

РАСЧЁТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛАСТОМЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМЫ FORTU-FEM

¹Лаврик В. В., старший преподаватель, ²Оспищев К. С., аспирант

¹*Бердянський державний педагогічний університет,
ул. Шмідта, 4, г. Бердянськ, 71100, Україна*

²*Запорізький національний університет,
ул. Жуковського, 66, г. Запоріжжя, 69600, Україна*

lavrik1975@mail.ru

При проектировании конструкций из эластомерных материалов актуальной является проблема численного анализа их напряженно-деформированного состояния. В механике деформируемого твердого тела существуют классы задач, в которых гипотеза о несжимаемости материала для эластомеров неприемлема. В последнее время применение различных методов анализа объектов при создании машиностроительных конструкций с эластомерными элементами требует исследования закономерностей деформирования тел, выполненных из каучука. В работе таких элементов существенную роль играет сжимаемость материала, которую общие уравнения для несжимаемого материала учесть не позволяют. Данные задачи решаются с помощью систем автоматизированного проектирования (САПР).

Современные САПР ориентированы на решение разных классов задач механики твердого тела. Их преимуществами является удобство в работе с ними, высокая точность автоматизации. Однако следует отметить, что эффективное применение этих программ требует значительных затрат на закрепление принципов работы с ними. Но основным недостатком является то, что конкретную систему невозможно применить для решения задачи, метод решения которой не предусмотрен данной системой.

В данной статье представлена моментная схема конечного элемента на примере пространственного прямоугольного параллелепипеда, а также система FORTU-FEM, в которой реализован этот метод.

Ключевые слова: метод конечных элементов, моментная схема конечного элемента, САПР, эластомер, FORTU-FEM.

РОЗРАХУНОК НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ЕЛАСТОМЕРНИХ КОНСТРУКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ СИСТЕМИ FORTU-FEM

¹Лаврик В. В., старший викладач, ²Оспищев К. С., аспірант

¹*Бердянський державний педагогічний університет,
вул. Шмідта, 4, м. Бердянськ, 71100, Україна*

²*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

lavrik1975@mail.ru

При проектуванні конструкцій з еластомерних матеріалів актуальною є проблема чисельного аналізу їх напружено-деформованого стану. У механіці деформованого твердого тіла існують класи задач, у яких гіпотеза про нестисливість матеріалу для еластомерів неприйнятна. Останнім часом застосування різних методів аналізу об'єктів при створенні машинобудівних конструкцій з еластомерними елементами вимагає дослідження закономірностей деформування тіл, виконаних з каучуку. У роботі таких елементів істотну роль відіграє стисливість матеріалу, яку загальні рівняння для нестисливого матеріалу врахувати не дозволяють. Ці задачі вирішуються за допомогою систем автоматизованого проектування (САПР).

Сучасні САПР орієнтовані на вирішення різних класів задач механіки твердого тіла. Їх перевагами є зручність у роботі з ними, висока точність автоматизації. Однак слід зазначити, що ефективно застосування цих програм вимагає значних витрат на закріплення принципів роботи з ними. Проте основним недоліком є те, що конкретну систему неможливо застосувати для розв'язання задачі, метод вирішення якої непередбачений цією системою.

У статті представлена моментна схема скінченного елемента на прикладі просторового прямокутного паралелепіпеда, а також система FORTU-FEM, у якій реалізовано цей метод.

Ключові слова: метод скінчених елементів, моментна схема скінченного елемента, САПР, еластомер, FORTU-FEM.

CALCULATION OF THE STRESS-STRAIN STATE OF THE ELASTOMERIC STRUCTURES IN USING A SYSTEM FORTU-FEM

¹Lavrik V. V., ²Ospischev K. S.

¹*Berdyansk State Pedagogical University,
Schmidt Street, 4, Berdyansk, 71100, Ukraine*

²*Zaporizhzhue National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

lavrik1975@mail.ru

The design of structures made of elastomeric material is an actual problem of numerical analysis of the stress-strain state.

In solid mechanics, there are classes of problems in which the hypothesis of incompressible elastomer material is unacceptable. This study of large deformations of elastomers, rubber elements thin-payment, etc.

Application recently when creating various engineering structures with elastomeric elements requires investigation of the laws of deformation of thin layers made of rubber. In operation of such elements plays an important role compressibility material. General equations for an incompressible material, these features do not allow to take into account.

