6. Doležel, I., Kropík, P. and Ulrych, B. (2013), “Induction heating of thin metal plates in time-varying external magnetic field solved as nonlinear hard-coupled problem”, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 219, iss. 13, pp. 7159-7169.

7. Solodiak, M.T. (2000), “Thermodiffusion processes in conductive of bodies in the external periodic magnetic field in time”, *Fiz.-him. mehanika materialiv*, no. 5., pp. 91-98.

8. Ditkin, V.A. and Prudnikov, V.A. (1965), *Spravochnik po operacionnomu ischisleniju* [Handbook of operational calculus], Vyssh. shk., Moskow.

9. Kikoin, I.K. (1976), *Tablicy fizicheskih velichin: Sprav.* [Tables of physical quantities: Handbook], Atomizdat, Moskow.

10. Kej, Dzh. and Lebi, T. (1962), *Tablicy fizicheskih i himicheskih postojannyh* [Tables of Physical and Chemical Constants], Fizmatgiz, Moskow.

11. Livshic, B.G., Kraposhin, V.S. and Lipeckij, Ja.L. (1980), *Fizicheskie svojstva metalov i splavov* [Physical properties of metals and alloys], Metallurgija, Moskow.

12. Zhiganin, A.D. (1993), “Technogenic physical fields”, *Priroda*, no. 2, pp. 15-23.

13. Posudin, Ju.I. (2000), Fizika i biofizika navkolishn’ogo seredovishha [Physics and Biophysics of the environment], Svit, Kyiv.

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОГО СЖИМАЕМОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Глухов Ю. П., к. ф.-м. н., доцент

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина

gluchov.uriy@gmail.com

В рамках линеаризированной теории упругости для тел с начальными напряжениями рассмотрена постановка и метод решения пространственной установившейся задачи о возмущении двухслойного предварительно напряженого полупространства движущейся с постоянной скоростью поверхностной нагрузкой. Рассмотрена трехмерная модель слоистой среды «пластина и предварительно напряженное полупространство». Уравнения движения пластины записываются с учетом сдвига и инерции вращения. Контакт между пластиной и полупространством – нежесткий. Фундаментальное решение задачи получено с помощью метода интегральных преобразований Фурье.
Ключевые слова: начальные напряжения, движущаяся с постоянной скоростью нагрузка, двухслойное полупространство, сжимаемый материал.

ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ ДВОШАРОВОГО СТИСЛИВОГО НАПІВПРОСТОРУ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

Глухов Ю. П., к. ф.-м. н., доцент

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова, 3, Київ, 03057, Україна

gluchov.uriy@gmail.com

У рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями розглянута постановка та метод розв’язку просторової усталеної задачі про збудження двошарового попередньо напруженого напівпростору поверхневим навантаженням, що рухається з постійною швидкістю. Розглянута тривимірна модель шаруватого середовища «пластина і попередньо напружений напівпростір». Рівняння руху пластини записуються з

урахуванням зсуву та інерції обертання. Контакт між пластиною і напівпростором є нежорсткий. Фундаментальний розв'язок задачі отримано з допомогою метода інтегральних перетворень Фур'є.
Ключові слова: початкові напруження, навантаження, що рухається з постійною швидкістю, двошаровий напівпростір, стисливий матеріал.

DINAMIC TASK FOR TWO-LAYERED COMPRESSIBLE HALF-SPACE WITH INITIAL STRESSES

Glukhov Yu. P., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine, Nesterova str., 3, Kyiv, 03057, Ukraine

gluchov.uriy@gmail.com

Within the bounds of linearized theory of elasticity for bodies with initial stresses a non-planar problem and the method for solution of the perturbation of moving with a constant speed of the surface load of two-layered pre-stressed half-space is considered. The three-dimensional model of the layered medium “a plate and pre-stressed half-space” is considered. Equations of plate motion are written down taking into consideration of shift and rotary inertia. Half-space material is assumed compressible, isotropic in the natural state. The homogeneous initial state is considered in a type of $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$; $S_0^{11} = S_0^{22} \neq S_0^{33}$. The border surfaces of elements of the layered medium are flat and parallel. The contact between a plate and a half-space is non-rigid. The surface load is point and moves rectilinearly. The fundamental solution of the problem is obtained using the Fourier integral method. The solution is presented in a general view for the equal and unequal roots of characteristic equation and different speeds of superficial loading movement. The form of elastic potential The shape of the elastic potential takes the general form and should be specified only under the numerical calculations. Obtained results can be used to investigate the mode of deformation of the elements of layered structures which are exposed to the moving loads.
Key words: initial tensions, moving with permanent speed load, two-layered half-space, compressible material.

