3. Karasev A. G. Deformation and buckling of elastic shallow conical shells with different boundary conditions / A.G. Karasev, M.A. Varianichko, G.G. Karasev // Stability of Structures. – Zakopane. – 2012. – Vol. 13. – P. 315-320.

REFERENCES

1. ANSYS Inc. Academic Research, Release 13.0, Help System, Mechanical Analysis Guide.

2. Karasev, A.G. and Varianichko, M.A. (2011), "Analysis of deformations and stability of elastic flat closed conical shells with initial imprefections under exernal pressure", *Theoretical Foundation of Civil Engineering*, WP, Warsaw, vol. 19, pp. 99-104.

3. Karasev, A.G., Varianichko, M.A. and Karasev, G.G. (2012), "Deformation and buckling of elastic shallow conical shells with different boundary conditions", *Stability of Structures*, Zakopane, vol. 13, pp. 315-320.

УДК 539.3

ХАРАКТЕРИСТИКИ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА С ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫМИ ВЯЗКОУПРУГИМИ МАТРИЦЕЙ И ВОЛОКНОМ

Клименко М. И., к. ф.-м. н., доцент, Гребенюк С. Н., к. т. н., доцент,
Богуславская А. М., аспирант

Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина

gsm1212@ukr.net

В работе предлагается методика определения эффективных вязкоупругих характеристик однонаправленного композиционного материала. Композит, состоящий из трансверсально-изотропных матрицы и волокна, которые отличаются своими реологическими характеристиками, моделируется сплошным однородным трансверсально-изотропным материалом. Применение предложенной методики позволяет получить упругие характеристики композита в виде функций упругих характеристик его составляющих и относительной частоты армирования композита.

Ключевые слова: композиционный материал, матрица, волокна, эффективный модуль упругости, условия согласования.

ХАРАКТЕРИСТИКИ КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ З ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИМИ В'ЯЗКОПРУЖНИМИ МАТРИЦЕЮ ТА ВОЛОКНОМ

Клименко М. І., к. ф.-м. н., доцент, Гребенюк С. М., к. т. н., доцент,
Богуславська А. М., аспірант

Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна

gsm1212@ukr.net

У роботі пропонується методика визначення ефективних в'язкопружних характеристик однонапрямного композиційного матеріалу. Композит, що складається з трансверсально-ізотропних матриці та волокна, які відрізняються за своїми реологічними характеристиками, моделюється суцільним однорідним трансверсально-ізотропним матеріалом. Застосування пропонованої методики дозволяє отримати пружні характеристики композита у вигляді функцій пружних характеристик його складових та відносної частоти армування композита.

Ключові слова: композиційний матеріал, матриця, волокно, ефективний модуль пружності, умови узгодженості.

VISCOELASTIC BEHAVIOROF THE COMPOSITE WITH TRANSVERSELY ISOTROPIC MATRIX AND FIBERS

Klymenko M. I., PhD in Math and Physics, Associate Professor,
Grebeniuk S. M., PhD in Engineering, Associate Professor,
Boguslavskaya A. M., postgraduate student

Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine

gsm1212@ukr.net

The paper proposes a parametrization procedure methodology of the integral operator modulus of rupture of the first kind for the composite. Composite is represented by viscoelastic transversely isotropic material. Is considered it an axisymmetric transverse tension. To solve the problem of consistency conditions apply to the deformation of the composite and its components. The composite consists of a transversely isotropic viscoelastic matrix and fiber. The proposed methodology allows to determine the viscoelastic properties of the composite through the relevant characteristics of the matrix and fiber and their volume fraction in the composite.

Rheological characteristics of the matrix fiber determined by relations of the Boltzmann-Volterra hereditary theory. Hexagonal cell of the composite material can be approximated by a solid and hollow cylinders (fiber and matrix, respectively). It is considered an axisymmetric stress-strain state of the cell. On the outer cylindrical surface of the matrix acts axially symmetric radial load. It defines the nature of the deformation cell. It is assumed that radial stress and interface stress of the matrix and the fiber are continuous, axial displacement of the matrix and the fiber are identical. The presence in the model of integral equations of convolution type allows to apply Laplace transformation. It allows to obtain a system of linear algebraic equations for images functions of time. These functions determine the components of the stress-strain state of the fiber and the matrix. Also, communication is established between images of radial stress in the composite outer cylindrical surface and the axial stresses of the matrix and the fiber.