In the design problem arises excluding contact between the elastic layers of rubber and rigid bodies, both at small and at large deformations.

Solving these problems encountered considerable difficulties regarding the use of existing mathematical apparatus FEM movements, which in this form being more comfortable than others. This is due to the fact that the pursuit of Poisson's ratio to 0.5 leads to significant computational errors.

Modern computational and computer systems designed for studying the properties of materials that are in the stress-strain state, contains a number of methods of approximate calculations. This solution of large systems of algebraic and transcendental equations, numerical integration and differentiation, etc., as well as a large number of non-standard auxiliary calculations. Implementation of iterative and incremental calculation schemes associated with multiple repetition of these operations. When programming tasks it is necessary to solve the problems of saving computer memory and speed of operation. Long walks on the training tasks on programming and programming. This leads to significant costs and time to the overall implementation of the calculations.

In solving practical problems of mechanics elastomers problem of choosing the most successful as possible optimal design scheme, which is based on a number of specific methods of computational mathematics. At this stage, through insufficient research to talk about the optimality of one or the other of the computational scheme is difficult. This often causes the build different computational algorithms, and then compare their advantages and disadvantages. Received some intermediate and final results of the calculations should be examined on their compliance with the mechanical meaning of the problem. This is also a necessary part of the calculations. Rounding errors and some manifestation of instability calculation algorithms can significantly change the outcome. The process of analyzing the results of a very difficult and time consuming process. Sometimes it does not spend less time than the procedure itself calculation.

These problems are solved with the help of computer-aided design (CAD).

Modern CAD systems are oriented to address different classes of problems of solid mechanics. Their advantage is the ease of working with them, high precision automation. However, it should be noted that the effective use of these programs require considerable costs for fastening principles of them. But the main disadvantage is that a particular system can not be applied to solve the problem, the solution of which method is not allowed this system.

This paper presents a finite element scheme of moment for example spatial cuboid, as well as system FORTU-FEM, that implements this method. The example of application of FORTU-FEM for calculation of the tensional and the deformed states of constructions from elastomers is given.

Key words: Finite element method, the method of finite element moment diagrams, CAD, elastomeric material, FORTU-FEM.

1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

На данном этапе развития строительной механики и вычислительной техники возникает потребность расчета сооружений с учётом особенностей их пространственного деформирования на основе численных методов [13].

В настоящее время метод конечных элементов (МКЭ) получил широкое применение при расчёте сложных объектов в строительстве, машиностроении, самолётостроении, ракетостроении и других областях народного хозяйства. Как численный метод инженерного анализа он приобрёл большую популярность среди специалистов, занимающихся прикладными задачами механики деформированных твёрдых тел, уже давно. Хотя данный метод используется достаточно долго, существует много аспектов, которые ещё не освещены в достаточном объёме или не являются хорошо разработанными.

При использовании традиционных схем метода конечных элементов в форме метода перемещений, построенного на основе вариационного принципа Лагранжа для решения задач с особенностями (таких, как учёт слабой сжимаемости, расчёт пластин на базе трёхмерных конечных элементов и др.), возникают существенные трудности [1, 5], для преодоления которых используются другие вариационные принципы: Кастильяно (метод сил), Хеллингера-Рейсснера, Ху-Вашицу (смешанный метод) и др. [8].

МКЭ в форме метода сил не получил значительного развития в силу сложности при аппроксимации напряжённого состояния. Больше применение нашли смешанные схемы МКЭ. Имея положительные особенности [4], они обладают и рядом недостатков: увеличение порядка разрешающей системы уравнений (относительно МКЭ в форме метода перемещений), нарушение положительной определенности матрицы уравнений. Поэтому для задач с указанными особенностями предпочтительнее развитие гибридных схем МКЭ в форме метода перемещений на базе вариационного принципа Лагранжа.

Стандартный МКЭ в форме метода перемещений требует, чтобы поле перемещений точек внутри конечного элемента (КЭ) аппроксимировалось полиномиальными функциями, а контакт на границах элементов осуществлялся при соблюдении условий неразрывности. Как следует из работ [6, 10], этот вариант МКЭ обладает медленной сходимостью в силу полиномиальности функций. Аппроксимирующие поля перемещений не включают слагаемое, описывающее жесткие смещения КЭ. Этот эффект существенно проявляется при использовании криволинейных КЭ и учет жестких смещений КЭ следует рассматривать не как необходимое условие сходимости, а важное средство повышения эффективности МКЭ при расчете тел криволинейной формы.