ВВЕДЕНИЕ

Исследования и решение задач оптимального проектирования слоистых конструкций, подвергающихся воздействию подвижных поверхностных загрузок, представляют большой научный и практический интерес. Слоистые конструкции технологичны и просты в изготовлении и широко используются в различных областях.

Одной из интересных и актуальных проблем, анализ которой невозможно провести в рамках классической линейной теории упругости, является изучение динамических процессов в слоистых телах с начальными напряжениями. Начальные напряжения возникают в элементах конструкций в результате технологических операций при их изготовлении, в земной коре вследствие действия геостатических и геодинамических сил, в композитных материалах при технологических процессах их создания и т.д.

Действию подвижных нагрузок на слоистые тела посвящено много работ. Для классических сред такие задачи изучались как в точной постановке, так и с использованием различных приближенных моделей многослойной среды.

В данной работе рассмотрена пространственная установившаяся задача о возмущении движущейся с постоянной скоростью поверхностной нагрузкой двухслойного сжимаемого полупространства с начальными напряжениями.

Исследования были проведены в рамках линеаризированной теории упругости тел с начальными напряжениями [1]. В линеаризированной теории упругости для тел с начальными напряжениями и деформациями предполагается, что возмущенному состоянию тела предшествует некоторое начальное состояние с отличными от нуля напряжениями и деформациями. При этом рассматриваются только малые дополнительные напряжения (возмущения) по сравнению с напряжениями в начальном состоянии. Такая теория, в отличие от линейной классической теории упругости, более полно отражает свойства реальных деформируемых тел.

Предполагаем, что движение верхнего слоя может быть описано системой уравнений из теории пластин, учитывающей влияние инерции вращения и поперечного сдвига.

Подстилающее полупространство имеет начальные напряжения и состоит из сжимаемого материала с произвольным упругим потенциалом. К свободной границе слоя приложена движущаяся с постоянной скоростью нагрузка. Аналогичная плоская задача для двухслойного сжимаемого полупространства рассмотрена в работе [2].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим слой толщиной $2h$, лежащий на полупространстве. Считаем, что начальное напряженно-деформированное состояние полупространства является однородным и определяется следующими компонентами вектора перемещений и тензора обобщенных напряжений

$$u_j^0 = \delta_{ij}\left(\lambda_i + 1\right)x_i; \quad \sigma_{ii}^{*0} \neq 0 \quad \left(i, j = 1, 2, 3\right), \tag{1}$$

где λ_i – удлинения ($\lambda_i = \mathrm{const}$) вдоль осей лагранжевой системы координат x_i, совпадающей в естественном состоянии с декартовой системой координат. Рассмотрим начальное состояние в виде:

$$\lambda_1^{\{s\}} = \lambda_2^{\{s\}} \neq \lambda_3^{\{s\}}; \quad S_0^{\{s\}11} = S_0^{\{s\}22} \neq S_0^{\{s\}33}. \tag{2}$$

Наряду с лагранжевыми координатами введем декартовые координаты ξ_i начального деформированного состояния, связанные с координатами x_i соотношениями $\xi_i = \lambda_i x_i$.

Координатная ось ξ_3 направлена перпендикулярно поверхностям слоев вглубь полупространства.

Слоистое полупространство отнесено к декартовой системе координат ξ_i $(i = 1, 2, 3)$, соответствующей начальному деформированному состоянию. Координатная ось ξ_3 направлена перпендикулярно поверхностям слоистого полупространства вглубь полупространства.

К свободной границе слоя приложена нагрузка, движущаяся с постоянной скоростью v в течение большого промежутка времени и не зависящая от координаты ξ_3. Относительно системы координат, связанной с этой нагрузкой, существует установившееся деформированное состояние. Если предположить, что нагрузка движется по прямой, расположенной под углом φ к оси ξ_1, то координаты подвижной системы координат определяются соотношениями:

$$y_1 = \xi_1 - \mathrm{v}\cos\varphi \cdot t; \quad y_2 = \xi_2 - \mathrm{v}\sin\varphi \cdot t; \quad y_3 = \xi_3. \tag{3}$$

Также предположим, что напряжения, возникающие за счет действия нагрузки, значительно меньше начальных напряжений. Указанное предположение позволяет применять линеаризированную теорию упругости [1] для описания дополнительного напряженного состояния, вызванного действием нагрузки.