A similar problem is solved in the image space for a homogeneous transversely isotropic viscoelastic composite. Consistency conditions for these problems on a transverse tension of homogeneous transversely isotropic composite and the joint transverse tension of the fiber and the matrix is equal to an arbitrary axial displacement, axial coordinate and equal radial displacements on the outer surface of the composite in both cases. Also must coincide the conditions of equilibrium for both problems. Applying these conditions enables to determine the relationship between the rheological properties of the composite and its components, taking into account the volume fraction of the fiber in the composite.

Key words: composite, matrix, fiber, transverse tension, modulus of rupture, consistency condition.

ВВЕДЕНИЕ

В задачах механики композиционных материалов широко применяется представление композита в виде сплошной однородной среды с упругими постоянными, адекватно отображающими наиболее существенные механические характеристики материала. Эти постоянные, называемые эффективными, определяются как коэффициенты, связывающие усредненные по объему компоненты тензоров напряжений и деформаций при определенных краевых условиях [1]. Определение этих постоянных для трансверсально-упругих матрицы и волокна исследуется в [2], где для осесимметричного деформирования композита построены зависимости его эффективных упругих постоянных от объемного содержания волокна в композите и упругих констант его составляющих.

Наличие вязкоупругих свойств у значительного количества композиционных материалов определяет актуальность задач определения механических реологических характеристик таких композитов по известным характеристикам их составляющих. Этим задачам посвящено значительное количество исследований. В частности, проблемы прогнозирования реологических свойств композитов с вязкоупругими характеристиками рассмотрены в работах [3-6]. Механические характеристики композитов при продольном деформировании рассмотрены в [3]. В исследованиях [3, 5, 6] рассмотрен случай продольной деформации композита с вязкоупругой изотропной матрицей. В [7] предлагается подход к численному определению эффективных термовязкоупругих характеристик однонаправленных полимерных композитов на основе применения метода квазиконстантных операторов с частичными аппроксимациями. Задача определения характеристик вязкоупругого деформирования композитов с применением наследственной теории вязкоупругости Больцмана-Вольтерра рассмотрена в [8]. Для решения этой задачи предлагается методика, основанная на аппроксимации функции деформирования цепной дробью и применении метода операторных цепных дробей.

Целью данного исследования является определение параметров интегрального оператора, описывающего эффективный модуль упругости первого рода для вязкоупругого трансверсально-изотропного композита, состоящего из трансверсально-изотропных вязкоупругих матрицы и волокна. Для достижения поставленной цели в работе используются кинематические условия согласования деформирования матрицы, волокна и моделирующего материала.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОБЩАЯ СХЕМА ЕЕ РЕШЕНИЯ

В работе рассматривается задача определения вязкоупругих характеристик композитного материала по известным характеристикам его составляющих. Объектом исследования является однонаправленный композит с гексагональным расположением волокон. При этом предполагается, что входящие в его состав матрица и волокно состоят из трансверсально-изотропного вязкоупругого материала.

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние ячейки композита, находящейся под действием осесимметричной растягивающей нагрузки. Введем цилиндрическую систему координат $\left(r,\theta,z\right)$, где ось Oz совпадает с направлением армирования композита волокном. Матрица моделируется полым цилиндром $a\le r\le b$, волокно – сплошным цилиндром $0\le r\le a$. Предполагается, что радиальные перемещения и напряжения на границе контакта матрицы и волокна $r=a$ являются непрерывными, а осевые перемещения матрицы и волокна совпадают.

Для достижения цели исследования предлагается решить две задачи. Одна из них предполагает определение компонент напряженно-деформированного состояния волокна и матрицы при их совместном поперечном растяжении. Далее решаем аналогичную задачу для однородного трансверсально-изотропного вязкоупругого материала, моделирующего композит. В рассматриваемых задачах предполагается выполнение кинематических условий согласованности для перемещений. Эти условия представляют собой равенство осевых перемещений для произвольной осевой координаты и равенство радиальных перемещений на наружной поверхности композита. Для обеих задач также должны совпадать условия равновесия по осевым напряжениям. Применение этих условий позволяет определить зависимость между реологическими характеристиками композита и его составляющих с учетом объемной доли волокна в композиционном материале.