В процессе эксплуатации стандартной схемы МКЭ в форме метода перемещений наряду с проявлением жестких смещений КЭ было замечено и другое негативное свойство матрицы жесткости, называемое «эффектом сложного сдвига» [5], а именно: при изгибе тонких пластин и оболочек на базе трехмерных КЭ значительно возрастают погрешности, связанные с проявлением фиктивных сдвиговых деформаций.

Для устранения этих недостатков была разработана моментная схема конечного элемента (МСКЭ) [1, 11], позволяющая учесть основные свойства жестких смещений для изопараметрических и криволинейных КЭ изотропных упругих тел. Суть её заключается в отбрасывании некоторых членов разложения деформаций, реагирующих на жесткие смещения и на появляющиеся фиктивные сдвиговые деформации. При этом точные уравнения связи деформаций и перемещений заменяются приближенными.

Цель этой работы – применение моментной схемы для решения задач механики эластомеров.

2. ВЫВОД ВАРИАЦИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ В СТАТИКЕ

Общую формулу удельной энергии деформации системы, основанную на вариационном принципе Лагранжа [3, 5], можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \Pi = \iiint_V |J| & \left(\varepsilon_{11} \left(\frac{1}{2} D_{11} \varepsilon_{11} + D_{12} \varepsilon_{22} + D_{13} \varepsilon_{33} \right) + \varepsilon_{22} \left(\frac{1}{2} D_{22} \varepsilon_{22} + D_{23} \varepsilon_{33} \right) + \varepsilon_{33} \left(\frac{1}{2} D_{33} \varepsilon_{33} \right) + \right. \\ & \left. + \varepsilon_{12} \left(\frac{1}{2} D_{44} \varepsilon_{12} \right) + \varepsilon_{13} \left(\frac{1}{2} D_{55} \varepsilon_{13} \right) + \varepsilon_{23} \left(\frac{1}{2} D_{66} \varepsilon_{23} \right) \right) dV, \end{aligned} \quad (1)$$

где D_{mn} – коэффициенты матрицы упругости конечного элемента для изотропного материала:

$$D_{m \times n} = \begin{pmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где μ и λ – коэффициенты Ляме.

Рассмотрим моментную схему конечных элементов. Основной её принцип лежит в разложении аппроксимирующей функции в ряд Тейлора с последующим отбрасыванием n -ых членов ряда. Для пространственного прямоугольного шестигранного конечного элемента эта функция, представленная в виде ряда, будет иметь следующий вид:

$$u_k = w_k^{000} + w_k^{100} \psi^{100} + w_k^{010} \psi^{010} + w_k^{001} \psi^{001} + w_k^{110} \psi^{110} + w_k^{101} \psi^{101} + w_k^{011} \psi^{011} + w_k^{111} \psi^{111}, \quad (3)$$

где w_k^{pqr} – коэффициенты разложения, ψ^{pqr} – набор степенных координатных функций, определяемых по формуле:

$$\psi^{pqr} = \frac{x^p y^q z^r}{p! q! r!} \quad (p=0,1; \quad q=0,1; \quad r=0,1). \quad (4)$$

Компоненты тензора деформации разложим в ряд Макларена в окрестности начала координат:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{stg}^{ij} e^{(stg)} \psi^{(stg)} \quad (5)$$

или

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= e_{11}^{00} + e_{11}^{001} \psi^{001} + e_{11}^{010} \psi^{010} + e_{11}^{011} \psi^{011}; & \varepsilon_{22} &= e_{22}^{000} + e_{22}^{001} \psi^{001} + e_{22}^{100} \psi^{100} + e_{22}^{101} \psi^{101}; \\ \varepsilon_{33} &= e_{33}^{000} + e_{33}^{010} \psi^{010} + e_{33}^{100} \psi^{100} + e_{33}^{110} \psi^{110}; & \varepsilon_{12} &= e_{12}^{000} + e_{12}^{001} \psi^{001}; \\ \varepsilon_{13} &= e_{13}^{000} + e_{13}^{010} \psi^{010}; & \varepsilon_{23} &= e_{23}^{000} + e_{23}^{100} \psi^{100}. \end{aligned} \quad (6)$$