С учетом (1) и (2) в координатах подвижной системы координат (3) уравнения движения и компоненты напряженно-деформированного состояния сжимаемого полупространства можно записать в общем виде следующим образом:

– уравнения движения

$$\left(\tilde{A}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \zeta_1^2\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)\Psi = 0;$$

$$\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \zeta_2^2\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \zeta_3^2\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right) - \left[\tilde{B}\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right) + \tilde{C}\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right]\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{D}\frac{\partial^4}{\partial y_1^4}\right\}\chi^{\{s\}} = 0; \tag{4}$$

– перемещения

$$u_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial y_2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial y_1 \partial y_3}; \quad u_2 = -\frac{\partial \Psi}{\partial y_1} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial y_2 \partial y_3}; \quad u_3 = \left(\tilde{\beta}_1 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\beta}_2 \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \tilde{\beta}_3 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \chi; \tag{5}$$

– напряжения

$$\tilde{Q}_{ii} = \tilde{a}_{ii}^{(1)} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_1 \partial y_2} + \left(\tilde{b}_{ii}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{b}_{ii}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \tilde{b}_{ii}^{(3)} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial \chi}{\partial y_3}; \quad i = \overline{1,3};$$

$$\tilde{Q}_{ij} = \left(\tilde{a}_{ij}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{a}_{ij}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \Psi - \tilde{b}_{ij}^{(1)} \frac{\partial^3 \chi}{\partial y_1 \partial y_2 \partial y_3}; \quad i, j = 1, 2; \tag{6}$$

$$\tilde{Q}_{ij} = \tilde{a}_{ij}^{(1)} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_k \partial y_3} + \left(\tilde{b}_{ij}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{b}_{ij}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \tilde{b}_{ij}^{(3)} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial \chi}{\partial y_i};$$

$$i, j, k = \overline{1,3}; \quad k \neq j; \quad k \neq i;$$

где коэффициенты $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}, \zeta_j, \tilde{\beta}_j, \tilde{a}_{ij}^{(m)}, \tilde{b}_{ij}^{(m)}$ в выражениях (4)-(6) являются функциями параметров v, φ, характеризующих нагрузку, и параметров, характеризующих материал элементов слоистой среды $\tilde{\omega}^{\{s\}}$. В случае сжимаемого материала имеем:

$$\xi_1^2 = \tilde{\omega}_{3113} \tilde{\omega}_{1221}^{-1}; \quad \xi_{2,3}^2 = c \pm \left(c^2 - \tilde{\omega}_{3113} \tilde{\omega}_{3333} \tilde{\omega}_{1331}^{-1} \tilde{\omega}_{1111}^{-1} \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$2c \tilde{\omega}_{1111} \tilde{\omega}_{1331} = \tilde{\omega}_{1331} \tilde{\omega}_{3113} + \tilde{\omega}_{1111} \tilde{\omega}_{3333} - \left(\tilde{\omega}_{1133} + \tilde{\omega}_{1313} \right)^2;$$

$$A = \tilde{\rho} \tilde{\omega}_{1221}^{-1}; \quad B = \tilde{\rho}^{-1} D^{-1} \left(\tilde{\omega}_{1111} + \tilde{\omega}_{1331} \right); \quad C = \tilde{\rho}^{-1} D^{-1} \left(\tilde{\omega}_{3333} + \tilde{\omega}_{3113} \right); \quad D = \tilde{\rho}^2 \tilde{\omega}_{1111}^{-1} \tilde{\omega}_{1331}^{-1};$$

$$\beta_1 = \tilde{\rho}^{-1} \beta_3 \tilde{\omega}_{1111}; \quad \beta_2 = \tilde{\rho}^{-1} \beta_3 \tilde{\omega}_{3113}; \quad \beta_3 = \tilde{\rho} \left(\tilde{\omega}_{1133} + \tilde{\omega}_{1313} \right)^{-1};$$