Далее будем использовать символ * для компонент напряжения, перемещений и деформаций матрицы, символ $^\circ$ – для волокна.

Для того, чтобы смоделировать поперечное осесимметричное растяжение матрицы и волокна, определяем краевые условия:

$$\sigma_r^*\left(r=b\right)=\sigma_0, \tag{1}$$

$$\sigma_r^\circ\left(r=a\right)=\sigma_r^*\left(r=a\right),\quad u_r^\circ\left(r=a\right)=u_r^*\left(r=a\right),\quad u_z^\circ\left(z=h\right)=u_z^*\left(z=h\right). \tag{2}$$

Здесь $\sigma_r\left(r,t\right)$ – нормальное радиальное напряжение, $u_r\left(r,t\right)$ и $u_z\left(r,z,t\right)$ – соответственно радиальное и осевое перемещения.

СОВМЕСТНОЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ПОПЕРЕЧНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ МАТРИЦЫ И ВОЛОКНА

Рассмотрим совместное осесимметричное поперечное растяжение матрицы и волокна. Пусть к наружной поверхности матрицы ($r=b$) приложена нормальная растягивающая нагрузка. Для осесимметричного напряженно-деформированного состояния цилиндров, моделирующих матрицу и волокно, имеем уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0. \qquad (3)$$

Остальные уравнения равновесия выполняются тождественно. Используя закон Гука и соотношения Коши, из (1) получаем дифференциальное уравнение относительно радиальных перемещений u_r:

$$\frac{d^2u_r}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du_r}{dr}-\frac{u_r}{r^2}=0.$$

Его общее решение имеет вид:

$$u_r(r,t)=A(t)r+\frac{B(t)}{r}. \qquad (4)$$

Реологические свойства матрицы и волокна, согласно наследственной теории Больцмана – Вольтерра, описываются при помощи линейного интегрального оператора вида

$$\bar{E}\left[\varepsilon(t)\right]=E\cdot\left(\varepsilon(t)-\int_0^t R(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau\right),$$

где $E=\mathrm{const}$ – мгновенный модуль упругости, $R(t)$ – ядро релаксации для рассматриваемого вязкоупругого материала.

Радиальное перемещение для волокна должно быть ограниченным при $r=0$, поэтому выражение (4) для него принимает вид:

$$u_r^{\circ}(r,t)=C(t)r. \qquad (5)$$

Пусть $\sigma_0^*(t)$ и $\sigma_0^{\circ}(t)$ – осевые напряжения для матрицы и волокна, не зависящие от пространственных координат. Используя закон Гука в прямой и обратной формах, а также (4), получим выражения для следующих компонент напряженно-деформированного состояния волокна:

$$u_z^{\circ}(z,t)=\frac{1}{1-\nu_{23}^{\circ}}\left(\left(1-\nu_{23}^{\circ}-2\nu_{12}^{\circ}\nu_{21}^{\circ}\right)\cdot\left(\bar{E}_1^{\circ}\right)^{-1}\left[\sigma_0^{\circ}(t)\right]-2C(t)\nu_{21}^{\circ}\right)z, \qquad (6)$$

$$\sigma_r^{\circ}(r,t)=\frac{\nu_{21}^{\circ}}{1-\nu_{23}^{\circ}}\cdot\left(\sigma_0^{\circ}(t)+\frac{\bar{E}_1^{\circ}\left[C(t)\right]}{\nu_{12}^{\circ}}\right). \qquad (7)$$

Для матрицы аналогичные соотношения имеют вид:

$$u_r^*(r,t)=A(t)\cdot r+\frac{B(t)}{r}, \qquad (8)$$

$$u_z^*(z,t)=\frac{1}{1-\nu_{23}^*}\left(\left(1-\nu_{23}^*-2\nu_{12}^*\nu_{21}^*\right)\cdot\left(\bar{E}_1^*\right)^{-1}\left[\sigma_0^*(t)\right]-2A(t)\nu_{21}^*\right)z, \qquad (9)$$

$$\sigma_r^*(r,t)=\frac{\nu_{21}^*}{1-\nu_{23}^*}\cdot\left(\sigma_0^*(t)+\frac{\bar{E}_1^*\left[A(t)\right]}{\nu_{12}^*}\right)-\frac{\nu_{21}^*\cdot\bar{E}_1^*\left[B(t)\right]}{\nu_{12}^*\cdot\left(1+\nu_{23}^*\right)r^2}. \qquad (10)$$