В разложении компонент деформаций наряду с коэффициентами разложения деформаций присутствуют коэффициенты разложения жёстких поворотов. Это обстоятельство обуславливает причину замедленной сходимости КЭ. Что бы её устранить отбросим эти члены ряда. После преобразования для данного конечного элемента, учитывая формулы (5)-(7), тензоры деформации будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \sum_{i=1}^8 u_i b_{100}^{k'} (w_{k'}^{i2} + w_{k'}^{i5} y + w_{k'}^{i6} z + w_{k'}^{i8} yz); & \varepsilon_{22} &= \sum_{i=1}^8 v_i b_{010}^{k'} (w_{k'}^{i3} + w_{k'}^{i5} x + w_{k'}^{i7} z + w_{k'}^{i8} xz); \\ \varepsilon_{33} &= \sum_{i=1}^8 \omega_i b_{001}^{k'} (w_{k'}^{i4} + w_{k'}^{i6} x + w_{k'}^{i7} y + w_{k'}^{i8} xy); & \varepsilon_{12} &= \sum_{i=1}^8 u_i b_{100}^{k'} (w_{k'}^{i3} + w_{k'}^{i7} z) + v_i b_{010}^{k'} (w_{k'}^{i2} + w_{k'}^{i6} z); \\ \varepsilon_{13} &= \sum_{i=1}^8 u_i b_{100}^{k'} (w_{k'}^{i4} + w_{k'}^{i7} y) + \omega_i b_{001}^{k'} (w_{k'}^{i2} + w_{k'}^{i5} y); & \varepsilon_{23} &= \sum_{i=1}^8 v_i b_{010}^{k'} (w_{k'}^{i4} + w_{k'}^{i6} x) + \omega_i b_{001}^{k'} (w_{k'}^{i3} + w_{k'}^{i5} x), \end{aligned} \quad (7)$$

где u_i , v_i , ω_i – компоненты перемещений каждого узла в пределах КЭ; w_k^{ij} – коэффициенты поворота узлов, $b_{(\mu\nu\eta)}^{k'}$ – коэффициенты, которые связывают значения узловых смещений и степенные функции $\psi^{(pqr)}$. Для кубического КЭ, который имеет единичные метрики измерения, представленного в естественной системе координат, можно определить коэффициенты $b_{\mu\nu\eta}^{k'}$. Так,

$$b_{100}^{k'} = b_{010}^{k'} = b_{001}^{k'} = 2, \quad \text{а} \quad b_{110}^{k'} = b_{101}^{k'} = b_{011}^{k'} = b_{111}^{k'} = 0. \quad (8)$$

Используя (1), получим формулы для вычисления коэффициентов матрицы жёсткости $[K_{ikjm}]$:

$$K_{i1j1} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_i \partial u_j}, \quad K_{i1j2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_i \partial v_j}, \quad K_{i1j3} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_i \partial w_j};$$

$$K_{i_2j_1} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial v_i \partial u_j}, \quad K_{i_2j_2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial v_i \partial v_j}, \quad K_{i_2j_3} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial v_i \partial w_j};$$

$$K_{i_3j_1} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial w_i \partial u_j}, \quad K_{i_3j_2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial w_i \partial v_j}, \quad K_{i_3j_3} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial w_i \partial w_j}.$$
(9)

Аналогичным образом на основе моментной схемы конечного элемента можно получить матрицу жесткости конечного элемента любой другой формы, в том числе – тетраэдрического.

3. СХЕМА ПРОЕКТИРОВАНИЯ В СИСТЕМЕ FORTU-FEM

САПР FORTU-FEM создан для анализа напряжённо-деформированного состояния сложных инженерных конструкций. Система позволяет инженеру-проектировщику самостоятельно описывать расчётную схему решения задачи в терминах, близких к его предметной области.

Система FORTU-FEM состоит из трёх подсистем: подсистемы подготовки исходных данных для последующего расчёта (препроцессора), подсистемы анализа и расчёта данных (процессора) и подсистемы анализа результатов и выдачи итоговой документации (постпроцессора).

Общая схема работы системы FORTU-FEM приведена на рис. 1. Используемая в системе математическая модель позволяет не только формально описывать общие математические постановки различных задач механики, но и автоматизировать процесс получения необходимых разрешающих уравнений механики деформируемого твердого тела для последующего численного расчета задачи. Точность расчёта непосредственно зависит от выбранного пользователем типа конечных элементов, плотностью конечно-элементной сетки, её структурой и выбранной схемой расчёта.