$$a_{ii}^{(1)} = \tilde{\omega}_{ii11} - \tilde{\omega}_{ii22}; \quad b_{ii}^{(k)} = \tilde{\rho}^{-1} b_{ii}^{(4)} \tilde{\omega}_{1111} - \tilde{\omega}_{iikk}; \quad k = 1, 2; \quad b_{ii}^{(3)} = \tilde{\rho}^{-1} b_{ii}^{(4)} \tilde{\omega}_{3113};$$

$$b_{ii}^{(4)} = \tilde{\rho} \tilde{\omega}_{ii33} \left(\tilde{\omega}_{1133} + \tilde{\omega}_{1313} \right)^{-1}; \quad i = 1, 2, 3;$$

$$a_{ij}^{(1)} = -\tilde{\omega}_{ij21}; \quad a_{ij}^{(2)} = \tilde{\omega}_{ij12}; \quad b_{ij}^{(1)} = \tilde{\omega}_{ij12} + \tilde{\omega}_{ij21}; \quad i, j = 1, 2;$$

$$a_{ij}^{(1)} = \tilde{\omega}_{ij13}; \quad b_{ij}^{(1)} = b_{ij}^{(2)} = \tilde{\rho}^{-1} b_{ij}^{(4)} \tilde{\omega}_{1111}; \quad b_{ij}^{(3)} = \tilde{\rho}^{-1} b_{ij}^{(4)} \tilde{\omega}_{3113};$$

$$b_{ij}^{(4)} = \tilde{\rho} \tilde{\omega}_{ij31} \left(\tilde{\omega}_{1133} + \tilde{\omega}_{1313} \right)^{-1}; \quad i, j = 1, 3;$$

$$a_{ij}^{(1)} = -\tilde{\omega}_{ij23}; \quad b_{ij}^{(1)} = b_{ij}^{(2)} = \tilde{\rho}^{-1} b_{ij}^{(4)} \tilde{\omega}_{1111}; \quad b_{ij}^{(3)} = \tilde{\rho}^{-1} b_{ij}^{(4)} \tilde{\omega}_{3113} - \tilde{\omega}_{ij23};$$

$$b_{ij}^{(4)} = \tilde{\rho} \tilde{\omega}_{ij23} \left(\tilde{\omega}_{1133} + \tilde{\omega}_{1313} \right)^{-1}; \quad i, j = 2, 3; \quad \tilde{\rho} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \rho,$$

где ρ – плотность материала полупространства в естественном состоянии.

Предположим, что движение слоя может быть описано системой уравнений из теории пластин, учитывающей влияние инерции вращения и поперечного сдвига. Для пластины, находящейся под воздействием поперечных и тангенциальных поверхностных сил, соответствующие уравнения в системе координат (3) могут быть записаны так:

$$\frac{2G_1h^2}{3(1-\nu)}\left[(1-\nu)\nabla^2\Psi_1+(1+\nu)\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}\right]+\tau_1-\varkappa G_1\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y_1}+\Psi_1\right)=\frac{2\rho_1h^2}{3}\mathrm{v}^2\cos^2\varphi\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial y_1^2};$$

$$\frac{2G_1h^2}{3(1-\nu)}\left[(1-\nu)\nabla^2\Psi_2+(1+\nu)\frac{\partial\Phi}{\partial y_2}\right]+\tau_2-\varkappa G_1\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y_2}+\Psi_2\right)=\frac{2\rho_1h^2}{3}\mathrm{v}^2\cos^2\varphi\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial y_1^2}; \qquad (7)$$

$$\varkappa G_1h\left(\nabla^2\mathrm{w}+\Phi\right)+q=2h\rho_1\mathrm{v}^2\cos^2\varphi\frac{\partial^2\mathrm{w}}{\partial y_1^2}+P_3\delta(y_1)\delta(y_2).$$

Здесь

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_2^2};\quad \Phi=\frac{\partial\Psi_1}{\partial y_1}+\frac{\partial\Psi_2}{\partial y_2},$$

ρ_1 – плотность материала пластины; G_1 – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона; $\varkappa$ – коэффициент сдвига Тимошенко; Ψ_1, і Ψ_2 – повороти относительно осей y_1 і y_2; w – перемещение срединной плоскости пластины; τ_1, τ_2, q – касательные и нормальные нагрузки, действующие на поверхности раздела пластины и полупространства; P_3 – нормальная нагрузка на свободной поверхности пластины.

