

УДК 539.3

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ОСЕСИМЕТРИЧНЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН В ПОЛОМ СЛОИСТОМ ЦИЛИНДРЕ ИЗ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ И ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ СЛОЕВ, ПОЛЯРИЗОВАННЫХ В ОСЕВОМ НАПРАВЛЕНИИ

¹Григоренко А. Я., д. ф.-м. н., профессор, ²Лоза И. А., д. ф.-м. н.

¹*Институт механики им. С.П. Тимошенко, НАНУ,
ул. Нестерова, 3, г. Киев, Украина*

²*Национальный транспортный университет,
ул. Суворова, 1, г. Киев, Украина*

ayagrigorenko@yandex.ua, dukeigor@mail.ru

В статье проведен кинематический анализ распространения осесимметричных электроупругих волн в слоистом полом цилиндре с металлическими и пьезокерамическими слоями, поляризованными в осевом направлении при механическом способе возбуждения волн. Боковые поверхности цилиндра свободны от электродов. Внешняя поверхность цилиндра свободна от механических воздействий, а к внутренней поверхности приложено гармонически изменяющееся давление $Pe^{i(kz-\omega t)}$. Для решения данной задачи предложен эффективный численно-аналитический метод. После разделения переменных и представления решения в виде волн, бегущих вдоль цилиндра, начальная задача теории электроупругости в частных производных сводится к неоднородной краевой задаче в обычных дифференциальных уравнениях. Полученная система решается устойчивым методом дискретной ортогонализации. Приведены результаты численного анализа для трехслойного цилиндра с внешними стальными слоями и внутренним – пьезокерамическим, поляризованным в осевом направлении.

Ключевые слова: электроупругие волны, слоистые пьезокерамические цилиндры, кинематический анализ.

ПРО ПОШИРЕННЯ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ ЕЛЕКТРОПРУЖНИХ ХВИЛЬ У ПОРОЖНИСТОМУ ШАРУВАТОМУ ЦИЛІНДРІ З МЕТАЛЕВИХ ТА П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ ШАРІВ, ПОЛЯРИЗОВАНИХ В ОСЬОВОМУ НАПРЯМІ

¹Григоренко О. Я., д. ф.-м. н., професор, ²Лоза І. А., д. ф.-м. н.

¹*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко, НАНУ,
вул. Нестерова, 3, м. Київ, Україна*

²*Національний транспортний університет,
вул. Суворова, 1, м. Київ, Україна*

ayagrigorenko@yandex.ua, dukeigor@mail.ru

У статті проведено кінематичний аналіз поширення вісесиметричних електропружних хвиль у шаруватому порожнистому циліндрі з металевих та п'єзокерамічних шарів, поляризованих в осьовому напрямі при механічному способі збудження хвиль. Бічні поверхні циліндра вільні від електродів. Зовнішня поверхня циліндра вільна від механічних навантажень, а до внутрішньої поверхні прикладений гармонічно змінний тиск $Pe^{i(kz-\omega t)}$. Для розв'язку задачі запропонований ефективний чисельно-аналітичний метод. Після розділення змінних і представлення розв'язку у вигляді хвиль, біжучих вздовж циліндра, початкова задача теорії електропружності в частинних похідних зводиться до неоднорідної крайової задачі в звичайних диференціальних рівняннях. Отримана система розв'язується стійким методом дискретної ортогоналізації. Наведені результати чисельного аналізу для циліндра з зовнішніми сталевими та внутрішнім – п'єзокерамічним, поляризованим в осьовому напрямі.

Ключові слова: електропружні хвилі, шаруваті п'єзокерамічні циліндри, кінематичний аналіз.

ABOUT AXISYMMETRICAL ELASTOELECTRIC WAVES PROPAGATION IN HOLLOW LAYERED CYLINDER WITH METALL AND PIEZOCERAMIC LAYS, POLARIZED IN AXIAL DIRECTION

Grigorenko A. Ya., D.Sc. in Physics and Maths, Professor, Loza I. A., D.Sc. in Physics and Maths

*Institute of Mechanic NANU by name Timoshenko S.P.,
Nesterova str., 3, Kyiv, Ukraine*

