

4. Sarychev, V.A. and Gutnik, S.A. (1994), "On the equilibrium of the satellite under the influence of gravity and static effects", *Kosmicheskiye issledovaniya*, vol. 32, no. 4-5, pp. 386-391.
5. Sarychev, V.A., Paglione, P. and Guerman, A. (1997), "Equilibria of a satellite in circular orbit: the influence of a constant torque", *48th International Astronautical Congress*, Paper IAF – 95 – A.3.09, Turin, 5 p.
6. Agafonov, S.A. and German, A.D. (2004), "Stabilization of the stationary motion of the satellite-gyrostator by external moments", *Mekhanika tverdogo tela*, no. 4, pp. 3-6.
7. Kuzemko, A.V. and Kostyushko, I.A. (2013), "Stabilization of the stationary motion of a dynamically symmetric spacecraft by external moments", *Novi materiali i tekhnologii v metalurgii ta mashinobuduvanni*, no. 1, pp. 109-112.
8. Chetayev, N.G. (1965), *Ustoychivost dvizheniya* [Resistance movements], Nauka, Moscow.
9. Lavanga, M. and Ercoli Finzi, A. (2004), "Large multi – hinged space system: a parametric stability analysis", *Acta Astronautica*, vol. 54, no. 4, pp. 295-305.

УДК: 53.082.17:530.182:53.082.55

СТАТИЧНА СТІЙКІСТЬ КРУГЛИХ ТРИШАРОВИХ ПЛАСТИН З НЕЛІНІЙНО-ПРУЖНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ

Кудін О. В.

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, Україна*

alexkudin@znu.edu.ua

Запропоновано рівняння стійкості тришарових круглих пластин симетричної будови з ізотропними зовнішніми шарами і нелінійно-пружним ізотропним заповнювачем. Описано метод розв'язання задачі визначення критичного навантаження у випадку нелінійної пружності матеріалу заповнювача. Як чисельний приклад розглянуто задачу визначення критичного навантаження тришарової круглої пластини в лінійній та нелінійній постановках, виконано порівняння з іншими відомими дослідженнями.

Ключові слова: тришарова симетрична пластинка, кругла пластинка, нелінійно-пружний заповнювач, віссиметричний вигин, кінцево-елементна модель.

СТАТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ КРУГЛЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Кудин А. В.

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, Украина*

alexkudin@znu.edu.ua

Предложены уравнения устойчивости трехслойных круглых пластин симметричного строения с изотропными наружными слоями и нелинейно-упругим изотропным наполнителем. Описан метод решения задачи определения критической нагрузки в случае нелинейной упругости материала наполнителя. В качестве численного примера рассмотрена задача определения критической нагрузки трехслойной круглой пластинки в линейной и нелинейной постановке, выполнено сравнение с другими известными работами.

Ключевые слова: трёхслойная симметричная пластинка, круглая пластинка, нелинейно-упругий наполнитель, осесимметричный изгиб, конечно-элементная модель

BUCKLING OF SANDWICH CIRCULAR PLATES WITH NONLINEAR ELASTIC CORE

Kudin O. V.

*Zaporizhzhya national university,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, Ukraine*

alexkudin@znu.edu.ua

Composite materials (composites) and layered materials are one of the great technological advances of a modern engineering. By the term layered materials we usually refer to materials that are combinations of two or more organic or

inorganic layers. Layered materials allow to optimize some physical and mechanical properties of constructions. Sandwich structures are widely used in the aircraft and shipbuilding industries, the aerospace industry, civil engineering, electronics and other industries. Thus the stress-strain state analysis of sandwich structural elements is urgent. Herein study of circular sandwich plates with the nonlinear elastic core material has been investigated by analytical and numerical methods. Currently, there are many experimental and theoretical works devoted to sandwich structures. Well known articles reviews devoted to sandwich structures. However, buckling of circular sandwich plates with nonlinear elastic core still less investigated. In this paper it is derived nonlinear equations of symmetric sandwich plates buckling with isotropic face sheets and nonlinear elastic core material by H. Kauderer. The problem of developing effective methods for determining the stress-strain state of sandwich structural elements is urgent. There is a need in summarizing the classical theories using the improved models, reflecting the behavior of modern materials.

The paper describes stability equations of circular sandwich plates with isotropic face sheets and nonlinear elastic core. Buckling load determining method is described. Linear equations are solved by Ritz method. It is compared results of the analytical model with results of other works, using two problems: 1) the problem of a circular sandwich plate buckling, 2) the problem of a circular one layer plate buckling. The effect of accounting nonlinear elastic core material on the buckling load is described.

