labbe, V., Favennec, Y. and Chenot, J.L. (2003), “A numerical model for induction heating processes coupling electromagnetism and thermomechanics”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 58, no. 6, pp. 839-867.
5. Kurose, H., Miyagi, D., Takahashi, N., Uchida, N. and Kawanaka, K. (2009), “3-D Eddy Current Analysis of Induction Heating Apparatus Considering Heat Emission, Heat Conduction, and Temperature Dependence of Magnetic Characteristics”, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 45, iss. 3, pp. 1847-1850.

6. Doležel, I., Kropík, P. and Ulrych, B. (2013), “Induction heating of thin metal plates in time-varying external magnetic field solved as nonlinear hard-coupled problem”, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 219, iss. 13, pp. 7159-7169.
7. Solodiak, M.T. (2000), “Thermodiffusion processes in conductive of bodies in the external periodic magnetic field in time”, *Fiz.-him. mehanika materialiv*, no. 5., pp. 91-98.
8. Ditkin, V.A. and Prudnikov, V.A. (1965), *Spravochnik po operacionnomu ischisleniju* [Handbook of operational calculus], Vyssh. shk., Moscow.
9. Kikoin, I.K. (1976), *Tablicy fizicheskikh velichin: Sprav.* [Tables of physical quantities: Handbook], Atomizdat, Moscow.
10. Kej, Dzh. and Lebi, T. (1962), *Tablicy fizicheskikh i himicheskikh postojannyh* [Tables of Physical and Chemical Constants], Fizmatgiz, Moscow.
11. Livshic, B.G., Kraposhin, V.S. and Lipeckij, Ja.L. (1980), *Fizicheskie svojstva metalov i splavov* [Physical properties of metals and alloys], Metallurgija, Moscow.
12. Zhiganin, A.D. (1993), “Technogenic physical fields”, *Priroda*, no. 2, pp. 15-23.
13. Posudin, Ju.I. (2000), *Fizika i biofizika navkolishn’ogo seredovishha* [Physics and Biophysics of the environment ], Svit, Kyiv.

УДК 539.3

## ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОГО СЖИМАЕМОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Глухов Ю. П., к. ф.-м. н., доцент

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,  
ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина*

gluchov.uriy@gmail.com

В рамках линеаризированной теории упругости для тел с начальными напряжениями рассмотрена постановка и метод решения пространственной установившейся задачи о возмущении двухслойного предварительно напряженного полупространства движущейся с постоянной скоростью поверхностной нагрузкой. Рассмотрена трехмерная модель слоистой среды «пластина и предварительно напряженное полупространство». Уравнения движения пластины записываются с учетом сдвига и инерции вращения. Контакт между пластиной и полупространством – нежесткий. Фундаментальное решение задачи получено с помощью метода интегральных преобразований Фурье.

*Ключевые слова:* начальные напряжения, движущаяся с постоянной скоростью нагрузка, двухслойное полупространство, сжимаемый материал.

## ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ ДВОШАРОВОГО СТИСЛИВОГО НАПІВПРОСТОРУ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

Глухов Ю. П., к. ф.-м. н., доцент

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,  
вул. Нестерова, 3, Київ, 03057, Україна*

gluchov.uriy@gmail.com

У рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями розглянута постановка та метод розв’язку просторової усталеної задачі про збудження двошарового попередньо напруженого напівпростору поверхневим навантаженням, що рухається з постійною швидкістю. Розглянута тривимірна модель шаруватого середовища «пластина і попередньо напружений напівпростір». Рівняння руху пластины записуються з