*National Transport University,
Suvorov str., 1, Kyiv, Ukraine*

ayagrigorenko@yandex.ua, dukeigor@mail.ru

In this article problem of kinematic analysis of axisymmetric elastoelectric wave's propagation in the hollow circular layered cylinder from metal and piezoceramic lays, polarized in axial direction is considered. The external surface of the cylinder is free of electrodes. External surface are free from any mechanical tractions and to internal surface applied harmonically changes pressure $P e^{i(kz - \omega t)}$. Conditions of perfect contact on interfaces are applied without any discontinuities or slipping. The numerical-analytical method is offered for solving this problem. Resolving vector is suitable to choose in combined type for similar tasks. The components tensor of mechanical stress, vectors of mechanic and dielectric displacement and electrostatic potential are part of resolving vector where through formulate the boundary conditions and conditions on interfaces. The initial problem of theory of electroelasticity in the partial derivatives after expand the stress tensor components displacement vector, electric induction components and electrostatic potential components by progressing wave in axial direction is reduced to the non-homogeneous boundary value problem for the system of ordinary differential equations for the radial coordinate. The problem obtained is solved by stable numerical method of discrete orthogonalisation. There numerical results are presented for kinematic analyzing of the tree-layered cylinder with two steel external lays and one lay – piezoceramic from PZT4, polarized in axial direction. Behavior of wave forms depending on wave-lengths is investigated. Influence of irregularity factor also is investigated. It may be noted that inhomogeneity of material significant influence on character of displacement distribution over the thickness of the shell. Particular sweeping changes are present for second branch. Inhomogeneity give rise to displacement distribution gives into Raleigh wave propagating along external surface in short-wavelengths band. While as displacement distribution gives into Raleigh wave propagating along internal surface in short-wavelengths band for homogeneous cylinder.

Key words: elastoelectric waves, layered piezoceramic cylinders, kinematic analyses.

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматривается осесимметричная задача о распространении вынужденных акустоэлектрических волн в слоистом полом цилиндре с пьезокерамическими и металлическими слоями. Исследованию задачи о распространении упругих волн в круговых цилиндрах посвящено значительное количество работ. Содержание проведенных исследований достаточно полно отражено в обзорах [1, 2 и др.] и монографиях [3, 4 и др.]. Связанные поля значительно усложняют проведение исследований. Так, для пьезокерамического цилиндра только в случае осевой поляризации пьезокерамики для продольных осесимметричных волн и в случае окружной поляризации для крутильных волн возможно представление решения через специальные функции. Учет неоднородности материала цилиндра еще более усложняет задачу, в то время, как в большинстве устройств используются именно неоднородные пьезоэлектрические материалы (биморфы). Наличие поверхности раздела двух сред приводит к необходимости удовлетворять условия сопряжения разрешающих функций на границе раздела сред. Исследования, посвященные этой проблематике, можно найти в работах [5, 6].

В данной статье для решения задачи о распространении вынужденных акустоэлектрических волн в слоистом полом цилиндре с металлическими и пьезокерамическими слоями предложен эффективный численно-аналитический подход. На основании предложенного подхода проведен кинематический анализ распространяющихся вдоль оси цилиндра акустоэлектрических волн. Исследовано также влияние фактора неоднородности на кинематические характеристики распространяющихся волн.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Осесимметричные продольные уравнения движения i -го слоя в цилиндрической системе координат (r, θ, z) имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}^i - \sigma_{\theta\theta}^i}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}^i}{\partial z} &= \rho^i \frac{\partial^2 u_r^i}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^i}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}^i}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}^i}{\partial z} &= \rho^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Уравнения электростатики для i -го слоя:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_r^i}{\partial r} + \frac{D_r^i}{r} + \frac{\partial D_z^i}{\partial z} &= 0; \\ E_r^i &= -\frac{\partial \varphi^i}{\partial r}; \quad E_z^i = -\frac{\partial \varphi^i}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2)$$

Геометрические соотношения для i -го слоя:

$$\varepsilon_{rr}^i = \frac{\partial u_r^i}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta}^i = \frac{u_r^i}{r}; \quad \varepsilon_{zz}^i = \frac{\partial u_z^i}{\partial z}; \quad \varepsilon_{rz}^i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r^i}{\partial z} + \frac{\partial u_z^i}{\partial r} \right), \quad (3)$$

здесь: σ_{ij}^i – компоненты тензора напряжений; ρ^i – плотность материала; ω – круговая частота; u_i^i – компоненты вектора перемещений; D_i^i – компоненты вектора электрической индукции; E_i^i – компоненты вектора напряженности электрического поля; φ^i – электростатический потенциал; ε_{ij}^i – компоненты тензора деформаций.