The introduction section of the article contains an overview of previous researches.

Fundamental equations of elasticity theory for the general case of circular sandwich plate are described in the first section. Equation of total potential energy of circular sandwich plate is received.

The second section contains linear equations of stability for the symmetrical sandwich plate. It is used energy criterion of bifurcational stability loss. The eigenvalue sets of the load parameter are determined. The smallest value of the load parameter is a buckling load, i.e. when it is exceeded, the initial plane equilibrium configuration will no longer be stable.

Buckling load determining method of sandwich circular plates with nonlinear elastic core is described in the third section.

The fourth section contains values of buckling load one layer circular plate and sandwich circular plate in linear and nonlinear cases. Results of the analytical model are compared with results of other well-known scientific researches.

Conclusions and prospects for the future research are represented in the last section. Small amount of computation is an advantage of the analytical model. Compact design formulas for use in engineering practice can be obtained on the basis of the analytical model.

Prospects for further research related to the consideration of the problems of nonlinear dynamics and stability of sandwich structural elements.

Key words: sandwich symmetrical plate, circular plate, nonlinear-elastic core, buckling load.

ВСТУП

Тришарові елементи конструкцій широко застосовуються в авіа- та суднобудуванні, космічній промисловості, цивільному будівництві, радіоелектроніці та інших галузях народного господарства. Застосування тришарових конструкцій дозволяє забезпечити більш високу жорсткість та міцність порівняно з аналогічними одношаровими елементами конструкцій такої ж маси. А застосування відповідних матеріалів зовнішніх шарів та заповнювача забезпечує такі додаткові властивості конструкції, як звуко- та теплоізоляція, вібропоглинання тощо.

Наразі опублікована велика кількість робіт, присвячених дослідженню напружено-деформованого стану тришарових елементів конструкцій [9-11]. Переважна більшість досліджень зі статичної та динамічної тришарових конструкцій виконані в припущенні лінійної залежності між напруженнями та деформаціями. Такі матеріали, як мідь, сплав алюмінієвої бронзи, мартенівська сталь, дюралюміній, полімерні матеріали та композити вже на стадії малих деформацій відхиляються від закону пружності Гука [3, 8]. Тобто, для таких матеріалів існує область деформацій, у якій може застосовуватись геометрична лінеаризація основних рівнянь теорії пружності, але закон пружності Гука вже не описує поведінку матеріалу з достатньою точністю [3, 8]. Тому актуальною залишається проблема дослідження напружено-деформованого стану тришарових пластин та оболонок при врахуванні нелінійної пружності окремих шарів.

У статті розглянуто задачу статичної стійкості круглої тришарової пластини з нелінійно-пружним заповнювачем під дією повздовжнього навантаження.

1. ФУНКЦІОНАЛ ПОВНОЇ ЕНЕРГІЇ КРУГЛОЇ ТРИШАРОВОЇ ПЛАСТИНИ

Розглянемо задачу статичної стійкості тришарової круглої пластини при дії стискаючого зусилля P у площині пластини (рис. 1). Будемо вважати, що зусилля P настільки мале, що

плоска форма рівноваги пластини є стійкою. Визначимо критичне значення $P_{кр}$, при перевищенні якого початкова плоска форма рівноваги може стати нестійкою і пластина під дією малих збурень перейде до нової стійкої форми рівноваги з викривленою серединною поверхнею. Далі будемо розглядати вісесиметричну форму втрати стійкості.

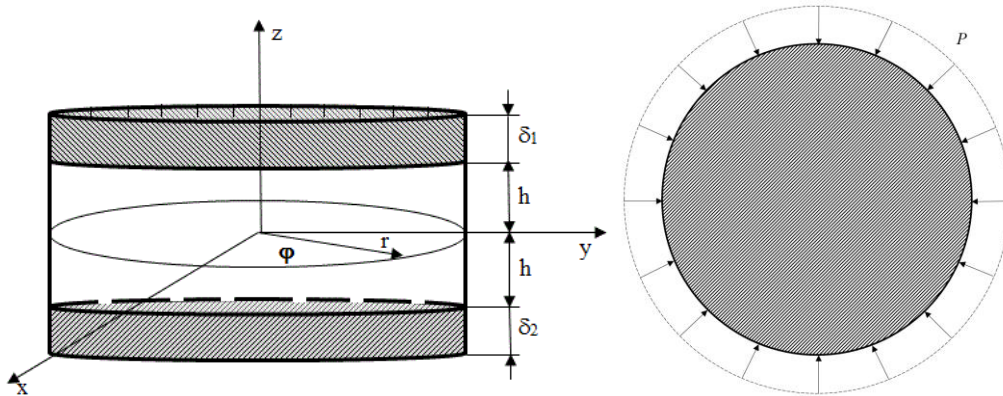


Рис. 1

Відповідно до теореми Лагранжа, яка може бути узагальнена на механічні системи з розподіленими параметрами, у положенні стійкої рівноваги повна потенціальна енергія консервативної механічної системи досягає мінімуму [1].