Рассмотрим нежесткий контакт между пластиной и полупространством при $y_3=-h$:

$$\tilde{Q}_{31}=0;\quad \tilde{Q}_{32}=0;\quad \tilde{Q}_{33}=q;\quad \tau_1=0;\quad \tau_2=0;\quad u_3=\mathrm{w}. \qquad (8)$$

При изложенных выше условиях имеем трехмерную установившуюся задачу, состоящую в совместном решении уравнений движения (4) и (7) при граничных условиях (8) и условия затухания на бесконечности.

Воспользуемся уравнениями (7) и (8) и соотношениями упругости (5) и (6) и выразим функции q,τ_1,τ_2 и w через функции Ψ,χ,Ψ_1 и Ψ_2:

$$\left(\tilde{a}_{31}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\tilde{a}_{31}^{(2)}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)\Psi-\tilde{b}_{31}^{(1)}\frac{\partial^3\chi}{\partial y_1\partial y_2\partial y_3}=0;\quad \left(\tilde{a}_{32}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\tilde{a}_{32}^{(2)}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)\Psi-\tilde{b}_{32}^{(1)}\frac{\partial^3\chi}{\partial y_1\partial y_2\partial y_3}=0;$$

$$\theta_1\nabla^2\Psi_1+\theta_2\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}-\theta_3\left(\tilde{\beta}_1\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\tilde{\beta}_2\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\tilde{\beta}_3\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)\frac{\partial\chi}{\partial y_1}-\theta_3\Psi_1=\theta_5\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial y_1^2};$$

$$\theta_1\nabla^2\Psi_2+\theta_2\frac{\partial\Phi}{\partial y_2}-\theta_3\left(\tilde{\beta}_1\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\tilde{\beta}_2\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\tilde{\beta}_3\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)\frac{\partial\chi}{\partial y_2}-\theta_3\Psi_2=\theta_5\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial y_1^2}; \qquad (9)$$

$$\theta_4\nabla^2\left(\tilde{\beta}_1\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\tilde{\beta}_2\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\tilde{\beta}_3\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)\chi+\theta_4\Phi+\tilde{a}_{33}^{(1)}\frac{\partial^2\Psi}{\partial y_1\partial y_2}+\left(\tilde{b}_{33}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\tilde{b}_{33}^{(2)}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\tilde{b}_{33}^{(3)}\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)\frac{\partial\chi}{\partial y_3}=$$

$$=\theta_6\left(\tilde{\beta}_1\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\tilde{\beta}_2\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\tilde{\beta}_3\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)\frac{\partial^2\chi}{\partial y_1^2}+P_3\delta(y_1)\delta(y_2).$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\theta_1=\frac{2}{3}G_1h^2;\quad \theta_2=\theta_1\frac{1+\nu}{1-\nu};\quad \theta_3=\varkappa G_1;\quad \theta_4=\theta_3h;\quad \theta_5=\frac{2\rho_1h^2}{3}\mathrm{v}^2\cos^2\varphi;\quad \theta_6=2h\rho_1\mathrm{v}^2\cos^2\varphi.$$

Таким образом, задача об установившемся движении двухслойного сжимаемого полупространства при воздействии подвижной нагрузки сводится к нахождению функций Ψ,χ,Ψ_1 и Ψ_2 из граничных условий (9).

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ОБЛАСТИ ИЗОБРАЖЕНИЙ ФУРЬЕ

Для решения задачи воспользуемся двойным преобразованием Фурье по координатам y_1 и y_2. В пространстве изображений Фурье уравнения движения (4) можно представить в виде:

$$\left(\frac{d^2}{dy_3^2}-\mu_1^2\right)\Psi^F=0;\quad \left(\frac{d^2}{dy_3^2}-\mu_2^2\right)\left(\frac{d^2}{dy_3^2}-\mu_3^2\right)\chi^F=0; \tag{10}$$

где

$$\mu_1^2=\zeta_1^{-2}\left(k_1^2\tilde{A}+k_2^2\right);\quad \mu_{2,3}^2=B_1\pm\sqrt{B_1^2-B_2};$$

$$2B_1=\zeta_2^{-2}\zeta_3^{-2}\left[\left(\zeta_2^2+\zeta_3^2\right)\left(k_1^2+k_2^2\right)-k_1^2\tilde{C}\right];$$

$$B_2=\zeta_2^{-2}\zeta_3^{-2}\left[\left(k_1^2+k_2^2\right)^2+k_1^2k_2^2\tilde{B}+k_1^4\left(\tilde{B}+\tilde{D}\right)\right];$$

k_1, k_2 – параметры двойного преобразования Фурье.

