УДК: 531:533.6.013.4

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗОНАНСА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ЗАДАЧЕ О СТАБИЛИЗАЦИИ СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ПОМОЩЬЮ ВНЕШНИХ МОМЕНТОВ

[1]Костюшко И. А., к.ф.-м.н., доцент, [2]Кузeмко В. А., к. ф.-м. н., доцент

[1]*Запорожский национальный университет,*
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина

[2]*Академия таможенной службы Украины,*
ул. Рогалева, 8, г. Днепропетровск, 49000, Украина

kostushkoia@mail.ru

Для динамически симметричного космического аппарата решена задача стабилизации относительного положения равновесия с помощью внешних моментов, формирующихся из постоянных и нелинейных составляющих. В линейной постановке получены условия стабилизации постоянными моментами. В нелинейной постановке показана невозможность стабилизации постоянными моментами, получены условия стабилизации внешними моментами с добавлением нелинейных составляющих. Доказана невозможность стабилизации при внутреннем резонансе третьего порядка.
Ключевые слова: устойчивость, космический аппарат, функция Ляпунова, первое приближение, внешние моменты, резонанс.

ДОСЛІДЖЕННЯ РЕЗОНАНСУ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ В ЗАДАЧІ ПРО СТАБІЛІЗАЦІЮ СТАЦІОНАРНОГО РУХУ ДИНАМІЧНО СИМЕТРИЧНОГО КОСМІЧНОГО АПАРАТА ЗА ДОПОМОГОЮ ЗОВНІШНІХ МОМЕНТІВ

[1]Костюшко І. А., к. ф.-м. н., доцент, [2]Кузeмко В. А., к. ф.-м. н., доцент

[1]*Запорізький національний університет,*
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна

[2]*Академія митної служби України,*
вул. Рогальова, 8, м. Дніпропетровськ, 49000, Україна

kostushkoia@mail.ru

Для динамічно симетричного космічного апарата вирішена задача стабілізації відносного положення рівноваги за допомогою зовнішніх моментів, які формуються з постійних і нелінійних складових. У лінійній постановці отримано умови стабілізації постійними моментами. У нелінійній постановці показана неможливість стабілізації постійними моментами, отримано умови стабілізації зовнішніми моментами з додаванням нелінійних складових. Доведена неможливість стабілізації при внутрішньому резонансі третього порядку.
Ключові слова: стійкість, космічний апарат, функція Ляпунова, перше наближення, зовнішні моменти, резонанс.

THIRD-ORDER RESONANCE RESEARCHES IN THE TASK ABOUT A STABILIZATION OF A STATIONARY MOTION OF THE DYNAMICALLY SYMMETRIC SPACECRAFT WITH THE HELP OF THE EXTERNAL MOMENTS

[1]Kostushko I. A., Ph.D. in Physics and Maths, associate professor,
[2]Kuzemko V. A., Ph.D. in Physics and Maths, associate professor

[1]*Zaporizhzhya National University,*
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine

[2]*Academy of Customs Service of Ukraine,*
Str. Rogaleva, 8, Dnepropetrovsk, 49000, Ukraine

kostushkoia@mail.ru

For a dynamically symmetric spacecraft solved the problem of stabilization of the relative equilibrium with the external side, the emerging of the permanent and non-linear components. In the linear formulation obtained conditions for the stabilization constant moments. In the nonlinear setting the impossibility of stabilizing the constant moments, we obtain conditions for the stabilization of the external moments with the addition of non-linear components. Proved impossible to stabilize at an internal third-order resonance.
Key words: stability, spacecraft, Lyapunov function, the first approximation, the external moments, resonance.

Устойчивость неконсервативных систем – один из разделов механики, имеющий важное практическое значение и вызвавший интерес на протяжении всего минувшего столетия [1, 2]. Задачи исследования устойчивости возникают при рассмотрении систем со следящими и реактивными силами, при проектировании гироскопических устройств, современных конструкций в машиностроении, крупногабаритных космических конструкций. Эти же вопросы возникают и при решении задач управления, поскольку нагрузки, возникающие в объектах систем автоматического регулирования, в большинстве случаев представляют собой неконсервативные силы. Поэтому анализ и обнаружение новых качественных механических эффектов поведения систем под действием неконсервативных нагрузок представляет значительный интерес.