Используя краевые условия (1), (2), получим систему уравнений относительно функций $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$. Равенство $u_r^{\circ}(r=a)=u_r^*(r=a)$ позволяет исключить функцию $C(t)$:

$$C(t)=A(t)+\frac{B(t)}{a^2}. \qquad (11)$$

Наличие в получающейся системе относительно $A(t)$ и $B(t)$ линейных интегральных операторов, содержащих свертки, позволяет применить к ней преобразование Лапласа по времени. Обозначим изображения $\sigma_0(t)$, $\sigma_0^*(t)$, $\sigma_0^\circ(t)$, $A(t)$, $B(t)$ соответственно $\varphi(p)$, $\varphi_1(p)$, $\varphi_2(p)$, $\tilde{A}(p)$, $\tilde{B}(p)$, где p – параметр преобразования Лапласа. $\tilde{R}^\circ(p)$ и $\tilde{R}^*(p)$ – изображения ядер релаксации для волокна и матрицы. Введем также обозначения:

$$\alpha_1=\frac{\nu_{21}}{1-\nu_{23}},\quad \alpha_2=\frac{\alpha_1}{\nu_{12}},\quad \alpha_3=\frac{\nu_{21}}{\nu_{12}\left(1+\nu_{23}\right)},\quad \alpha_4=\frac{1-\nu_{23}-2\nu_{12}\nu 21}{1-\nu_{23}},\quad x=E_1\left(1-\tilde{R}(p)\right).$$

После применения преобразования Лапласа получим систему относительно неизвестных $\tilde{A}(p)$, $\tilde{B}(p)$, а также $\varphi_1(p)$, $\varphi_2(p)$, $\varphi(p)$:

$$\begin{gathered}\alpha_1^* b^2\varphi_1(p)+\alpha_2^* x^* b^2\tilde{A}(p)-\alpha_3^* x^*\tilde{B}(p)=b^2\varphi(p),\\ a^2\left(\alpha_2^\circ x^\circ-\alpha_2^* x^*\right)\tilde{A}(p)+\left(\alpha_2^\circ x^\circ+\alpha_3^* x^*\right)\tilde{B}(p)=a^2\left(\alpha_1^*\varphi_1(p)-\alpha_1^\circ\varphi_2(p)\right),\\ 2\left(\alpha_1^*-\alpha_1^\circ x^\circ\right)a^2\tilde{A}(p)-2\alpha_1^\circ x^\circ\tilde{B}(p)=a^2\left(\frac{\alpha_4^*\varphi_1(p)}{x^*}-\frac{\alpha_4^\circ\varphi_2(p)}{x^\circ}\right).\end{gathered}\tag{12}$$

Из этой системы находим:

$$\tilde{A}(p)=d_1\varphi_1(p)+d_2\varphi_2(p),\quad \tilde{B}(p)=a^2\left(d_3\varphi_1(p)+d_4\varphi_2(p)\right).\tag{13}$$

Здесь использованы обозначения:

$$d_1=\frac{-2\alpha_1^*\alpha_1^\circ\left(x^\circ\right)^2x^*-\alpha_4^* x^\circ\left(\alpha_2^\circ x^\circ+\alpha_3^* x^*\right)}{d},\quad d_2=\frac{2\left(\alpha_1^\circ\right)^2\left(x^\circ\right)^2x^*+\alpha_4^\circ x^*\left(\alpha_2^\circ x^\circ+\alpha_3^* x^*\right)}{d},$$

$$d_3=\frac{\alpha_4^* x^\circ\left(\alpha_2^\circ x^\circ-\alpha_2^* x^*\right)-2\alpha_1^* x^* x^\circ\left(\alpha_1^*-\alpha_1^\circ x^\circ\right)}{d},\quad d_4=\frac{-\alpha_4^\circ x^*\left(\alpha_2^\circ x^\circ-\alpha_2^* x^*\right)+2\alpha_1^\circ x^\circ x^*\left(\alpha_1^*-\alpha_1^\circ x^\circ\right)}{d},$$

$$d=-2x^* x^\circ\left(\alpha_1^\circ x^\circ(\alpha_2^\circ x^\circ-\alpha_2^* x^*)+\left(\alpha_1^*-\alpha_1^\circ x^\circ\right)\left(\alpha_2^\circ x^\circ+\alpha_3^* x^*\right)\right).$$