Физические соотношения для i -го пьезокерамического слоя, поляризованного в радиальном направлении, имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^i &= c_{33}^i \varepsilon_{rr}^i + c_{13}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + c_{13}^i \varepsilon_{zz}^i - e_{33}^i E_r^i; \\ \sigma_{\theta\theta}^i &= c_{13}^i \varepsilon_{rr}^i + c_{11}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + c_{12}^i \varepsilon_{zz}^i - e_{31}^i E_r^i; \\ \sigma_{zz}^i &= c_{13}^i \varepsilon_{rr}^i + c_{12}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + c_{11}^i \varepsilon_{zz}^i - e_{31}^i E_r^i; \\ \sigma_{rz}^i &= 2c_{55}^i \varepsilon_{rz}^i - e_{51}^i E_z^i; \\ D_r^i &= e_{33}^i \varepsilon_{rr}^i + e_{31}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + e_{31}^i \varepsilon_{zz}^i + \varepsilon_{33}^i E_r^i; \\ D_z^i &= 2e_{51}^i \varepsilon_{rz}^i + \varepsilon_{33}^i E_z^i. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь: c_{ij}^i – компоненты тензора модулей упругости; e_{ij}^i – компоненты тензора пьезомодулей; ε_{ij}^i – компоненты тензора диэлектрической проницаемости материала.

Физические соотношения для i -го металлического слоя имеют вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^i &= \frac{(1-\nu^i)E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{rr}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{\theta\theta}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{zz}^i; \\
\sigma_{\theta\theta}^i &= \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{rr}^i + \frac{(1-\nu^i)E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{\theta\theta}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{zz}^i; \\
\sigma_{zz}^i &= \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{rr}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{\theta\theta}^i + \frac{(1-\nu^i)E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{zz}^i; \\
\sigma_{rz}^i &= 2 \frac{E^i}{2(1+\nu^i)} \varepsilon_{rz}^i.
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга. В дальнейшем индекс i будем опускать.

Граничные условия на боковых поверхностях цилиндра (при $r = R_0 \pm h$) задаются следующие.

Поверхности неэлектродированы: $D_r|_{r=R_0 \pm h} = 0$. Внешняя поверхность цилиндра свободна от внешних усилий: $\sigma_{rr}|_{r=R_0+h} = \sigma_{rz}|_{r=R_0+h} = 0$, к внутренней поверхности приложено гармонически изменяющееся давление: $\sigma_{rr}|_{r=R_0-h} = P e^{i(kz-\omega t)}$; $\sigma_{rz}|_{r=R_0-h} = 0$.

Тут: R_0 – радиус срединной поверхности цилиндра; h – половина толщины цилиндра.

Разрешающий вектор выбираем смешанного типа:

$$\mathbf{R} = \{\sigma_{rr}, \sigma_{rz}, \varphi, u_r, u_z, D_r\}^T. \tag{6}$$

Разрешая систему (1)-(4) относительно разрешающего вектора, после ряда преобразований, получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\Delta_2}{\Delta} - 1 \right) \sigma_{rr} - \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \left(\frac{\Delta_3}{r^2 \Delta} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_r - \frac{\Delta_4}{r \Delta} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\Delta_1}{r \Delta} D_r; \\
\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} &= \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} - \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\Delta_5}{r \Delta} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \left(\frac{\Delta_6}{\Delta} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_z - \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{\partial D_r}{\partial z}; \\
\frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \frac{e_{33}}{\Delta} \sigma_{rr} + \frac{\Delta_1}{r \Delta} u_r + \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{c_{33}}{\Delta} D_r; \\
\frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{e_{33}}{\Delta} \sigma_{rr} - \frac{\Delta_2}{r \Delta} u_r - \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{e_{33}}{\Delta} D_r; \\
\frac{\partial u_z}{\partial r} &= \frac{1}{c_{55}} \sigma_{rz} - \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{e_{51}}{r c_{55}} \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \\
\frac{\partial D_r}{\partial r} &= -\frac{e_{51}}{c_{55}} \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\Delta_7}{c_{55}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} D_r.
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь введены обозначения: $\Delta = c_{33}\epsilon_{33} + e_{33}^2$; $\Delta_1 = c_{33}e_{13} - c_{13}e_{33}$; $\Delta_2 = c_{13}\epsilon_{33} + e_{13}e_{33}$; $\Delta_3 = (c_{13} - c_{33})\Delta_2 + (e_{33} - e_{13})\Delta_1 + (c_{13} - c_{11})\Delta$; $\Delta_4 = (c_{13} - c_{33})\Delta_2 + (e_{33} - e_{13})\Delta_1 + (c_{13} - c_{12})\Delta$; $\Delta_5 = c_{12}\Delta + e_{13}\Delta_1 - c_{13}\Delta_2$; $\Delta_6 = c_{11}\Delta + e_{13}\Delta_1 - c_{13}\Delta_2$; $\Delta_7 = c_{55}\epsilon_{11} + e_{15}^2$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Решение задачи будем искать в виде волн, бегущих в осевом направлении:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r, z, t) &= \lambda \sigma_{rr}(r) e^{i(kz - \omega t)}; \quad \sigma_{rz}(r, z, t) = i\lambda \sigma_{rz}(r) e^{i(kz - \omega t)}; \\ \varphi(r, z, t) &= h \sqrt{\frac{\lambda}{\epsilon_0}} \varphi(r) e^{i(kz - \omega t)}; \quad u_r(r, z, t) = hu_r(r) e^{i(kz - \omega t)}; \\ u_z(r, z, t) &= hu_z(r) e^{i(kz - \omega t)}; \quad D_r(r, z, t) = \sqrt{\epsilon_0 \lambda} D_r(r) e^{i(kz - \omega t)}.\end{aligned}\quad (8)$$