Среди работ, посвященных исследованию устойчивости стационарных движений динамически симметричного космического аппарата, отметим работу [3]. В ней найдены достаточные условия устойчивости всех стационарных режимов путем построения функции Ляпунова. Стабилизации и управлению спутников постоянными внешними моментами посвящены работы [4, 5]. В работе [6] решена задача стабилизации стационарного движения динамически симметричного спутника – гиростата с помощью приложения внешних моментов. Центр масс спутника движется по круговой орбите. Задача решается в строгой нелинейной постановке.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе решается задача управления движением динамически симметричного космического аппарата, центр масс которого движется по круговой орбите с угловой скоростью $\omega_0 = const$. Два главных центральных момента равны $A = B$, момент инерции относительно оси симметрии равен C. Исследуются условия стабилизации движения с помощью внешних моментов, формирующихся из постоянных и нелинейных составляющих:

$$M_\theta = \frac{A}{2}\omega_0^2 \sin 2\theta_0 \cos^2\psi_0 + C\Omega\omega_0 \cos\theta_0 \cos\psi_0 - \frac{3}{2}\omega_0^2 (C-A)\sin 2\theta_0 - \Gamma_1\dot{\theta}^3 - D_1\dot{\psi}^2\dot{\theta} - L_1(\theta-\theta_0)^2\dot{\theta},$$

$$M_\psi = -\frac{A}{2}\omega_0^2 \sin^2\theta_0 \sin 2\psi_0 - C\Omega\omega_0 \sin\theta_0 \sin\psi_0 - \Gamma_2\dot{\psi}^3 - D_2\dot{\theta}^2\dot{\psi} - L_2(\psi-\psi_0)^2\dot{\psi}.$$

Здесь θ, ψ – обобщенные координаты, $C\Omega$ – циклическая постоянная, Γ_i, D_i, $L_i \ge 0$ $(i=1,2)$ – параметры задачи. В задаче ставится вопрос о возможности выбора выражений для моментов M_θ, M_ψ таким образом, чтобы в орбитальной системе координат, жестко связанной со спутником, космический аппарат был неподвижным, или в инерциальной системе координат спутник имел положение относительного равновесия. Заметим, что $\theta_0 \ne 0,\ \ \theta_0 \ne \pi$. Для каждой пары значений θ_0 и ψ_0 можно однозначно определить стабилизирующие моменты M_θ, M_ψ, которые задают соответствующую ориентацию космического аппарата.

Вводя безразмерные переменные $\tau = \omega_0 t$, $x_1 = \theta - \theta_0$, $x_2 = \psi - \psi_0$, запишем уравнения движения космического аппарата в безразмерных величинах [7]:

$$\begin{cases} x_1'' - \frac{1}{2}x_2'^2 \sin 2(x_1+\theta_0) + x_2' \cos(x_2+\psi_0) - x_2' \cos 2(x_1+\theta_0)\cos(x_2+\psi_0) + \\ \quad + \frac{1}{2}\sin 2(x_1+\theta_0)\cos^2(x_2+\psi_0) + \beta\left[x_2' \sin(x_1+\theta_0) + \right. \\ \quad \left. + \cos(x_1+\theta_0)\cos(x_2+\psi_0)\right] - \frac{3}{2}(\alpha-1)\sin 2(x_1+\theta_0) = m_\theta; \\ x_2'' \sin^2(x_1+\theta_0) + x_1' x_2' \sin 2(x_1+\theta_0) + x_1' \cos 2(x_1+\theta_0)\cos(x_2+\psi_0) - \\ \quad - x_1' \cos(x_2+\psi_0) - \frac{1}{2}\sin^2(x_1+\theta_0)\sin 2(x_2+\psi_0) - \\ \quad - \beta \sin(x_1+\theta_0)\left[x_1' + \sin(x_2+\psi_0)\right] = m_\psi, \end{cases} \qquad (1)$$

где $\alpha = \dfrac{C}{A}$, $\beta = \dfrac{C\Omega}{A\omega_0}$, штрих означает дифференцирование по безразмерному времени τ. Выражения для безразмерных стабилизирующих моментов имеют вид:

$$m_\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta_0 \cos^2\psi_0 + \beta\cos\theta_0\cos\psi_0 - \frac{3}{2}(\alpha-1)\sin 2\theta_0 - \gamma_1 x_1'^3 - d_1 x_2'^2 x_1' - l_1 x_1^2 x_1',$$

$$m_\psi = -\frac{1}{2}\sin^2\theta_0 \sin 2\psi_0 - \beta\sin\theta_0\sin\psi_0 - \gamma_2 x_2'^3 - d_2 x_1'^2 x_2' - l_1 x_2^2 x_2', \qquad (2)$$