Подставив (13) в первое из уравнений системы (12), получим соотношение, связывающее между собой изображения $\varphi_1(p)$, $\varphi_2(p)$ и $\varphi(p)$:

$$\left(\alpha_1^*+\alpha_2^* x^* d_1-\alpha_3^* x^* f d_3\right)\varphi_1+\left(\alpha_2^* x^* d_2-\alpha_3^* x^* d_4 f\right)\varphi_2=\varphi.\tag{14}$$

Здесь $f=\dfrac{a^2}{b^2}$ – объемная доля волокна в композите.

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ОДНОРОДНОГО КОМПОЗИТА И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЕГО ЭФФЕКТИВНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Для однородного трансверсально-изотропного вязкоупругого материала, моделирующего композит, напряжение σ_z, а также все касательные напряжения равны нулю. Согласно (4), учитывая ограниченность радиального перемещения $u_r(r,t)$ при $r=0$, получаем выражение для него в виде:

$$u_r(r,t)=D(t)r.\tag{15}$$

Используя (15) и основные соотношения теории упругости для трансверсально-изотропного материала, получим выражение для осевого перемещения в виде:

$$u_z\left(r,z,t\right)=-\frac{2D\left(t\right)\nu_{21}z}{1+\nu_{23}}. \qquad (16)$$

С учетом граничного условия (1) нормальное напряжение $\sigma_r\left(t\right)$ для рассматриваемого материала можно записать в следующей форме:

$$\sigma_r\left(t\right)=\frac{\nu_{21}\bar{E}_1\left[D\left(t\right)\right]}{\nu_{12}\left(1-\nu_{23}\right)}=\sigma_0\left(t\right). \qquad (17)$$

Учитывая (17), получаем выражения для радиальной и осевой деформаций:

$$\varepsilon_r=\frac{\left(1-\nu_{23}\right)\nu_{12}}{\nu_{21}}\cdot\bar{E}_1^{-1}\left[\sigma_0\left(t\right)\right],$$

$$\varepsilon_z=-2\nu_{12}\cdot\bar{E}_1^{-1}\left[\sigma_0\left(t\right)\right],$$

где $\bar{E}_1$ – линейный интегральный оператор, описывающий вязкоупругие свойства композита с мгновенным модулем упругости E_1 и ядром релаксации $R\left(t\right)$.

Из выражения для осевой деформации с учетом равенства нулю при $z=0$ осевого перемещения $u_z(r,z,t)$, получим выражение для него:

$$u_z(r,z,t)=-2\nu_{12}\bar{E}_1^{-1}\left[\sigma_0\left(t\right)\right]\cdot z. \qquad (18)$$

Так как при $r=0$ радиальное перемещение u_r равно нулю, то из выражения для ε_r получим:

$$u_r=\frac{\left(1-\nu_{23}\right)\nu_{12}}{\nu_{21}}\cdot\bar{E}_1^{-1}\left[\sigma_0\left(t\right)\right]\cdot r. \qquad (19)$$

Условия равновесия для обеих рассматриваемых задач требуют выполнения равенства:

$$f\sigma_0^{\circ}\left(t\right)+\left(1-f\right)\sigma_0^{*}\left(t\right)=0,$$

которое в изображениях принимает вид:

$$f\varphi_2\left(p\right)+\left(1-f\right)\varphi_1\left(p\right)=0.$$

Из этого равенства находим зависимость между $\varphi_1\left(p\right)$ и $\varphi_2\left(p\right)$:

$$\varphi_1\left(p\right)=\frac{f\cdot\varphi_2\left(p\right)}{f-1}.$$

Подставляя это равенство в (14), получим соотношение:

$$\varphi=\left(\frac{f}{f-1}\left(\alpha_1^*+\alpha_2^*d_1x^*-\alpha_3^*fd_3x^*\right)+(\alpha_2^*x^*d_2-\alpha_3^*x^*d_4f)\right)\varphi_2. \qquad (20)$$

Кинематические условия согласованности осевых и радиальных перемещений имеют вид:

$$u_r\left(b\right)=u_r^*\left(b\right),\quad u_z\left(h\right)=u_z^{\circ}\left(h\right)=u_z^*\left(h\right). \qquad (21)$$

Последнее равенство должно выполняться при любом $z=h$.