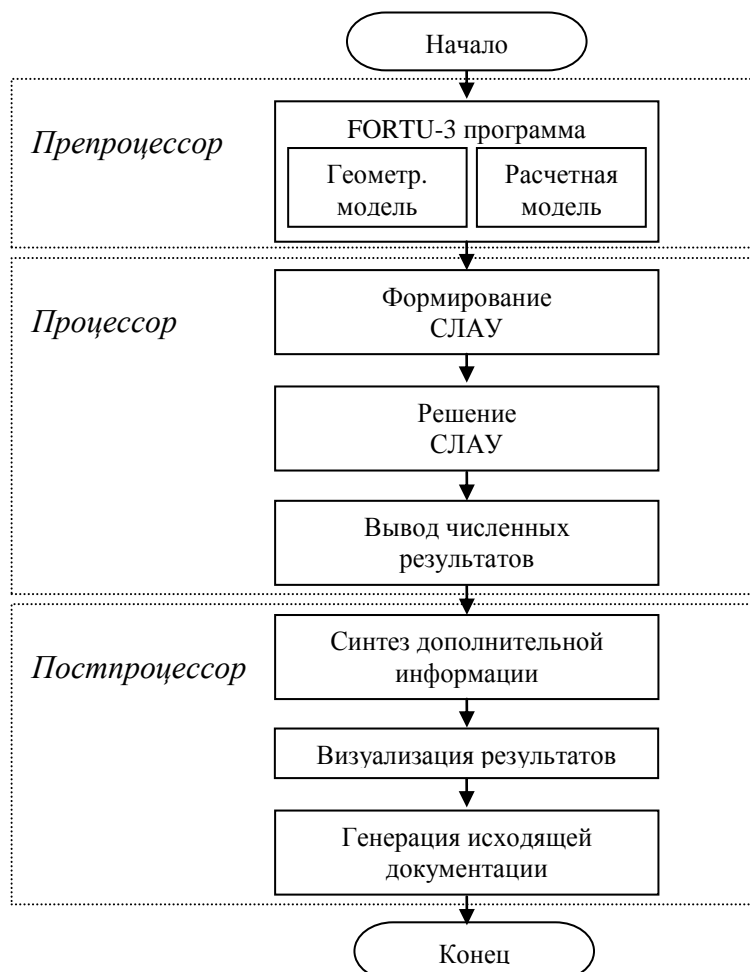


Рис. 1. Общая схема анализа с использованием FORTU-FEM

В рассматриваемом САПрe схема расчёта основывается на традиционном методе вариационного исчисления – методе конечных элементов. В данной работе разработан дополнительный модуль, в основу которого легла моментная схема конечного элемента. Он позволил расширить возможности FORTU-FEM и увеличить точность расчёта объектов.

4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Рассмотрим простейшую задачу теории упругости, приведённую в [12]. Призматический стержень жёстко закреплён с одной стороны и под действием собственного веса удлиняется в другую сторону (рис. 2). Исходные данные: размеры стержня в плане $0,01 \times 0,01$ м, высота $h = 0,02$ м, модуль упругости $E = 2$ МПа, плотность материала $\rho = 1200 \text{ кг/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,49$.

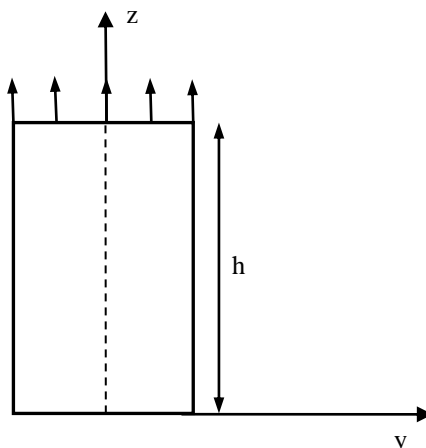


Рис. 2. Расчётная схема растяжения призматического стержня под действием собственного веса

Аналитическое решение данной задачи получим из формулы $w = -\frac{\rho g}{2E}(h^2 - z^2)$, которая выражает сдвиг точек, лежащих на оси Z . Максимальное удлинение данной конструкции составляет $w = 11,76 \cdot 10^{-7}$ м.

В таблице 1 представлены результаты расчётов данной конструкции методом моментных схем в случае неравномерного разбиения на конечные элементы. Можно увидеть, что наилучший результат (наименьшая погрешность) при расчёте растяжения призматического стержня получается при разбиении его на 1258 конечных элементов. На рис. 3 приведены графики сравнения результатов перемещений узлов, находящихся на оси Z , при оптимальном разбиении на КЭ.