где γ_i, d_i, l_i $(i=1,2)$ – безразмерные положительные параметры. При таком выборе стабилизирующих моментов система уравнений (1) имеет в орбитальной системе координат тривиальное решение $x_1 = x_2 = 0$, $x_1' = x_2' = 0$, устойчивость которого исследуется в дальнейшем.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Разлагая нелинейные слагаемые системы (1) в ряды Маклорена, ограничиваясь линейными слагаемыми, получаем систему первого приближения в матричном виде:

$$MX'' + GX' + KX = 0, \qquad (3)$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta_0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & g \\ -g & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix}.$$

Здесь g, k_1, k_2, k_3 – определенные тригонометрические функции углов θ_0 и ψ_0, линейным образом зависящие от выбора параметров α и β. Отметим, что матрица M в (3) является положительно определенной.

Согласно теорем Кельвина-Четаева [8], равновесие, устойчивое при одних потенциальных силах, сохраняет устойчивость при добавлении гироскопических сил; если же неустойчивость изолированного положения равновесия под действием одних потенциальных сил имеет нечетную степень, то гироскопическая стабилизация равновесия невозможна. Рассмотрим последовательно три случая: матрица K – положительно определена, отрицательно определена и не является знакоопределенной.

Условия положительной определенности матрицы K:

$$k_1 > 0, \quad k_1 k_3 - k_2^2 > 0. \qquad (4)$$

Выполнение неравенств (4) означают, что нулевое положение потенциальной системы $MX'' + KX = 0$ устойчиво и матрица G не влияет на устойчивость.

В случае, если матрица K отрицательно определена, а это возможно при выполнении условий

$$k_1 < 0, \quad k_1 k_3 - k_2^2 > 0, \qquad (5)$$

нулевое положение равновесия потенциальной системы неустойчиво. Однако оба собственных значения матрицы K отрицательны, то есть степень неустойчивости четна, а это означает, что устойчивость равновесия системы (3) зависит от матрицы G и в системе возможна гироскопическая стабилизация [5].

Характеристическое уравнение системы (3) имеет вид:

$$\lambda^4 \sin^2\theta_0 + b\lambda^2 + c = 0, \qquad (6)$$

где

$$b = k_1 \sin^2\theta_0 + k_3 + g^2, \quad c = k_1 k_3 - k_2^2.$$

Уравнение (6) биквадратное. Для устойчивости системы (3) необходимо, чтобы уравнение (6) имело две пары чисто мнимых корней, для этого необходимо выполнение условий:

$$b > 0, \quad c > 0, \quad b^2 - 4c\sin^2\theta_0 > 0. \tag{7}$$

Таким образом, при выполнении условий (5) и (7) система (3) устойчива и устойчивость достигнута за счет гироскопической стабилизации.

В случае, если не выполняются условия (4), (5), то матрица K не является знакоопределенной и нулевое положение равновесия потенциальной системы неустойчиво. Матрица K при этом имеет одно отрицательное и одно положительное собственное значение, то есть, степень неустойчивости нечетна, следовательно, положение равновесия $X = X' = 0$ системы (3) будет неустойчивым при любом выборе матрицы G [8].

РЕЗОНАНС ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В случаях знакоопределенной матрицы K характеристическое уравнение (6) имеет две пары чисто мнимых корней $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$. Критический случай устойчивости двух пар чисто мнимых корней рассмотрен в [7], где в нелинейной постановке доказана невозможность стабилизации постоянными моментами и получены условия стабилизации внешними моментами с добавлением нелинейных составляющих.