Применив к (21) преобразование Лапласа, с учетом равенств (13) и (4), получим:

$$\frac{\nu_{12}\left(1-\nu_{23}\right)\varphi}{\nu_{21}x}=\tilde{A}\left(p\right)+\frac{\tilde{B}\left(p\right)}{b^2}. \qquad (22)$$

Используя (18) и (6), из равенства $u_z\left(h\right)=u_z^\circ\left(h\right)$ получим соотношение для изображений:

$$-\frac{2\nu_{12}\varphi}{x}=\frac{1}{1-\nu_{23}^*}\left(\frac{\left(1-\nu_{23}^*-2\nu_{12}^*\nu_{21}^*\right)\varphi}{x^*}-2\nu_{21}^*\tilde{A}\left(p\right)\right). \tag{23}$$

Обозначим $k=f\left(\alpha_1^*+\alpha_2^*d_1x^*-\alpha_3^*fd_3x^*\right)+\left(f-1\right)(\alpha_2^*x^*d_2-\alpha_3^*x^*d_4f)$. Подставив в (22) равенства (13) и (20), получим:

$$\frac{\nu_{12}k\left(1-\nu_{23}\right)}{\nu_{21}x}=d_1f+d_2\left(f-1\right)+d_3f^2+d_4f\left(f-1\right). \tag{24}$$

Из (23) получим:

$$-\frac{2k\nu_{12}}{x}=\frac{k\left(1-\nu_{23}^*-2\nu_{12}^*\nu_{21}^*\right)}{x^*}-\frac{2\nu_{21}^*\left(d_1f+d_2\left(f-1\right)\right)}{1-\nu_{23}^*}. \tag{25}$$

Перейдем в (25) к пределу при $p\to\infty$. Учитывая, что при $p\to\infty$ $x=E_1\left(1-\tilde{R}\left(p\right)\right)\to E_1$, $x^*=E_1^*\left(1-\tilde{R}^*\left(p\right)\right)\to E_1^*$, $x^\circ=E_1^\circ\left(1-\tilde{R}^\circ\left(p\right)\right)\to E_1^\circ$ и используя выражения для d_1, d_2, d_3, d_4, из (25) получим:

$$-\frac{E_1}{2k_0\nu_{12}}=\frac{E_1^*\left(1-\nu_{23}^*\right)}{k_0\left(1-\nu_{23}^*-2\nu_{12}^*\nu_{21}^*\right)\left(1-\nu_{23}^*\right)-2\nu_{21}^*\left(m_1f+m_2\left(f-1\right)\right)}. \tag{26}$$

Здесь $k_0=f\left(\alpha_1^*+\alpha_2^*m_1x^*-\alpha_3^*fm_3x^*\right)+\left(f-1\right)(\alpha_2^*x^*m_2-\alpha_3^*x^*m_4f)$,

$$m_1=\frac{-2\alpha_1^*\alpha_1^\circ\left(E_1^\circ\right)^2E_1^*-\alpha_4^*E_1^\circ\left(\alpha_2^\circ E_1^\circ+\alpha_3^*E_1^*\right)}{m},$$

$$m_2=\frac{2\left(\alpha_1^\circ\right)^2\left(E_1^\circ\right)^2E_1^*+\alpha_4^\circ E_1^*\left(\alpha_2^\circ E_1^\circ+\alpha_3^*E_1^*\right)}{m},$$

$$m_3=\frac{\alpha_4^*E_1^\circ\left(\alpha_2^\circ E_1^\circ-\alpha_2^*E_1^*\right)-2\alpha_1^*E_1^\circ E_1^*\left(\alpha_1^*-\alpha_1^\circ E_1^\circ\right)}{m},$$

$$m_4=\frac{-\alpha_4^\circ E_1^*\left(\alpha_2^\circ E_1^\circ-\alpha_2^*E_1^*\right)+2\alpha_1^\circ E_1^\circ E_1^*\left(\alpha_1^*-\alpha_1^\circ E_1^\circ\right)}{m},$$

$$m=-2E_1^*E_1^\circ\left(\alpha_1^\circ E_1^\circ(\alpha_2^\circ E_1^\circ-\alpha_2^*E_1^*)+\left(\alpha_1^*-\alpha_1^\circ E_1^\circ\right)\left(\alpha_2^\circ x^\circ+\alpha_3^*E_1^*\right)\right).$$