Відповідно до [1, 2], при розгляді задач статичної стійкості можлива заміна зусилля, що діє в площині пластини на фіктивне поперечне навантаження, яке для круглої пластини в цьому випадку набуде вигляду $Pw_{,r}^2$.

Для зовнішніх шарів, унаслідок їх малої товщини, застосовується гіпотеза Кірхгофа. Напружений стан у цих шарах визначається законом Гука в циліндричній системі координат у стандартній формі [5]:

$$h \leq z \leq h + \delta_1:$$

$$\sigma_r = \frac{E}{(1-\mu^2)}(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\varphi), \quad \sigma_\varphi = \frac{E}{(1-\mu^2)}(\varepsilon_\varphi + \mu\varepsilon_r), \quad \tau_{r\varphi} = G\varepsilon_{r\varphi},$$

$$-h - \delta_2 \leq z \leq -h:$$

$$\sigma_r^* = \frac{E^*}{(1-(\mu^*)^2)}(\varepsilon_r^* + \mu^*\varepsilon_\varphi^*), \quad \sigma_\varphi^* = \frac{E^*}{(1-(\mu^*)^2)}(\varepsilon_\varphi^* + \mu^*\varepsilon_r^*), \quad \tau_{r\varphi}^* = G^*\varepsilon_{r\varphi}^*, \quad (1)$$

де E , G , μ – модуль пружності, модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона відповідно матеріалу шару $h \leq z \leq h + \delta_1$; позначення з індексом (*) в (1) відповідають механічним характеристикам матеріалу шару $-h - \delta_2 \leq z \leq -h$.

Напружений стан у середньому шарі визначається виразами [3], при $-h \leq z \leq h$:

$$\tilde{\sigma}_r = 3\tilde{K}(1 + \chi_2\varepsilon_0^2)\varepsilon_0 + 2\tilde{G}(1 + \gamma_2\psi_0^2)(\tilde{\varepsilon}_r - \varepsilon_0),$$

$$\tilde{\sigma}_\varphi = 3\tilde{K}(1 + \chi_2\varepsilon_0^2)\varepsilon_0 + 2\tilde{G}(1 + \gamma_2\psi_0^2)(\tilde{\varepsilon}_\varphi - \varepsilon_0), \quad (2)$$

$$\tilde{\tau}_{r\varphi} = \tilde{G}(1 + \gamma_2\psi_0^2)\tilde{\varepsilon}_{r\varphi}, \quad \tilde{\tau}_{rz} = \tilde{G}(1 + \gamma_2\psi_0^2)\tilde{\varepsilon}_{rz}, \quad \tilde{\tau}_{\varphi z} = \tilde{G}(1 + \gamma_2\psi_0^2)\tilde{\varepsilon}_{\varphi z}.$$

У (2) позначено: \tilde{G} , \tilde{K} – модулі зсуву та об'ємної деформації матеріалу; ε_0 , ψ_0^2 – середнє відносне подовження та інтенсивність деформацій зсуву:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\tilde{\varepsilon}_r + \tilde{\varepsilon}_\varphi + \tilde{\varepsilon}_z), \quad \psi_0^2 = \frac{8}{9}(\tilde{\varepsilon}_r^2 + \tilde{\varepsilon}_\varphi^2 + \tilde{\varepsilon}_z^2 - \tilde{\varepsilon}_r \tilde{\varepsilon}_\varphi - \tilde{\varepsilon}_\varphi \tilde{\varepsilon}_z - \tilde{\varepsilon}_z \tilde{\varepsilon}_r) + \frac{2}{3}(\tilde{\varepsilon}_{r\varphi}^2 + \tilde{\varepsilon}_{rz}^2 + \tilde{\varepsilon}_{\varphi z}^2),$$

$$\tilde{\varepsilon}_z = -\frac{\tilde{\mu}}{1-\tilde{\mu}}(\tilde{\varepsilon}_r + \tilde{\varepsilon}_\varphi), \quad \tilde{\mu} = \frac{1}{2} \frac{3\tilde{K} - 2\tilde{G}}{3\tilde{K} + \tilde{G}}.$$

Параметр γ_2 , що характеризує зміну форми елемента конструкції в нелінійно-пружній стадії його деформування, визначається експериментально згідно з [3, 8]; параметр χ_2 характеризує зміну об'єму елемента.