Рассмотрим резонанс третьего порядка, то есть, когда выполняется соотношение $\omega_2 = 2\omega_1$. Из теоремы Виета для характеристического уравнения (6) получим условие резонанса третьего порядка:

$$\frac{b^2}{25\sin^2\theta_0} = \frac{c}{4}. \tag{8}$$

В этом случае из устойчивости в первом приближении нельзя делать вывод об устойчивости нелинейной системы. Для исследования этого критического случая необходимо использовать также нелинейные слагаемые системы (1). Запишем систему (1) в нормальной форме, полагая

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_1', \quad y_4 = x_2'.$$

Разлагая нелинейные слагаемые системы (1) в ряды Маклорена, ограничиваясь членами третьего порядка включительно, получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = y_3; \\ y_2' = y_4; \\ y_3' = -k_1 y_1 - k_2 y_2 - g y_4 + Y_{12} + Y_{13} + \ldots; \\ y_4' = \dfrac{1}{\sin^2\theta_0}\left(-k_2 y_1 - k_3 y_2 + g y_3\right) + Y_{22} + Y_{23} + \ldots. \end{cases} \tag{9}$$

Здесь многоточие означает совокупность слагаемых порядка не ниже четвертого; Y_{12}, Y_{22} содержат квадратичные, а Y_{13} и Y_{23} кубические слагаемые аргументов y_1, y_2, y_3, y_4, зависящие от параметров задачи α, β, θ_0, ψ_0, γ_i, d_i, l_i $(i = 1, 2)$.

В системе (9) введем новые комплексные переменные:

$$\begin{cases} z_1 = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + c_4 y_4, \\ z_2 = a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + a_4 y_4, \\ z_3 = \overline{z_1} = \overline{c_1} y_1 + \overline{c_2} y_2 + \overline{c_3} y_3 + \overline{c_4} y_4, \\ z_4 = \overline{z_2} = \overline{a_1} y_1 + \overline{a_2} y_2 + \overline{a_3} y_3 + \overline{a_4} y_4. \end{cases} \tag{10}$$

Здесь черта означает сопряжение, комплексные постоянные c_i, a_i $\left(i=\overline{1,4}\right)$ выбираем таким образом, чтобы для линейных слагаемых выполнялись соотношения:

$$\frac{dz_1}{d\tau}=i\omega_1 z_1,\quad \frac{dz_2}{d\tau}=2i\omega_1 z_2,\quad \frac{dz_3}{d\tau}=-i\omega_1 z_3,\quad \frac{dz_4}{d\tau}=-2i\omega_1 z_4.$$

Обратная замена переменных может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} y_1=m_{11}z_1+m_{12}z_2+m_{13}z_3+m_{14}z_4,\\ y_2=m_{21}z_1+m_{22}z_2+m_{23}z_3+m_{24}z_4,\\ y_3=m_{31}z_1+m_{32}z_2+m_{33}z_3+m_{34}z_4,\\ y_4=m_{41}z_1+m_{42}z_2+m_{43}z_3+m_{44}z_4, \end{cases} \tag{11}$$

здесь m_{ij} $(i,j=\overline{1,4})$ – известные комплексные величины.

В результате замены переменных (11) система (9) принимает вид:

$$\begin{cases} z_1'=i\omega_1 z_1+Z_{12}\left(z_1,z_2,z_3,z_4\right)+Z_{13}\left(z_1,z_2,z_3,z_4\right)+...,\\ z_2'=2i\omega_1 z_2+Z_{22}\left(z_1,z_2,z_3,z_4\right)+Z_{23}\left(z_1,z_2,z_3,z_4\right)+...,\\ z_3'=-i\omega_1 z_3+\overline{Z_{12}}\left(z_1,z_2,z_3,z_4\right)+\overline{Z_{13}}\left(z_1,z_2,z_3,z_4\right)+...,\\ z_4'=-2i\omega_1 z_4+\overline{Z_{12}}\left(z_1,z_2,z_3,z_4\right)+\overline{Z_{13}}\left(z_1,z_2,z_3,z_4\right)+..., \end{cases} \tag{12}$$

где

$$Z_{12}\left(z_1,z_2,z_3,z_4\right)=c_3\tilde{Y}_{12}+c_4\tilde{Y}_{22},\quad Z_{13}\left(z_1,z_2,z_3,z_4\right)=c_3\tilde{Y}_{13}+c_4\tilde{Y}_{23},$$

$$Z_{22}\left(z_1,z_2,z_3,z_4\right)=a_3\tilde{Y}_{12}+a_4\tilde{Y}_{22},\quad Z_{23}\left(z_1,z_2,z_3,z_4\right)=a_3\tilde{Y}_{13}+a_4\tilde{Y}_{23}.$$

Функции $\tilde{Y}_{ij}$ получаются из Y_{ij} путем подстановки (11).