Равенство (26) определяет зависимость отношения характеристик композита $\frac{E_1}{\nu_{12}}$ от характеристик его составляющих. Зная это отношение, можно определить ядро релаксации $R\left(t\right)$ для материала композита. Подставив в (25) $x=E_1\left(1-\tilde{R}\left(p\right)\right)$, получим:

$$1-\tilde{R}\left(p\right)=-\frac{2\nu_{12}}{E_1}\cdot\frac{kE_1^*\left(1-\nu_{23}^*\right)}{k\left(1-\nu_{23}^*-2\nu_{12}^*\nu_{21}^*\right)\left(1-\nu_{23}^*\right)-2\nu_{21}^*\left(d_1f+d_2\left(f-1\right)\right)}.$$

Отсюда находим выражение для изображения ядра:

$$\tilde{R}(p)=1+\frac{2\nu_{12}}{E_1}\cdot\frac{kE_1^*\left(1-\nu_{23}^*\right)}{k\left(1-\nu_{23}^*-2\nu_{12}^*\nu_{21}^*\right)\left(1-\nu_{23}^*\right)-2\nu_{21}^*\left(d_1 f+d_2\left(f-1\right)\right)}.$$

По найденному изображению, используя теорему обращения для преобразования Лапласа, находим оригинал $R(t)$. Эта задача решается достаточно просто, если интегральные операторы, описывающие реологические характеристики матрицы и волокна, имеют ядра релаксации экспоненциального типа. В этом случае изображение ядра релаксации для композита представляет собой отношение двух многочленов, имеющее конечное число особых точек (полюсов), и оригинал можно получить, используя для обращения преобразования Лапласа теорему разложения.

ВЫВОДЫ

Проведенное исследование свидетельствует о том, что для нахождения эффективных механических характеристик однонаправленных вязкоупругих трансверсально-изотропных композитов можно использовать методику, основанную на применении кинематических условий согласованности перемещений композиционного материала и его отдельных составляющих. Применение этих условий позволяет определить зависимость между реологическими характеристиками композита и его составляющих (матрицы и волокна) с учетом объемной доли волокна в композиционном материале. Перспективы дальнейших исследований в данном направлении связаны с определением всех эффективных реологических характеристик композиционного материала и применением их к решению задач механики вязкоупругих композитов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Класторны М. Точная теория жесткости однонаправленных волокнисто-армированных композитов / М. Класторны, П. Кондерла, Р. Пиекарский // Механика композитных материалов. – 2009. – Т. 45. – № 1. – С. 109-144.
2. Гребенюк С. Н. Определение упругих постоянных резинокордного материала при помощи энергетического критерия согласования / С.Н. Гребенюк // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: збірник наукових праць. – 2010. – Вип. 11. – С. 79-86.
3. Максимов Р. Д. Прогнозирование ползучести однонаправлено армированного пластика с термореологически простыми структурными компонентами / Р.Д. Максимов, Э.З. Плуме // Механика композитных материалов. – 1982. – № 6. – С. 1081-1089.
4. Зелин В. И. Определение ядер ползучести по результатам кратковременных испытаний / В.И. Зелин, Ю.О. Янсон // Механика полимеров. – 1977. – № 6. – С. 972-975.
5. Максимов Р. Д. Длительная ползучесть органопластика / Р.Д. Максимов, Э.З. Плуме // Механика композитных материалов. – 2001. – № 4. – С.435-450.
6. Уржумцев Ю. С. Прогнозирование длительного сопротивления полимерных материалов / Ю.С. Уржумцев. – М. : Наука, 1982. – 222 с.
7. Куимова Е. В. Численное прогнозирование эффективных термовязкоупругих характеристик однонаправленного волокнистого композита с вязкоупругими компонентами / Е.В. Куимова, И.А. Труфанов // Вестник Самарского государственного университета. – 2009. – № 4(70). – С. 129-148.
8. Каминский А. А. Об одном методе определения характеристик вязкоупругого деформирования композитов / А.А. Каминский, М.Ф. Селиванов // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41. – № 5. – С. 9-21.