Используя представление (8), исходную двумерную задачу теории электроупругости в частных производных (7), можно свести к краевой задаче в обыкновенных дифференциальных уравнениях.

$$\frac{d\mathbf{R}}{dx} = A(x, \Omega)\mathbf{R}. \quad (9)$$

С граничными условиями:

$$\mathbf{B}_1\mathbf{R}(-1) = \mathbf{C}_1, \mathbf{B}_2\mathbf{R}(1) = \mathbf{C}_2. \quad (10)$$

Здесь вектор $\mathbf{C}_1^T = \{P, 0, 0, 0, 0, 0\}$, вектор $\mathbf{C}_2^T = \{0, 0, 0, 0, 0, 0\}$

Здесь введены безразмерные величины:

$$\Omega = \omega h \sqrt{\frac{\rho_0}{\lambda}}; \quad \tilde{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{\lambda}; \quad \tilde{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{\epsilon_0 \lambda}}; \quad \tilde{\epsilon}_{ij} = \frac{\epsilon_{ij}}{\epsilon_0}; \quad x = \frac{r - R_0}{h}.$$

ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума; $\lambda = 10^{10} \frac{H}{M^2}$; $\rho_0 = 1 \frac{\hat{e}\tilde{a}}{i^3}$.

Решение задачи (9), (10) было выполнено устойчивым методом дискретной ортогонализации.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Ниже приведены результаты численного анализа задачи (9), (10). Для определения влияния неоднородности на характер распределения перемещений, для начала проведем кинематический анализ распространения акустоэлектрических волн в однородном цилиндре с такой же геометрией целиком из пьезокерамики PZT 4. На рис. 1 представлены фазовые скорости для первых пяти волн. На рисунке используются обозначения для волн, принятые в работе [10]. Маркировка $SW(0)$ означает, что волна рождается ($k=0$) как симметричные продольные колебания (волны расширения-сжатия), $AU(0)$ – антисимметричные (изгибные) радиальные колебания. Как видно из приведенного рисунка, первые две ветки $SW(0)$ и $AU(0)$ в коротковолновом диапазоне выходят на одну скорость и распространяются практически без дисперсии. Две последующие $AW(1)$ и $SW(1)$ также выходят на одну скорость, но с большим значением. На рис. 2 представлено распределение амплитуд перемещений по толщине в первой волне $SW(0)$ для различных значений длин волн. Сплошной линией обозначены амплитуды радиальных перемещений u_r , штриховой – продольных u_z . Жирными линиями выделено распределение амплитуд перемещений в

коротковолновой области. В случае длинных волн распределение амплитуд перемещений происходит практически по линейному закону.