В случае выполнения условия (8), с помощью полиномиального преобразования переменных $\left(z_1,z_2,z_3,z_4\right)\to\left(w_1,w_2,w_3,w_4\right)$, систему (12) можно привести к нормальной форме:

$$\begin{cases} w_1'=i\omega_1 w_1+B_1 w_2\overline{w}_1+...,\\ w_2'=2i\omega_1 w_2+B_2 w_1^2+.... \end{cases} \tag{13}$$

Коэффициент B_1 равен коэффициенту при z_2z_3 в разложении Z_{12}, B_2 – коэффициент при z_1^2 в разложении Z_{22}. Многоточие означает совокупность слагаемых не ниже третьего.

Далее рассматриваем систему

$$\begin{cases} w_1'=i\omega_1 w_1+B_1 w_2\overline{w}_1,\\ w_2'=2i\omega_1 w_2+B_2 w_1^2. \end{cases} \tag{14}$$

В (14) делаем замену

$$B_1=b_1e^{i\beta_1},\quad B_2=b_2e^{i\beta_2},\quad w_1=\sqrt{\rho_1}e^{i\varphi_1},\quad w_2=\sqrt{\rho_2}e^{i\varphi_2},\quad \psi=\varphi_2-2\varphi_1.$$

Выделяя действительные и мнимые части полученных уравнений, приходим к системе трех уравнений:

$$
\begin{cases}
\rho_1' = 2b_1\rho_1\sqrt{\rho_2}\cos\left(\beta_1+\psi\right), \\
\rho_2' = 2b_2\rho_1\sqrt{\rho_2}\cos\left(\beta_2-\psi\right), \\
\psi' = b_2\dfrac{\rho_1}{\sqrt{\rho_2}}\sin\left(\beta_2-\psi\right) - 2b_1\sqrt{\rho_2}\sin\left(\beta_1+\psi\right).
\end{cases}
\tag{15}
$$

Рассмотрим функцию

$$V = \rho_1\sqrt{\rho_2}\sin\left(\beta_2-\psi\right).$$

Вычислим ее производную в силу уравнений системы (15). После преобразований получим:

$$V' = 4b_1\rho_1\rho_2\sin\left(\beta_1+\beta_2\right).$$

Анализ коэффициентов B_1, B_2 показал, что при выполнении условия (8) имеет место следующее неравенство:

$$0 < \beta_1 + \beta_2 < \pi\,,$$

что означает, что $V' > 0$ в области $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$. Тогда с помощью уравнения $V = 0$ можно построить область $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$, $\psi' < \psi < \psi''$, в которой выполняются условия теоремы Четаева о неустойчивости.

Из неустойчивости положения равновесия $w_1 = w_2 = 0$, $w_1' = w_2' = 0$ системы (14) можно сделать вывод о неустойчивости положения равновесия системы (13), а следовательно, и о неустойчивости положения равновесия системы (9) при внутреннем резонансе третьего порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости / В.В. Болотин. – М. : Физматгиз, 1961. – 339 с.
2. Филин А. П. Прикладная механика твердого деформируемого тела / А.П. Филин. – М. : Наука, 1981. – Т. 3. – 400 с.
3. Черноусько Ф. Л. Об устойчивости регулярной прецессии спутника / Ф.Л. Черноусько // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т. 28. – Вып.1. – С. 155-157.
4. Сарычев В. А. О равновесии спутника под влиянием гравитационных и статических воздействий / В.А. Сарычев, С.А. Гутник // Космические исследования. – 1994. – Т. 32, № 4-5. – С. 386-391.
5. Sarychev V. A. Equilibria of a satellite in circular orbit: the influence of a constant torque / V.A. Sarychev, P. Paglione, A. Guerman // 48th International Astronautical Congress. Paper IAF – 95 – A.3.09. – Turin, 1997. – 5 p.
6. Агафонов С. А. Стабилизация стационарного движения спутника-гиростата с помощью внешних моментов / С.А. Агафонов, А.Д. Герман // Механика твердого тела. – 2004. – № 4. – С. 3-6.
7. Куземко А. В. Стабилизация стационарного движения динамически симметричного космического аппарата с помощью внешних моментов / А.В. Куземко, И.А. Костюшко // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2013. – № 1. С. 109-112.
8. Четаев Н. Г. Устойчивость движения / Н.Г. Четаев. – М. : Наука, 1965. – 208 с.
9. Lavanga M. Large multi – hinged space system: a parametric stability analysis / M. Lavanga, A. Ercoli Finzi // Acta Astronautica. – 2004. – Vol 54, N 4. – P. 295-305.