Преобразованная система граничных условий (9) имеет вид:

$$-\left(k_1^2\tilde{a}_{31}^{(1)}+k_2^2\tilde{a}_{31}^{(2)}\right)\Psi^F+k_1k_2\tilde{b}_{31}^{(1)}\frac{d\chi^F}{dy_3}=0;\quad -\left(k_1^2\tilde{a}_{32}^{(1)}+k_2^2\tilde{a}_{32}^{(2)}\right)\Psi^F+k_1k_2\tilde{b}_{32}^{(1)}\frac{d\chi^F}{dy_3}=0; \tag{11}$$

$$ik_1\theta_3\left(k_1^2\tilde{\beta}_1+k_2^2\tilde{\beta}_2-\tilde{\beta}_3\frac{d^2}{dy_3^2}\right)\chi^F-\left[k_1^2\left(\theta_1+\theta_2-\theta_5\right)+k_2^2\theta_1+\theta_3\right]\Psi_1^F-k_1k_2\theta_2\Psi_2^F=0;$$

$$ik_2\theta_3\left(k_1^2\tilde{\beta}_1+k_2^2\tilde{\beta}_2-\tilde{\beta}_3\frac{d^2}{dy_3^2}\right)\chi^F-k_1k_2\theta_2\Psi_1^F-\left[k_1^2\left(\theta_1-\theta_5\right)+k_2^2\left(\theta_1+\theta_2\right)+\theta_3\right]\Psi_2^F=0;$$

$$-k_1k_2\tilde{a}_{33}^{(1)}\Psi^F+\left\{\left(k_1^2\tilde{\beta}_1+k_2^2\tilde{\beta}_2\right)\left[k_1^2\left(\theta_4-\theta_6\right)+k_2^2\theta_4\right]-\left(k_1^2\tilde{b}_{33}^{(1)}+k_2^2\tilde{b}_{33}^{(2)}\right)\frac{d}{dy_3}-\right.$$

$$\left.-\left[k_1^2\left(\theta_4-\theta_6\right)+k_2^2\theta_4\right]\tilde{\beta}_3\frac{d^2}{dy_3^2}+\tilde{b}_{33}^{(3)}\frac{d^3}{dy_3^3}\right\}\chi^F+ik_1\theta_4\Psi_1^F+ik_2\theta_4\Psi_2^F=P_3^F.$$

Решение преобразованных уравнений (10) с учетом затухания на бесконечности будем искать в виде:

$$\Psi^F=C_1\mathrm{e}^{\gamma_1(y_3+h)};\quad \chi^F=C_2\mathrm{e}^{\gamma_2(y_3+h)}+\left[1-\delta_{\mu_2\mu_3}+\delta_{\mu_2\mu_3}\left(y_3+h\right)\right]C_3\mathrm{e}^{\gamma_3(y_3+h)}. \tag{12}$$

Здесь $\delta_{\mu_2\mu_3}=\begin{cases}1, & \mu_2^2=\mu_3^2;\\ 0, & \mu_2^2\neq\mu_3^2;\end{cases}$ $\gamma_j=\sigma_j\mu_j;$ $\sigma_j\equiv\sigma=\left|\mu_j\right|/\mu_j$, если $\mu_j^2>0$, $\sigma_j=i$, если $\mu_j^2<0$ и $\gamma_j=\sigma\operatorname{Re}\mu_j-(-1)^j\, i\operatorname{Im}\mu_j$, если μ_j^2 принимает комплексные значения.

Введем замену

$$C_j=C_j,\quad j=\overline{1,3};\quad C_{j+3}=i\Psi_j^F,\quad j=1,2. \tag{13}$$

Подставляя (12) и (13) в преобразованную систему уравнений (11), получаем систему алгебраических уравнений относительно неизвестных C_j, $j=\overline{1,5}$:

$$\zeta_{11}C_1+\zeta_{21}\gamma_2C_2+\zeta_{21}\left[\delta_{\mu_2\mu_3}+\left(1-\delta_{\mu_2\mu_3}\right)\gamma_3\right]C_3=0;$$

$$\zeta_{12}C_1+\zeta_{22}\gamma_2C_2+\zeta_{22}\left[\delta_{\mu_2\mu_3}+\left(1-\delta_{\mu_2\mu_3}\right)\gamma_3\right]C_3=0;$$