Деформований стан пластини в загальному випадку визначається радіальними переміщеннями $u_i(r, \varphi)$, кутовими переміщеннями $v_i(r, \varphi)$ точок серединних площин зовнішніх шарів ($i = 1, 2$) та згином $w(r, \varphi)$.

Виходячи з прийнятих гіпотез, переміщення запишуться в циліндричній системі координат аналогічно [6, 7]:

$$\left\{ \begin{array}{l} h \leq z \leq h + \delta_1: \quad u(r, \varphi, z) = u_1(r, \varphi) + \left(z - h - \frac{\delta_1}{2}\right) w_{,r}, \\ \quad \quad \quad v(r, \varphi, z) = v_1(r, \varphi) + \left(z - h - \frac{\delta_1}{2}\right) \frac{w_{,\varphi}}{r}; \\ -h - \delta_2 \leq z \leq -h: \quad u^*(r, \varphi, z) = u_2(r, \varphi) + \left(z + h + \frac{\delta_2}{2}\right) w_{,r}, \\ \quad \quad \quad v^*(r, \varphi, z) = v_2(r, \varphi) + \left(z + h + \frac{\delta_2}{2}\right) \frac{w_{,\varphi}}{r}; \\ -h \leq z \leq h: \quad \tilde{u}(r, \varphi, z) = u_1(r, \varphi) a_1(z) + u_2(r, \varphi) a_2(z) + c_0^*(z) w_{,r}, \\ \quad \quad \quad \tilde{v}(r, \varphi, z) = v_1(r, \varphi) b_1(z) + v_2(r, \varphi) b_2(z) + c_0^{**}(z) \frac{w_{,\varphi}}{r}. \end{array} \right. \quad (3)$$

У (3), згідно з [6, 7], позначено:

$$a_1(z) = 1 + \alpha_2(z), \quad a_2(z) = -\alpha_2(z), \quad c_0^*(z) = z - h - \frac{\delta_1}{2} - \alpha \alpha_2(z), \quad c_0^{**}(z) = \lambda_3(z) - \alpha \alpha_3(z),$$

$$b_1(z) = 1 + \alpha_3(z), \quad b_2(z) = -\alpha_3(z), \quad \alpha = 2h + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}, \quad \alpha_2(z) = \frac{\Phi_1(z) - \Phi_1(h)}{\Phi_1(h) - \Phi_1(-h)},$$

$$\alpha_3(z) = \frac{\Phi_2(z) - \Phi_2(h)}{\Phi_2(h) - \Phi_2(-h)}, \quad \Phi_1(z) = \frac{1}{G} \int f_1(z) dz, \quad \Phi_2(z) = \frac{1}{G} \int f_2(z) dz.$$

Функції $f_1(z)$, $f_2(z)$ задають закони зміни тангенціальних напружень $\tilde{\tau}_{rz}$ і $\tilde{\tau}_{\varphi z}$ по товщині середнього шару.

Відносні деформації представимо у стандартному вигляді, аналогічному [3].

Для шару $h \leq z \leq h + \delta_1$:

$$\varepsilon_r = u_{,r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} v_{,\varphi} + \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{r} u_{,\varphi} + v_{,r} - \frac{v}{r}; \quad (4)$$

для шару $-h - \delta_2 \leq z \leq -h$:

$$\varepsilon_r^* = u_{,r}^*, \quad \varepsilon_\varphi^* = \frac{1}{r} v_{,\varphi}^* + \frac{u^*}{r}, \quad \varepsilon_{r\varphi}^* = \frac{1}{r} u_{,\varphi}^* + v_{,r}^* - \frac{v^*}{r}; \quad (5)$$

для шару $-h \leq z \leq h$:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_r &= \tilde{u}_{,r}, \quad \tilde{\varepsilon}_\varphi = \frac{1}{r} \tilde{v}_{,\varphi} + \frac{\tilde{u}}{r}, \quad \tilde{\varepsilon}_{r\varphi} = \frac{1}{r} \tilde{u}_{,\varphi} + \tilde{v}_{,r} - \frac{\tilde{v}}{r}, \\ \tilde{\varepsilon}_{rz} &= \tilde{u}_{,z} + w_{,r}, \quad \tilde{\varepsilon}_{\varphi z} = \tilde{v}_{,z} + \frac{1}{r} w_{,\varphi}. \end{aligned} \quad (6)$$