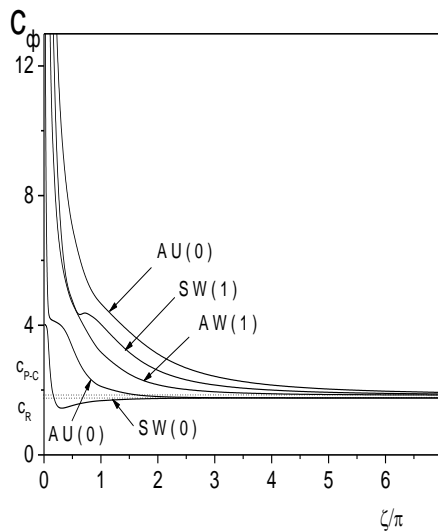


Рис. 1

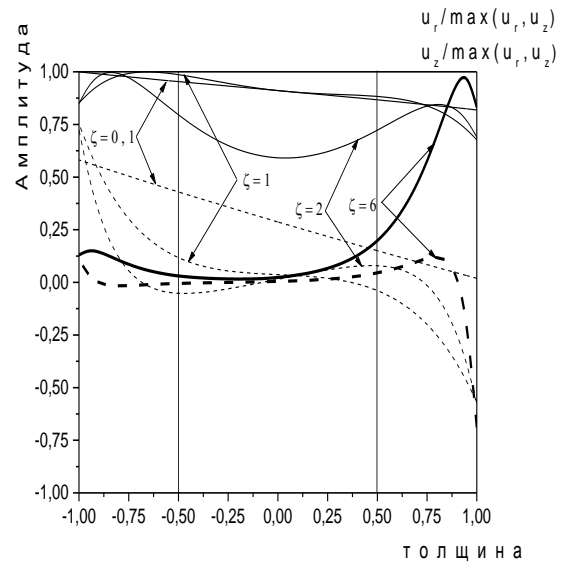


Рис. 2

С уменьшением длины волны, перемещения сосредотачиваются возле внешней боковой поверхности. Распределение перемещений в этом случае происходит по типу волн Рэлея.

На рис. 3 представлено распределение амплитуд перемещений по толщине во второй волне $AU(0)$. Также можно отметить, что для случая длинных волн распределение амплитуд перемещений по толщине носит линейный характер. С уменьшением длины волны, перемещения также сосредотачиваются на боковой поверхности цилиндра, но уже на внутренней поверхности. Распределение перемещений в этом случае также происходит по типу волн Рэлея.

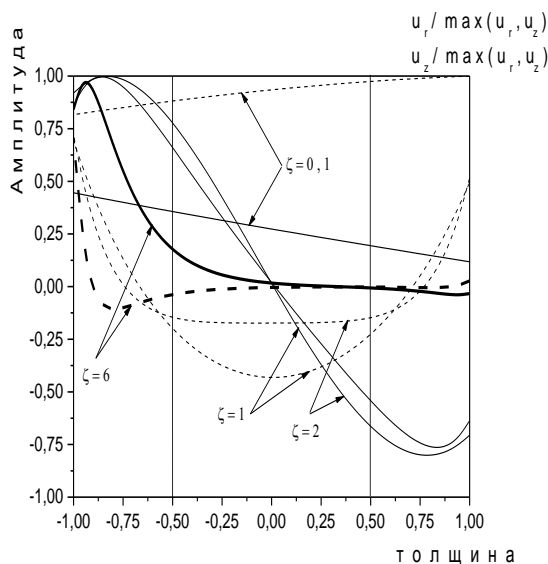


Рис. 3

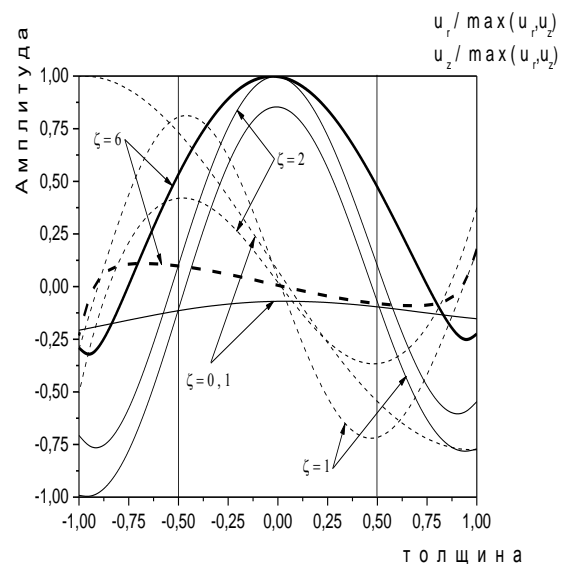


Рис. 4

На рис. 4 представлено распределение амплитуд перемещений по толщине в третьей волне $SW(1)$. В этом случае, даже для случая длинных волн, распределение амплитуд перемещений по толщине не носит линейный характер. С уменьшением длины волны, распределение продольных перемещений почти симметрично относительно срединной поверхности цилиндра, распределение продольных перемещений сдвига – антисимметрично.