Таблица 1 – Результаты расчёта призматического стержня

№	Кол-во КЭ	Кол-во узлов	$w, \times 10^{-7}$ м	Погрешность
1	69	39	10,81	8,08%
2	176	66	10,55	10,29%
3	337	138	11,03	6,21%
4	558	198	11,12	5,44%
5	1258	371	12,00	2,04%

В рассмотренном примере данные, полученные с использованием моментной схемы, при $\nu = 0,49$, хорошо согласуются с аналитическим решением.

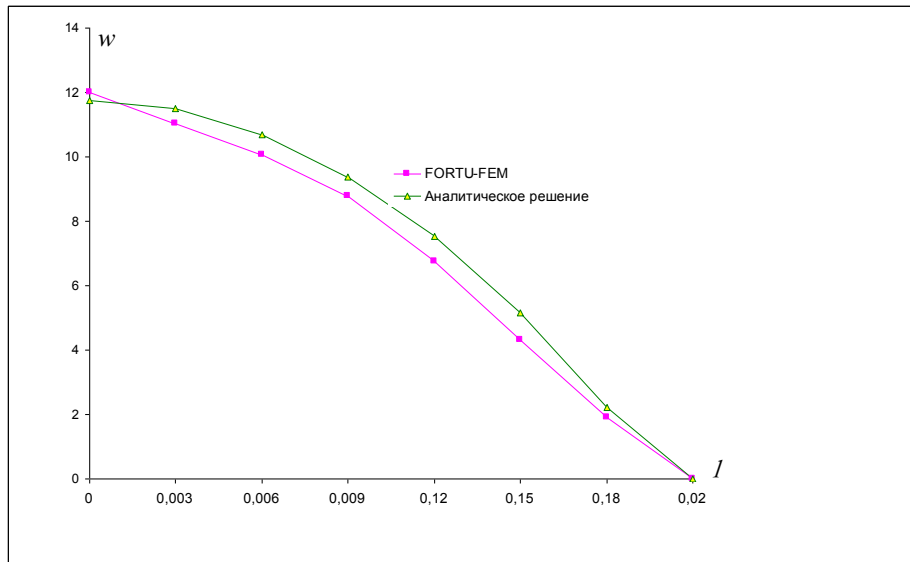


Рис. 3. Сравнение результатов расчёта призматического стержня с помощью системы FORTU-FEM и аналитических формул $w_k \cdot 10^{-7}$

В механике эластомеров используется метод определения механических свойств резины при растяжении. Исследуется прочность материалов, относительное удлинение при разрыве и напряжение при заданном удлинении. Сущность метода заключается в следующем: образец закрепляется с двух сторон и растягивается с постоянной скоростью до момента разрыва.

Образцы для испытания имеют вид двусторонней лопатки (рис. 5). Они вырубаются из вулканизированных пластин толщиной $(2,0 \pm 0,2)$ специальными ножами.

Т.к. исследуемая лопатка является симметричной, то для расчёта напряжённо-деформированного состояния была использована половина объекта. Один конец прочно закреплён, а к другому приложена сила.

С помощью препроцессора системы FORTU-FEM также была построена конечно-элементная модель лопатки, состоящая из 1463 узлов и 4347 элементов (рис. 4-5).

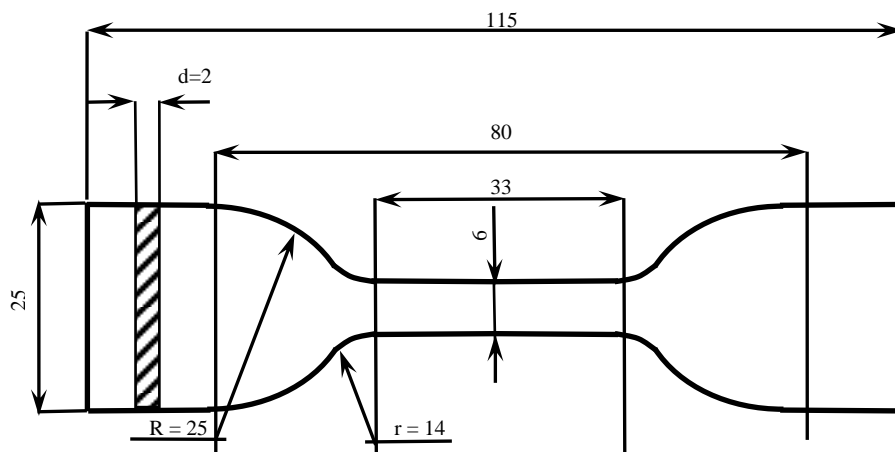


Рис. 4. Образец для испытания в форме двусторонней лопатки

На рис. 6 приведён пример распределения перемещений u вдоль всего образца. Материал, используемый в данном случае, – «Теплостойкая резина» со следующими характеристиками: модуль Юнга $E = 6$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,49$. Распределённая нагрузка, приложенная к незакреплённому концу, равна $q = 10,5$ МПа.