Далі, використовуючи фіктивне поперечне навантаження [1] та функціонал повної потенціальної енергії круглої тришарової пластини при поперечному згині [4], можемо записати функціонал повної потенціальної енергії пластини при стисканні так:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \iint \left(\int_h^{h+\delta_1} \sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\varphi \varepsilon_\varphi + \tau_{r\varphi} \varepsilon_{r\varphi} dz + \int_{-h-\delta_2}^{-h} \sigma_r^* \varepsilon_r^* + \sigma_\varphi^* \varepsilon_\varphi^* + \tau_{r\varphi}^* \varepsilon_{r\varphi}^* dz + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-h}^h \tilde{\sigma}_r \tilde{\varepsilon}_r + \tilde{\sigma}_\varphi \tilde{\varepsilon}_\varphi + \tilde{\tau}_{r\varphi} \tilde{\varepsilon}_{r\varphi} + \tilde{\tau}_{rz} \tilde{\varepsilon}_{rz} + \tilde{\tau}_{\varphi z} \tilde{\varepsilon}_{\varphi z} dz - P w_{,r}^2 \right) r dr d\varphi = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

де P – стискаюче зусилля.

Перепишемо функціонал енергії (7) з урахуванням рівнянь (1)-(6). Беручи до уваги вісесиметричність форми втрати стійкості пластини та відсутність кутових переміщень у цій постановці задачі ($u_1 = -u_2 = u$, $v_1 = -v_2 = v = 0$), рівняння (7) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \iint \left(\int_h^{h+\delta_1} \left(\frac{((1-\mu)I_1 + \mu I_2)EI_1}{(1-2\mu)(1+\mu)} + \frac{((1-\mu)I_2 + \mu I_1)EI_2}{(1-2\mu)(1+\mu)} + GI_3^2 \right) dz + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-h-\delta_2}^{-h} \left(\frac{((1-\mu)I_4 + \mu I_5)E^*I_4}{(1-2\mu)(1+\mu)} + \frac{((1-\mu)I_5 + \mu I_4)E^*I_5}{(1-2\mu)(1+\mu)} + G^*I_6^2 \right) dz + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-h}^h (3K_3 \varepsilon_0 (I_7 + I_8) + G_3 (1 + \gamma_2 \psi) (2((I_7 - \varepsilon_0)I_7 + (I_8 - \varepsilon_0)I_8) + I_9)) dz - P w_{,r}^2 \right) r dr d\varphi = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

У (8) прийняті такі позначення:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{u(r) + \lambda_3(z)w_{,r}}{r}, \quad I_2 = u_{,r} + \lambda_3(z)w_{,rr}, \quad I_3 = 0, \quad I_4 = \frac{-u(r) + \lambda_4^*(z)w_{,r}}{r}, \\ I_5 &= u_{2,r} + \lambda_4^*(z)w_{,rr}, \quad I_6 = 0, \quad I_7 = \frac{a_1(z)u_1 + a_2(z)u_2 + c_0(z)w_{,r}}{r}, \\ I_8 &= a_1(z)u_{1,r} + a_2(z)u_{2,r} + c_0(z)w_{,rr}, \quad I_9 = (w_{,r} + a_{1,z}u(r) + c_{0,z}w_{,r} - a_{2,z}u(r))^2, \\ \lambda_3(z) &= z - h - \frac{\delta_1}{2}, \quad \lambda_4^*(z) = z + h + \frac{\delta_2}{2}. \end{aligned}$$

Лінійно-пружній постановці задачі відповідає випадок, коли у виразі повної потенціальної енергії (8) приймається $\gamma_2 = 0$.

2. СТАТИЧНА СТІЙКІСТЬ У ЛІНІЙНОМУ ВИПАДКУ

Для розв'язання задачі визначення критичного навантаження використовується метод Рітца. Як координатні функції приймемо такі ряди [4].

Для вільного опирання:

$$w(r) = \sum_{s=1}^{\infty} H_s \cos\left(\frac{(2s-1)r\pi}{2R}\right), \quad u(r) = \sum_{s=1}^{\infty} L_s \sin\left(\frac{(2s-1)r\pi}{2R}\right). \quad (9)$$

Для защемлення на контурі:

$$w(r) = \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)^2 \sum_{s=0}^{\infty} H_s \left(\frac{r}{R}\right)^{2s}, \quad u(r) = \left(1 - \frac{r}{R}\right) \sum_{s=0}^{\infty} L_s \left(\frac{r}{R}\right)^{2s+1}. \quad (10)$$

Далі для обчислень будемо використовувати перші чотири члени рядів (9), (10).