REFERENCES

1. Bolotin, V.V. (1961), *Nekonservativnye zadachi teorii uprugoj ustojchivosti* [Nonconservative problems of the theory of elastic stability], Fizmatgiz, Moskow.
2. Filin, A.P. (1981), *Prikladnaya mekhanika tverdogo deformiruyemogo tela* [Applied Mechanics of deformable body], Nauka, Moskow, vol. 3.
3. Chernousko, F.L. (1964), “On the stability of a regular precession companion”, *Prikladnaya matematika i mekhanika*, vol. 28, issue 1, pp. 155-157.

4. Sarychev, V.A. and Gutnik, S.A. (1994), “On the equilibrium of the satellite under the influence of gravity and static effects”, *Kosmicheskiye issledovaniya*, vol. 32, no. 4-5, pp. 386-391.
5. Sarychev, V.A., Paglione, P. and Guerman, A. (1997), “Equilibria of a satellite in circular orbit: the influence of a constant torque”, *48th International Astronautical Congress*, Paper IAF – 95 – A.3.09, Turin, 5 p.
6. Agafonov, S.A. and German, A.D. (2004), “ Stabilization of the stationary motion of the satellite-gyrostat by external moments”, *Mekhanika tverdogo tela*, no. 4, pp. 3-6.
7. Kuzemko, A.V. and Kostyushko, I.A. (2013), “ Stabilization of the stationary motion of a dynamically symmetric spacecraft by external moments”, *Novi materiali i tekhnologiї v metalurgiї ta mashinobuduvanni*, no. 1, pp. 109-112.
8. Chetayev, N.G. (1965), *Ustoychivost dvizheniya* [Resistance movements], Nauka, Moskow.
9. Lavanga, M. and Ercoli Finzi, A. (2004), “Large multi – hinged space system: a parametric stability analysis”, Acta Astronautica, vol. 54, no. 4, pp. 295-305.

УДК: 53.082.17:530.182:53.082.55

СТАТИЧНА СТІЙКІСТЬ КРУГЛИХ ТРИШАРОВИХ ПЛАСТИН З НЕЛІНІЙНО-ПРУЖНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ

Кудін О. В.

Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, Україна

alexkudin@znu.edu.ua

Запропоновано рівняння стійкості тришарових круглих пластин симетричної будови з ізотропними зовнішніми шарами і нелінійно-пружним ізотропним заповнювачем. Описано метод розв’язання задачі визначення критичного навантаження у випадку нелінійної пружності матеріалу заповнювача. Як чисельний приклад розглянуто задачу визначення критичного навантаження тришарової круглої пластини в лінійній та нелінійній постановках, виконано порівняння з іншими відомими дослідженнями.
Ключові слова: тришарова симетрична пластина, кругла пластина, нелінійно-пружний заповнювач, вісесиметричний вигин, кінцево-елементна модель.

СТАТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ КРУГЛЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Кудин А. В.

Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, Украина

alexkudin@znu.edu.ua

Предложены уравнения устойчивости трехслойных круглых пластин симметричного строения с изотропными наружными слоями и нелинейно-упругим изотропным заполнителем. Описан метод решения задачи определения критической нагрузки в случае нелинейной упругости материала заполнителя. В качестве численного примера рассмотрена задача определения критической нагрузки трехслойной круглой пластины в линейной и нелинейной постановке, выполнено сравнение с другими известными работами.
Ключевые слова: трёхслойная симметричная пластина, круглая пластина, нелинейно-упругий заполнитель, осесимметричный изгиб, конечно-элементная модель

BUCKLING OF SANDWICH CIRCULAR PLATES WITH NONLINEAR ELASTIC CORE

Kudin O. V.

Zaporizhzhya national university,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, Ukraine

alexkudin@znu.edu.ua

Composite materials (composites) and layered materials are one of the great technological advances of a modern engineering. By the term layered materials we usually refer to materials that are combinations of two or more organic or