REFERENCES

1. Klastornyi, M., Konderla, P. and Piekarskiy, R. (2009), "An exact theory of rigidity unidirectional fiber-reinforced composites", Mehanika kompozitnyih materialov, vol. 45, no. 1, pp. 109-144.
2. Grebenyuk, S.N. (2010), "Determination of the elastic constants of the material with the help of rubber-energy criterion matching", *Metodi rozv'yazuvannya prikladnih zadach mehanIki deformIvnogo tverdogo tIla: zbIrnik naukovih prats*, issue, 11, pp. 79-86.
3. Maksimov, R.D. and Plume, E.Z. (1982), "Prediction of creep reinforced plastic with termoreological simple structural components", *Mehanika kompozitnyih materialov*, no. 6, pp. 1081-1089.

4. Zelin, V.I. and Yanson, Yu.O. (1977), “Definition of nuclei as a result of short-term creep tests”, *Mehanika polimerov*, no. 6, pp. 972-975.
5. Maksimov, R.D. and Plume, E.Z. (2001), “Long-term creep organoplastic”, *Mehanika kompozitnyih materialov*, no. 4, pp. 435-450.
6. Urzhumtsev, Yu.S. (1982), *Prognozirovanie dlitelnogo soprotivleniya polimernyih materialov* [Prediction of long-term resistance of polymeric materials], Nauka, Moskow.
7. Kuimova, E.V. and Trufanov, I.A. (2009), “Numerical prediction of effective thermoviscoelastic characteristics of unidirectional fiber composite with viscoelastic components”, *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta*, no. 4(70), pp. 129-148.
8. Kaminskiy, A.A. and Selivanov, M.F. (2005), “On a method for determining the characteristics of viscoelastic deformation of composites”, *Prikladnaya mehanika*, vol. 41, no. 5, pp. 9-21.

УДК 539.3

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ НЕОДНОРОДНОМ ПРОДОЛЬНОМ СЖАТИИ

Колесников М. В., к. т. н., доцент

Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры, ул. Чернышевского, 24а, г. Днепропетровск, 49600, Украина

kolesnikov.maxym@gmail.com

Рассматривается задача неоднородного продольного сжатия тонкостенного цилиндра. Сжатие осуществляется через периодически распределенные на верхнем и нижнем торце оболочки участки окружности равной длины. Выполняется оценка влияния числа участков нагружения (изменяемости) на величину нормальных и касательных напряжений в оболочке. Анализ выполняется на основании результатов численного линейного и геометрически нелинейного расчета деформирования в среде ПК ANSYS. Приведенные особенности деформирования цилиндрической оболочки позволяют выделить факторы, оказывающие наибольшее влияние на рост нормальных и касательных напряжений в оболочке.

Ключевые слова: оболочка, численное моделирование, метод конечных элементов, устойчивость оболочек, напряженно-деформированное состояние.

АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ПРИ НЕОДНОРІДНОМУ ПОЗДОВЖНЬОМУ СТИСКАННІ

Колесніков М. В., к. т. н., доцент

Придніпровська державна академія будівництва та архітектури, вул. Чернишевського, 24а, м. Дніпропетровськ, 49600, Україна

kolesnikov.maxym@gmail.com

Розглядається задача неоднорідного повздовжнього стискання тонкостінного циліндра. Стискання здійснюється через періодично розподілені на верхньому і нижньому торці оболонки ділянки окружності рівної довжини. Виконується оцінка впливу числа ділянок навантаження (змінності) на величину нормальних і дотичних напружень в оболонці. Аналіз виконується на підставі результатів чисельного лінійного і геометрично нелінійного розрахунку деформування в середовищі ПК ANSYS. Наведені особливості деформування циліндричної оболонки дозволяють виділити фактори, що спричиняють найбільший вплив на зростання нормальних і дотичних напружень в оболонці.

Ключові слова: оболонка, чисельне моделювання, метод кінцевих елементів, стійкість оболонок, напружено-деформований стан.