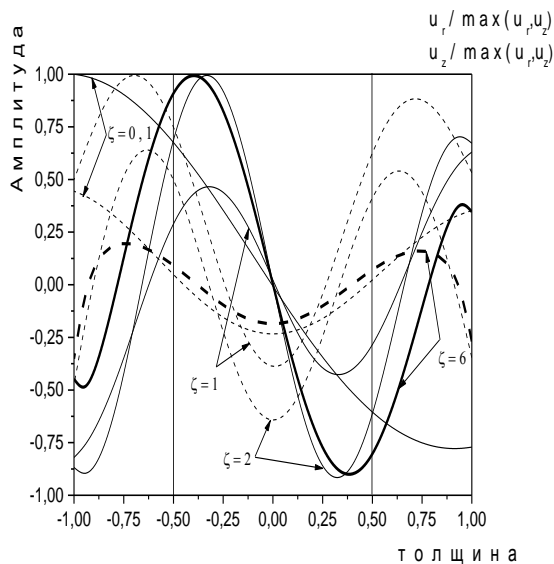


Рис. 5

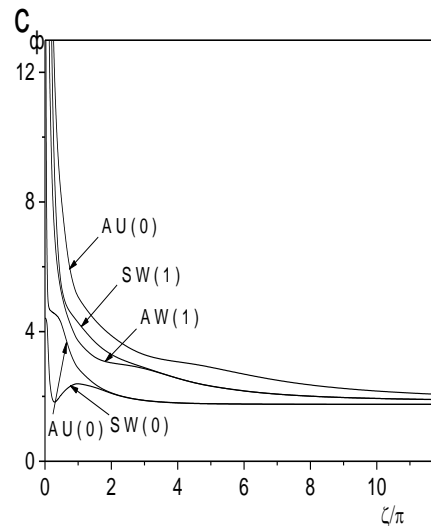


Рис. 6

На рис. 5 представлено распределение амплитуд перемещений по толщине в четвертой волне $SW(1)$. В этом случае, даже для случая длинных волн, распределение амплитуд перемещений по толщине не носит линейный характер. С уменьшением длины волны, распределение продольных перемещений почти антисимметрично относительно срединной поверхности цилиндра, распределение продольных перемещений сдвига – симметрично. Наблюдается увеличение числа полуволн на единицу по сравнению с предыдущей ветвью.

Рассмотрим трехслойный цилиндр, два внешних слоя которого являются пьезокерамическими из пьезокерамики PZT 4, а средний слой – стальной ($\nu = 0,28$; $E = 21$), параметр кривизны принят $\varepsilon = 0,25$. Толщина внешних слоев равна h , толщина среднего слоя равна $2h$. На рис. 6 представлены фазовые скорости для первых пяти волн. Как видно из приведенного рисунка в коротко волновом диапазоне происходит попарное сближение соседних ветвей.