$$\zeta_{31}\zeta_{51}C_2+\zeta_{51}\left[\delta_{\mu_2\mu_3}\varsigma_3+\left(1-\delta_{\mu_2\mu_3}\right)\zeta_{32}\right]C_3+\zeta_{61}C_4+\varsigma_4C_5=0; \tag{14}$$

$$\zeta_{31}\zeta_{52}C_2+\zeta_{52}\left[\delta_{\mu_2\mu_3}\varsigma_3+\left(1-\delta_{\mu_2\mu_3}\right)\zeta_{32}\right]C_3+\varsigma_4C_4+\zeta_{62}C_5=0;$$

$$\zeta_9C_1+\zeta_{71}C_2+\left\{-\delta_{\mu_2\mu_3}\zeta_{10}+\left(1-\delta_{\mu_2\mu_3}\right)\zeta_{72}\right\}C_3+\zeta_{81}C_4+\zeta_{82}C_5=P_3^F,$$

где

$$\varsigma_1=k_1^2\left(\theta_4-\theta_6\right)+k_2^2\theta_4;\quad \varsigma_2=k_1^2\left(\theta_1-\theta_5\right)+k_2^2\theta_1+\theta_3;\quad \varsigma_3=-2\gamma_3\tilde{\beta}_3;$$

$$\varsigma_4=k_1k_2\theta_2;\quad \varsigma_5=-k_1k_2\tilde{a}_{33}^{(1)};\quad \varsigma_6=\zeta_{42}-2\gamma_3^2\tilde{b}_{33}^{(3)}-\varsigma_1\varsigma_3;$$

$$\zeta_{1j}=-\left(k_1^2\tilde{a}_{3j}^{(1)}+k_2^2\tilde{a}_{3j}^{(2)}\right);\quad \zeta_{2j}=k_1k_2\tilde{b}_{3j}^{(1)};\quad \zeta_{3j}=k_1^2\tilde{\beta}_1+k_2^2\tilde{\beta}_2-\gamma_{j+1}^2\tilde{\beta}_3;$$

$$\zeta_{4j}=k_1^2\tilde{b}_{33}^{(1)}+k_2^2\tilde{b}_{33}^{(2)}-\gamma_{j+1}^2\tilde{b}_{33}^{(3)};\quad \zeta_{5j}=k_j\theta_3;$$

$$\zeta_{6j}=\varsigma_2+k_j^2\theta_2;\quad \zeta_{7j}=\zeta_{3j}\varsigma_1-\zeta_{4j}\gamma_{1+j};\quad \zeta_{8j}=k_j\theta_4;\quad j=1,2.$$

Таким образом, решение задачи об установившемся движении многослойного упругого полупространства с начальными напряжениями под воздействием подвижной нагрузки в области изображений Фурье сводится к решению системы алгебраических уравнений (14) относительно неизвестных $C_j,\ j=\overline{1,5}$.

ВЫВОДЫ

В работе в рамках линеаризированной теории упругости для тел с начальными напряжениями рассмотрена постановка и метод решения пространственной динамической задачи о возмущении двухслойного предварительно напряженного полупространства движущейся с постоянной скоростью поверхностной нагрузкой. В пространстве изображений Фурье в общем виде получено решение задачи. Для получения оригиналов трансформант соответствующих компонентов напряженно-деформированного состояния следует воспользоваться обратным преобразованием Фурье. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании напряженно-деформированного состояния элементов слоистых конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями / А.Н. Гузь. – К. : «А.С.К», 2004. – 672 с.
2. Бабич С. Ю. Об одной динамической задаче для слоистого сжимаемого полупространства с начальными напряженими / С.Ю. Бабич, Ю.П. Глухов, А.Н. Гузь // Прикл. механика. – 2008. – 44, №3. – С. 36-54.

REFERENSES

1. Guz, A.N. (2004), *Uprugie volnyi v telah s nachalnyimi (ostatochnyimi) napryazheniyami* [Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses], “A.S.K”, Kiev, Ukraine.
2. Babich, S.Yu., Gluhov, Yu.P. and Guz, A.N. (2008), “About one dynamic task for the stratified incompressible semispace with initial stresses”, *Prikl. Mehanika*, 44, no. 3, pp. 36-54.