Для вільного опирання:

$$\begin{aligned} w(r) &= H_0 \cos\left(\frac{r\pi}{2R}\right) + H_1 \cos\left(\frac{3r\pi}{2R}\right) + H_2 \cos\left(\frac{5r\pi}{2R}\right) + H_3 \cos\left(\frac{7r\pi}{2R}\right), \\ u(r) &= L_0 \sin\left(\frac{r\pi}{2R}\right) + L_1 \sin\left(\frac{3r\pi}{2R}\right) + L_2 \sin\left(\frac{5r\pi}{2R}\right) + L_3 \sin\left(\frac{7r\pi}{2R}\right). \end{aligned} \quad (11)$$

Для защемлення на контурі:

$$\begin{aligned} w(r) &= \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)^2 \left(H_0 + \frac{H_1 r^2}{R^2} + \frac{H_2 r^4}{R^4} + \frac{H_3 r^6}{R^6}\right), \\ u(r) &= \left(1 - \frac{r}{R}\right) \left(\frac{r L_0}{R} + \frac{r^3 L_1}{R^3} + \frac{r^5 L_2}{R^5} + \frac{r^7 L_3}{R^7}\right). \end{aligned} \quad (12)$$

Розглянемо задачу визначення критичного навантаження в лінійно-пружному випадку. Підставляючи апроксимації (11) або (12) у рівняння (8) при $\gamma_2 = 0$ та застосовуючи метод Рітца, отримаємо системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно до параметрів координатних функцій:

$$\frac{\partial E}{\partial H_i} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial L_i} = 0. \quad (13)$$

У лінійній постановці задача визначення критичного навантаження зводиться до задачі на власні значення, аналогічно до того, як це прийнято в літературі [1]. Мінімальне власне значення лінійної системи (13) є оцінкою критичного навантаження $P_{кр}$.

3. СТАТИЧНА СТІЙКІСТЬ У НЕЛІНІЙНОМУ ВИПАДКУ

Для розв'язання задачі визначення критичного навантаження в нелінійно-пружній постановці поведемося аналогічно [6, 7]. А саме, після підстановки координатних функцій (11) або (12) у функціонал енергії (8) та обчислення похідних (13) отримаємо системи нелінійних алгебраїчних рівнянь, наприклад, у випадку вільного опирання:

$$L_i(P, H_0, H_1, H_2, H_3, L_0, L_1, L_2, L_3) = 0, \quad (14)$$

де L_i – деякий нелінійний алгебраїчний оператор, $i = 1 \dots 8$.

Будемо вважати, що оскільки форма втрати стійкості вісесиметрична, прогин у центрі пластини має відмінне від нуля значення. Отже, якщо виразити параметри $P, H_0, H_1, H_2, L_0, L_1, L_2, L_3$ системи (14) через параметр, наприклад, H_3 , то можна, задаючи значення H_3 , визначити критичне навантаження як значення параметру P .

4. ЧИСЕЛЬНІ ПРИКЛАДИ

Як чисельний приклад розглянемо задачу визначення критичного стискаючого навантаження для таких елементів конструкцій:

- 1) одношарової круглої пластини з параметрами: товщина пластини $h = 18 \cdot 10^{-3}$ м, $R = 0,4$ м; модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона зовнішніх шарів – $G = 8 \cdot 10^4$ МПа та $\mu = 0,27$ відповідно;
- 2) тришарової круглої пластини з параметрами: товщина середнього шару $2h = 16 \cdot 10^{-3}$ м, товщина зовнішніх шарів $\delta_1 = \delta_2 = \delta = 1 \cdot 10^{-3}$ м, радіус пластинки $R = 0,4$ м; модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона зовнішніх шарів – $G = 8 \cdot 10^4$ МПа та $\mu = 0,27$ відповідно, модуль зсуву та модуль об'ємної деформації заповнювача – $\tilde{G} = 2,77 \cdot 10^4$ МПа, $\tilde{K} = 6 \cdot 10^4$ МПа (сплав алюмінію Д16Т).

При врахуванні нелінійної пружності матеріалу Д16Т розглянутих елементів конструкцій, приймаємо наступні значення коефіцієнтів: $\gamma_2 = -3,878 \cdot 10^5$, $\chi_2 = 0$ [4].