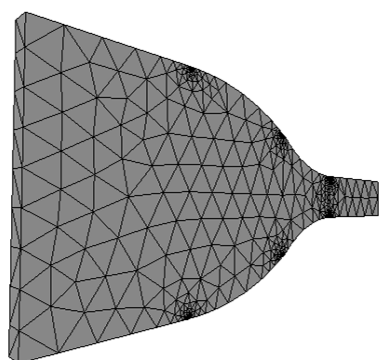
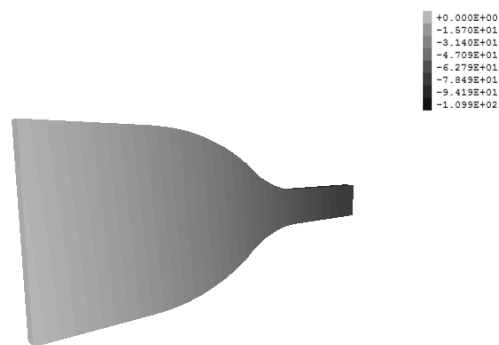


Рис.5. Дискретная модель лопатки

Рис. 6. Распределение перемещений u в лопатке из материала «Теплостойкая резина»

Относительное удлинение, полученное с помощью системы FORTU- FEM, составляет 100%. Этот результат соответствует данным, приведённым в [9]. Далее, в таблице 2, представлены результаты расчётов листовой резины различных физико-механических свойств.

Таблица 2 – Результаты расчёта листовой резины различных физико-механических свойств

Марки резин	Распределённая нагрузка q , МПа	Модуль Юнга E , МПа	Относительное удлинение материалов, полученное с помощью системы FORTU- FEM, в %
Кислощелочестойкая	5,6	2,75	100
Морозостойкая	5,75	3,25	100
Маслобензостойкая марки А	11	4,75	150
Маслобензостойкая марки Б	7	3,06	150
Маслобензостойкая марки В	6,85	3,00	150

Образцы брались повышенной твёрдости с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,49$.

Анализ результатов показывает, что используемая в системе FORTU-FEM моментная схема конечных элементов для расчёта конструкций, находящихся в напряжённо-деформированном состоянии, показывает адекватность полученных результатов.

ВЫВОДЫ

Опыт решения различных задач анализа напряженно-деформированного состояния твёрдых тел на основе МКЭ показал, что традиционный вариант МКЭ нередко обладает медленной сходимостью, в особенности для массивных тел и оболочек сложных криволинейных форм.

В данной статье показана сходимость моментной схемы конечных элементов на основании расчётов призматического стержня и двухсторонней лопатки. Получены параметры напряжённо-деформированного состояния двусторонней лопатки для разных марок резины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайберг Д. В. Вывод матрицы жёсткостных характеристик дискретного элемента произвольной формы / Д.В. Вайберг, А.С. Сахаров, В.В. Киричевский // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1971. – Вып. 14. – С. 37-44.
2. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Ричард Галлагер. – М. : Мир, 1984. – 428 с.
3. Зенкевич О. К. Метод конечных элементов в технике / О.К. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 541 с.