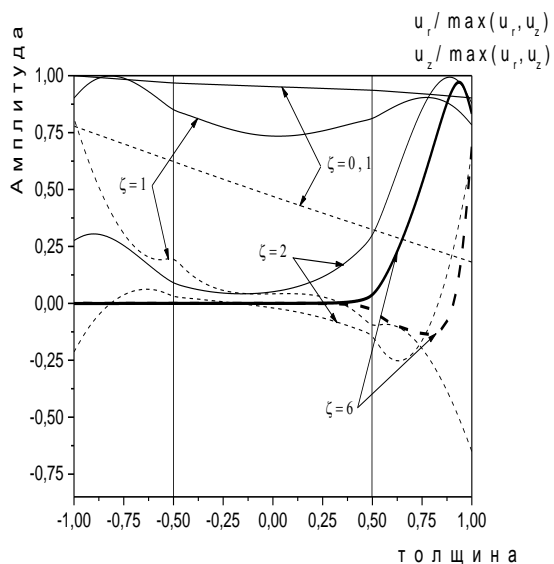


Рис. 7

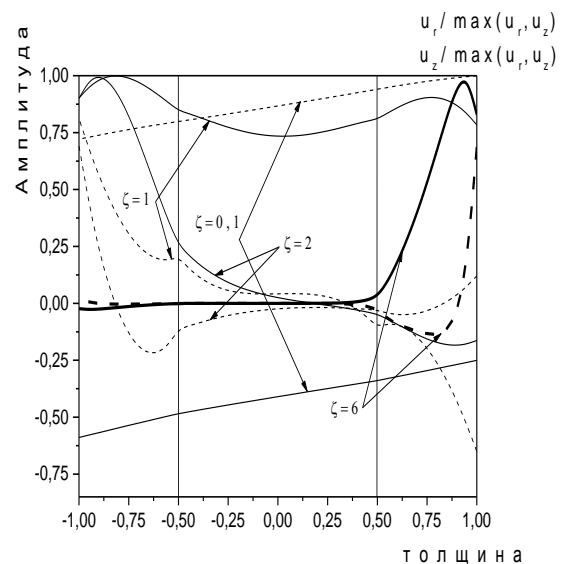


Рис. 8

Дальнейший кинематический анализ также показывает попарное подобие в характере распределения перемещений по толщине. Так на рис. 7-8 видим подобие в характере распределения перемещений. В коротко волновом диапазоне для обеих ветвей видим выход

на картину, характерную для волн рэлеевского типа, сосредоточенных вдоль внешней границы цилиндра.

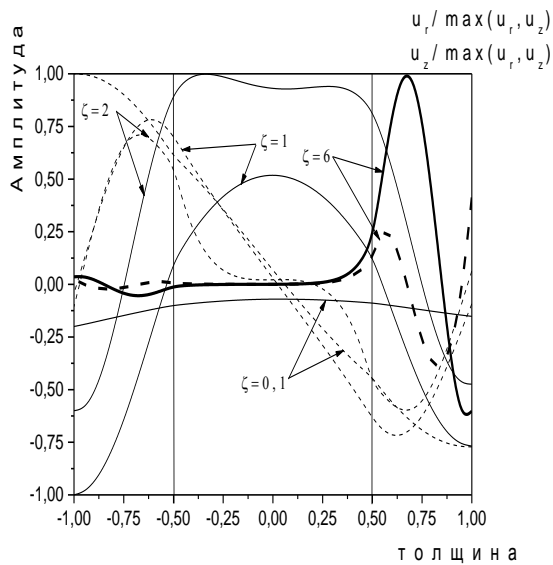


Рис. 9

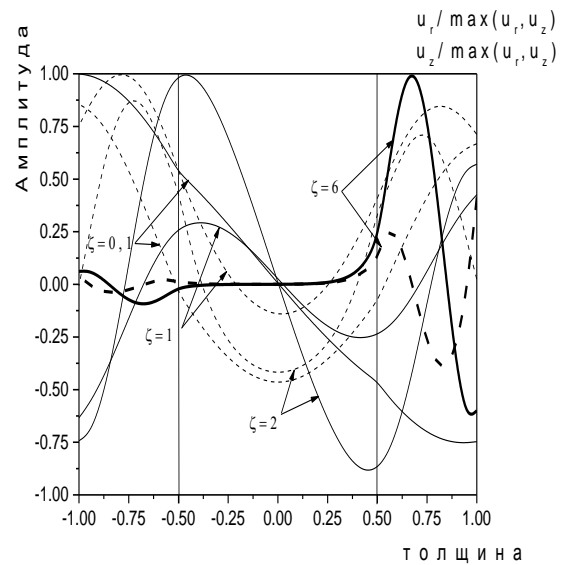


Рис. 10

На рис. 9-10 представлено распределение перемещений по толщине для ветвей $AW(1)$ и $SW(1)$. Как видно из приведенных рисунков в коротковолновой области перемещения в обоих случаях сосредотачиваются в более мягком внешнем пьезокерамическом слое. Стальной слой при этом остается практически недеформированным.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Неоднородность материала существенно влияет на характер распределения перемещений по толщине. Так же, как и в случае однородного материала цилиндра, первая ветвь для неоднородного цилиндра в коротковолновом диапазоне выходит на поверхностную волну рэлеевского типа, распространяющуюся вдоль внешней поверхности цилиндра. Вторая же ветвь для неоднородного цилиндра выходит на поверхностную волну рэлеевского типа, распространяющуюся вдоль внешней поверхности цилиндра. Для более высоких ветвей также наблюдаются существенные отличия в характере распределения амплитуд перемещений. В случае однородного материала, с уменьшением длины волны, амплитуды перемещений распределяются либо симметрично относительно срединной поверхности цилиндра, либо антисимметрично. Для более высокой ветви наблюдается увеличение числа полуволн. В случае же неоднородного материала, с уменьшением длины волны, можно отметить попарное подобие характера распределения перемещений. Причем наблюдается нарушение симметрии в распределении перемещений. Перемещения сосредотачиваются в более мягком внешнем пьезокерамическом слое, в то время, как более жесткий стальной слой остается практически не деформированным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Физическая акустика / Под редакцией У. Мэзона. Р. Терстона. – М. : Мир, 1966. – Т. 1-Т. 7. – 663 с.
2. Thurston R. N. Elastic waves in rods and clad rods / R.N. Thurston // J. Acoust. Soc. Am. – 1978. – **64**, N 1. – P. 1-37.
3. Гринченко В. Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – К. : Наук. думка, 1981. – 283 с.
4. Кольский Г. Волны напряжений в твердых телах / Г. Кольский. – М. : ИЛ, 1955. – 192 с.

5. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга; Отв. ред. А.Н. Гузь ; АН УССР Ин-т механики. – К. : Наук. думка, 1989. – 280 с.
6. Шульга Н. А. Распространение гармонических волн в анизотропных пьезоэлектрических цилиндрах, волноводы с усложненными свойствами / Н.А. Шульга // В Кн. : Успехи механики в 6-ти томах. – 2007. – С. 681-702.
7. Birman V. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures / V. Birman, L.W. Byrd // *ASME Appl. Mech. Rew.* – 2007. – **195**. – P. 195-216.
8. Chih-Ping Wu. Exact solutions of functionally graded piezoelectric material sandwich cylinders by a modified Pagano method / Chih-Ping Wu, Tsu-Chieh Tsai // *Applied Mathematical Modelling*, May 2012. – Volume 36, Issue 5. – P. 1910-1930.
9. Grigorenko A. Nonaxisymmetric vibrations of radially polarized hollow cylinders made of functionally gradient piezoelectric materials / A. Grigorenko, W.H. Müller, R. Wille, I. Loza // *Continuum Mech. Thermodyn.* – 2012. – **24**(4-6). – P. 515-524.
10. Григоренко А. Я. Осесимметричные волны в слоистых полых цилиндрах с пьезокерамическими слоями поляризованными в осевом направлении / А.Я. Григоренко, И.А. Лоза // *Прикл. механика.* – 2011. – Т. 47, № 6. – С. 118-124.

REFERENCE

1. (1966), *Phisicheskaya akustika* [Physical Acoustics], Edited by W. Meson, vol. 1-7, Mir, Moskow.
2. Thurston, R.N. (1978), “Elastic waves in rods and clad rods”, *J. Acoust. Soc. Am.*, **64**, no. 1, pp. 1-37.
3. Grinchenko, V.T. and Meleshko, V.V. (1981), *Garmonicheskkiye kolebaniya i volny v uprugikh telakh* [Harmonic vibrations and waves in elastic bodies], Nauk. dumka, Kiev.
4. Kolsky, G. (1955), *Volni napryazheniy v tverdikh telakh* [Waves of tensions are in solids], IL, Moskow.
5. Grinchenko, V.T., Ulitko, A.F., Shulga, N.A. (1989), *Mekhanika svyazannikh poley v elementakh konstrukciy. Vol. 5. Elektrouprugost* [Mechanics of the constrained fields is in the elements of constructions. T. 5. Electro-resiliency], Отв. ред. А.Н. Гузь, Nauk. Dumka, Kiev.
6. Shulga, N.A. (2007), *Rasprostraneniye garmonicheskikh voln v anisotropnikh p'ezoelektricheskikh cilindrah s uslozhnennimi svoystvami* [Distribution of harmonic waves is in anisotropic piezoelectric cylinders, waveguides with the complicated properties], *Uspekhi mekhaniki*, pp. 681-702.
7. Birman, V., and Byrd, L.W. (2007), “Modeling and analysis of functionally graded materials and structures”, *ASME Appl. Mech. Rew.*, **195**, pp. 195-216.
8. Chih-Ping, Wu and Tsu-Chieh, Tsai (2012), “Exact solutions of functionally graded piezoelectric material sandwich cylinders by a modified Pagano method”, *Applied Mathematical Modelling*, vol. 36, issue 5, pp. 1910-1930.
9. Grigorenko, A., Müller, W.H., Wille, R. and Loza, I. (2012), “Nonaxisymmetric vibrations of radially polarized hollow cylinders made of functionally gradient piezoelectric materials”, *Continuum Mech. Thermodyn.*, **24**(4-6), pp. 515-524.
10. Grigorenko, A.Ya. and Loza, I.A. (2011), “Axisymmetrical waves in the stratified hollow cylinders with piezoceramic layers polarized in axial direction”, *Prikladn. Mekhanika*, vol. 47, no. 6, pp. 118-124.