У таблиці 1 наведено значення критичного стискаючого навантаження, отриманого за розробленою аналітичною моделлю, та порівняння із критичними навантаженнями одношарової пластини [1] та тришарової пластини [2]. Порівняння виконуються для випадку лінійно-пружного заповнювача. Моделі, що використовуються при розрахунках, позначені в таблиці 1 так: 1 – розроблена аналітична модель, 2 – модель Н.А. Алфутова [1], 3 – модель Н.К. Галімова [2].

У таблиці 2 наводяться значення критичного навантаження при врахуванні нелінійної пружності матеріалу заповнювача. Значення критичного навантаження наводяться при різних значеннях параметру H_3 рядів (11), (12).

Критичне зусилля дорівнює мінімальному з отриманих значень при різних параметрах H_3 . Як можна побачити з таблиці 2, значення критичного навантаження тришарової пластини у випадку врахування нелінійної пружності матеріалу заповнювача відхиляється від відповідного критичного навантаження в лінійному випадку на 38% при вільному опиранні, та 37% при защемленні. Різниця в значенні критичного навантаження розробленої аналітичної моделі та значенні за моделлю Н.К. Галімова пояснюється тим, що у [2] заповнювач вважається легким, тобто не сприймає навантажень у площині пластини.

Таблиця 1

К-ть шарів	$P_{кр} \cdot 10^6, \text{Н/м}$					
	Тип закріплення					
	Вільне опирання			Защемлення		
	Модель			Модель		
	1	2	3	1	2	3
1	2,922	2,916	-	10,193	10,192	-
3	1,490	-	0,815	4,371	-	2,890

Таблиця 2

Значення параметру H_3	$P_{кр} \cdot 10^6$, Н/м	
	Вільне опираання	Защемлення
10^{-6}	5,823	2,810
10^{-8}	0,926	2,755
10^{-10}	2,116	2,755
10^{-12}	2,116	2,755
10^{-14}	2,116	2,755

ВИСНОВКИ

Отже, у роботі запропоновані основні рівняння задачі рівноваги тришарової круглої пластини симетричної будови з ізотропними зовнішніми шарами та нелінійно-пружним ізотропним матеріалом заповнювача. Отримано функціонал повної потенціальної енергії для випадку дії стискаючого навантаження у площині пластини.

Результати розрахунків за розробленою аналітичною моделлю порівнюються з іншими відомими роботами. Таке порівняння свідчить про адекватність побудованої аналітичної моделі та можливість використання її для розв'язання нелінійно-пружних задач.

Проілюстровано вплив нелінійної пружності матеріалу заповнювача на величину критичного навантаження. Так, при вільному опиранні спостерігається зменшення критичного навантаження на 38%. При защемленні критичне навантаження зменшується на 37% порівняно з лінійним випадком. Отримані результати загалом не суперечать результатам робіт [6, 7], отриманим для прямокутної пластини.

Перспективи подальшого дослідження пов'язані з розв'язанням задач динаміки тришарових пластин та оболонок.

ЛІТЕРАТУРА

1. Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем / Н.А. Алфутов. – М. : Машиностроение, 1991. – 336 с.
2. Галимов Н. К. Осесимметричный изгиб и устойчивость трехслойных круглых пластин с легким заполнителем / Н.К. Галимов // Прикл. Механика. – 1965. – Т. 1, №1. – С. 77-85.
3. Каудерер Г. Нелинейная механика / Г. Каудерер ; пер. с нем. – М. : Изд-во иностр. лит., 1961. – 777 с.
4. Кудин А. В. Аналитический и численный анализ изгиба круглой трехслойной пластини под действием локальных нагрузок / А.В. Кудин, Ю.Н. Тамуров, С.В. Чопоров // Вісник Запорізького національного університету : Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2014. – № 1. – С. 67-81.
5. Можаровський М. С. Теорія пружності, пластичності і повзучості : Підручник / М.С. Можаровський. – К. : Вища шк., 2002. – 308 с.
6. Тамуров Ю. Н. Вариант обобщённой теории трёхслойных пологих оболочек с учётом обжатия физически нелинейного заполнителя / Ю.Н. Тамуров // Прикл. механика. –1990. – Т. 26, №12. – С. 39-45.
7. Тамуров Ю. Н. Уравнения изгиба и устойчивости трёхслойных оболочек с ортотропными и нелинейно-упругими свойствами материалов / Ю.Н. Тамуров // Исслед. по теор. пластин и оболочек. – 1990. – №20. – С. 102-112.
8. Цурпал И. А. Расчет элементов конструкций из нелинейно-упругих материалов / И.А. Цурпал. – К. : Техника, 1976. – 176 с.
9. Carrera E. Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells / E. Carrera // Applied Mechanics Reviews. – 2003. – Vol. 56, No. 3. – P. 287-308.
10. Carrera E. A Survey With Numerical Assessment of Classical and Refined Theories for the Analysis of Sandwich Plates / E. Carrera, S. Brischetto // Applied Mechanics Reviews. – 2009. – Vol. 62. – P. 1-17.