4. Киричевский В. В. Метод конечных элементов в механике эластомеров / В.В. Киричевский. – К. : Наукова думка, 2002. – 655 с.
5. Киричевский В. В. Нелинейные деформации термомеханики конструкций из слабосжимаемых эластомеров / В.В. Киричевский, А.С. Сахаров. – К. : Будівельник, 1992. – 215 с.
6. Киричевский В. В. Реализация метода конечных элементов в расчете нетонких пластин и оболочек сложной геометрии / В.В. Киричевский, А.С. Сахаров, Г.В. Исаханов // Сопrotivlenie materialov i teoriya sooruzheniy. – 1976. – Вып. 28. – С. 148-162.
7. Лаврик В. В. Инструментальная система FORTU-FEM: структура организации и перспективы дальнейшего развития / В. В. Лаврик // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2010. – Вып. 3(39). – С. 244-251.
8. Лаевский Ю. М. Моделирование фильтрации двухфазной жидкости смешанным методом конечных элементов / Ю.М. Лаевский, П.Е. Попов, А.А. Калинин // Математическое моделирование. – 2010. – Т. 22. – № 3. – С. 74-90.
9. Потураев Н. В. Резиновые и резино-металлические детали машин / Н.В. Потураев. – М. : Машиностроение, 1966. – С. 24.
10. Сахаров А. С. Модификация метода Ритца для расчета массивных тел на основе полиномиальных разложений с учетом жестких смещений / А.С. Сахаров // Сопrotivlenie materialov i teoriya sooruzheniy. – 1974. – Вып. 23. – С. 61-70.
11. Сахаров А. С. Моментная схема конечных элементов (МСКЭ) с учетом жестких смещений / А.С. Сахаров // Сопrotivlenie materialov i teoriya sooruzheniy. – 1974. – Вып. 24. – С. 147-156.
12. Тимошенко С. П. Теория упругости / С.П. Тимошенко. – Л. : Главная редакция технико-теоретической литературы, 1937. – С. 244-246.
13. Zona A. Finite element models for nonlinear analysis of steel-concrete composite beams with partial interaction in combined bending and shear / A. Zona, G. Ranzi // Finite Elements in Analysis and Design, February 2011, Pages 98-118.

REFERENCE

1. Vayberg, D.V., Sakharov, A.S. and Kirichevskiy, V.V. (1971), “Evaluation of elastic matrix for a discrete element of arbitrary shape”, *Soprotivlenie materialov i teoriya sooruzheniy*, issue 14, pp. 37-44.
2. Gallagher, R. (1984), *Metod konechnykh elementov. Osnovy* [The Finite Element Method. Basics], Mir, Moscow, USSR.
3. Zenkevich, O.K. (1975), *Metod konechnykh elementov v tekhnike* [The Finite Element Method in Technics], Mir, Moscow, USSR.
4. Kirichevskiy, V.V. (2002), *Metod konechnykh elementov v mekhanike elastomerov* [The Finite Element Method in elastomers mechanics], Naukova Dumka, Kiev, Ukraine.
5. Kirichevskiy, V.V. and Sakharov, A.S. (1992), *Nelineynye deformatsii termomekhaniki konstruktсий iz slaboszhimaemykh elastomerov* [Nonlinear deformations of elastomeric constructions termomechanics], Budivelnik, Kiev, Ukraine.
6. Kirichevskiy, V.V., Sakharov, A.S. and Isakhanov, G.V. (1976) “The Finite Element Method implementation for thick plates and shells with complex geometry”, *Soprotivlenie materialov i teoriya sooruzheniy*, issue 28, pp. 148-162.
7. Lavrik, V.V. (2010) “CAD FORTU-FEM: structure of application and its future perspectives”, *Vesnik Khersonskogo natsional'nogo tekhnicheskogo universiteta*, issue 3(39), pp. 244-251.
8. Laevsky, Yu.M., Popov, P.E., and Kalinkin, A.A. (2010), “Simulation of two-phase fluid filtration by mixed finite element method”, *Mathematical Modelling*, vol. 22, no. 3, pp. 74-90.
9. Poturaev, N.V. (1966), *Rezinovye i rezino-metallicheskie detali mashin* [Rubbery and rubber-metallic structures of machines], Mashinostroenie, Moscow, USSR.
10. Sakharov, A.S. (1974), “Ritz Method modification for calculation of massive bodies on the basis of polynomial decomposition taking into account rigid mixtures”, *Soprotivlenie materialov i teoriya sooruzheniy*, issue 23, pp. 61-70.
11. Sakharov, A.S. (1974), “Moment scheme for finite element taking into account rigid mixtures”, *Soprotivlenie materialov i teoriya sooruzheniy*, issue 24, pp. 147-156.
12. Timoshenko, S.P. (1937), *Teoriya uprugosti* [Linear elasticity], Glavnaya redaktsiya tekhniko-teoreticheskoy literatury, Leningrad, USSR.
13. Zona, A. and Ranzi, G. (2011), “Finite element models for nonlinear analysis of steel-concrete composite beams with partial interaction in combined bending and shear”, *Finite Elements in Analysis and Design*, February 2011, pp. 98-118.