11. Noor A. K. Computational Models for Sandwich Panels and Shells / A.K. Noor // Applied Mechanics Reviews. – 1996. – Vol. 49, No. 3. – P. 155-199.

REFERENCES

1. Alfutov, N.A. (2000), *Osnovy rascheta na ustoychivost' uprugikh sistem* [Bases of calculation on stability of elastic systems], Mashinostroenie, Moscow.
2. Galimov, N.K. (1965), “Axisymmetric bending and stability of three-layered round plates with a lightweight compressible filler”, *Prikl. mexanika*, vol. 1, no. 1, pp. 77-85.
3. Kauderer, G. (1961), *Nelinejnaya mexanika* [Nonlinear mechanics], Izd-vo inostr. lit., Moscow.
4. Kudin, A.V., Tamurov, Yu.N. and Choporov, S.V. (2014), “Analytical and numerical analysis of circular sandwich plate bending under the local loads”, *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical Sciences*, no. 1, pp 67-81.
5. Mozharovskij, M.S. (2002), *Teoriya pruzhnosti, plastichnosti i povzuchosti* [Elasticity, Plasticity and Creep Theory], Vishha shk., Kyiv, Ukraine.
6. Tamurov, Yu.N. (1990), “Option generalized theory of three-layered shallow shells considering compression physically nonlinear aggregate”, *Prikl. Mexanika*, vol. 26, no. 12, pp. 39-45.
7. Tamurov, Yu.N. (1990), “The equations of bending and stability of two-layer shells with orthotropic and nonlinear elastic properties of materials”, *Issled. po teor. plastin i obolochek*, no. 20, pp. 102-112.
8. Curpal, I.A. (1976), *Raschet e'lementov konstrukcij iz nelinejno-uprugix materialov* [Calculation of structural elements of the nonlinear-elastic materials], Tekhnika, Kiev.
9. Carrera, E. (2003), “Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells”, *Applied Mechanics Reviews*, vol. 56, no. 3, pp. 287-308.
10. Carrera, E. and Brischetto, S. (2009), “A Survey With Numerical Assessment of Classical and Refined Theories for the Analysis of Sandwich Plates”, *Applied Mechanics Reviews*, vol. 62, pp. 1-17
11. Noor, A.K. (1996), “Computational Models for Sandwich Panels and Shells”, *Applied Mechanics Reviews*, vol. 49, no. 3, pp. 155-199.

УДК 539.3

ВПЛИВ ОРІЄНТАЦІЇ КВАДРАТНОГО АБСОЛЮТНО ЖОРСТКОГО ВКЛЮЧЕННЯ НА НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ПРУЖНО- ПЛАСТИЧНИХ ПЛАСТИН

¹Кузь І. С., к. ф.-м. н., доцент, ²Кузь О. Н., к. т. н., доцент, ¹Пиз Н. Я., аспірант

¹Львівський національний університет ім. Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна

²Національний університет «Львівська політехніка»,
вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна

ihorkuz24@gmail.com, olyakuzon@gmail.com, nazarpyz@gmail.com

Розвинуто застосування варіаційно-різницевого методу до розв'язування задач теорії малих пружно-пластичних деформацій для лінійно зміцнених пластин з квадратним абсолютно жорстким включенням з урахуванням їхнього розвантаження. Чисельно розв'язано низку задач про одновісний розтяг пружно-пластичних пластин з квадратним абсолютно жорстким включенням різної орієнтації щодо осі розтягу. Побудовано зони еволюції пластичних деформацій за покровового збільшення навантаження, області залишкових деформацій за розвантаження та отримано навантаження, за якого у пластинах досягаються межі течіння та міцності. З'ясовано вплив орієнтації квадратного абсолютно жорсткого включення у пластинах на величини напружень.
Ключові слова: пластина, квадратне абсолютно жорстке включення, теорія малих пружно-пластичних деформацій, лінійне зміцнення, розвантаження, варіаційно-різницевий метод.