

2. Gavela, S.P. and Levchuk, S.A. (1994), "Deformation the cylindrical goffes", *Dep. v UkrINTEI*, №116-Uk94, 10 p.
3. Levchuk, S.A. (1995), "Deformation corrugated shells", *Sbornyk nauchnyh trudov, posvashonyh 10-letyu unyversyteta, Ser. Matematika, fizyka*, pp. 50-54.
4. Kuzemko, V.A. and Levchuk, S.A. (1999), "Research deformation the polysections shell constructions", *Voprosy mehaniky deformyrovanya i razrushenya tverdyh tel*, pp. 130-134.
5. Levchuk, S.A. (2004), "The construction matrix of Green of static problem of theory the thin corrugated plates", *Novy materyaly i tehnologyy v metalyrgyy i mashynostroenyi*, pp. 103-106.
6. Birger, M.N. and Panovko, Ia.G. (1968), *Prochnost, ustoychivost, kolebanya* [Strength, stability, oscillations], Mashynostroenyi, Moscow, Russia.

УДК 519.63

ИТЕРАЦИОННАЯ СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ В МКЭ С ОПТИМАЛЬНЫМ ВЫБОРОМ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

¹Литвин О. Н., ²Носов К. В., ³Баранова Т. А.

¹Украинская инженерно-педагогична академия,
ул. Университетская, 16, г. Харьков, 61000, Украина

²Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61022, Украина

³Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»,
ул. Фрунзе, 21, г. Харьков, 61002, Украина

¹academ_mail@ukr.net, ²k-n@nm.ru, ³tbaranova31@mail.ru

В статье изложена схема метода конечных элементов для эллиптических краевых задач, основанная на выборе базисных функций из условия минимума функционала энергии задачи. В данной схеме вид базисных функций не задается предварительно, а подлежит нахождению наряду с узловыми параметрами, формирующими приближенное решение. Для модельной задачи исследован итерационный алгоритм построения приближенного решения, получены апостериорные оценки, характеризующие изменение погрешности в энергетической норме, порожденной оператором задачи, на каждом шаге алгоритма. Численный пример для модельной задачи демонстрирует особенности преимущества данной схемы над классическими схемами МКЭ.

Ключевые слова: метод конечных элементов, оптимальные базисные функции, энергетический метод, апостериорные оценки, эллиптические граничные задачи.

ІТЕРАЦІЙНА СХЕМА ПОБУДОВИ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ У МКЕ З ОПТИМАЛЬНИМ ВИБОРОМ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

¹Литвин О. М., ²Носов К. В., ³Баранова Т. А.

¹Українська інженерно-педагогічна академія,
вул. Університетська, 16, м. Харків, 61000, Україна

²Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна,
майдан Свободи, 4, м. Харків, 61022, Україна

³Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»,
вул. Фрунзе, 21, м. Харків, 61002, Україна

¹academ_mail@ukr.net, ²k-n@nm.ru, ³tbaranova31@mail.ru

У статті викладена схема методу скінченних елементів для еліптичних крайових задач, заснована на виборі базисних функцій з умови мінімуму функціонала енергії завдання. У даній схемі вид базисних функцій не задається заздалегідь, а підлягає знаходженню поряд з вузовими параметрами, що формують наближене

рішення. Для модельної задачі досліджений ітераційний алгоритм побудови наближеного рішення, отримані апостеріорні оцінки, що характеризують зміну похибки в енергетичній нормі, породженої оператором завдання, на кожному кроці алгоритму. Чисельний приклад для модельної задачі демонструє особливості переваги даної схеми над класичними схемами МСЕ.

Ключові слова: метод кінцевих елементів, оптимальні базисні функції, енергетичний метод, апостеріорні оцінки, еліптичні граничні задачі.

ITERATIVE SCHEME FOR BUILDING APPROXIMATE SOLUTIONS IN FEM WITH OPTIMAL CHOICE OF BASIS FUNCTIONS FOR ELLIPTIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS

¹Litvin O. N., ²Nosov K. V., ³Baranova T. A.

¹*Ukrainian Engineer-pedagogical academy,
Universitetskaya str., 16, Kharkov, 61000, Ukraine*

²*V.N. Karazin Kharkiv national university,
Svobody sqr., 4, Kharkov, 61022, Ukraine*

³*National technical university "Kharkiv Polytechnic Institute",
Frunze str., 21, Kharkov, 61002, Ukraine*

¹academ_mail@ukr.net, ²k-n@nm.ru, ³tbaranova31@mail.ru

Finite element method is a widely use numerical technique for finding approximate solutions for boundary value problems for differential equations. The method uses subdivision of a whole problem domain into simpler parts, called finite elements, and variational methods for elliptic boundary value problems to solve the problem by minimizing an energy functional associated with initial task.

In any FEM schema the choice of basis functions forming an approximate solution is a matter of primary importance. In works of different authors a number of different classes of basis functions was proposed. As usual basis functions are piece-wise polynomial interpolators satisfying required smoothness and boundary conditions, but in many cases the relation of basis functions' choice with an operator of the problem is weak. First an idea of calculating the basis functions along with FEM parameters was suggested in the pioneer work of Litvin [3]. As further investigations demonstrated, this approach is enough fruitful.

In the present paper the authors have developed a scheme for elliptic boundary value problems, for which each node of the mesh is related with a separate system of basis functions that are selected from conditions of minimum of the problem's energy functional. By this aspect the suggested scheme essentially differs from previous approaches, based on a single system of basis functions, calculated by minimizing the energy functional.

The paper showed, that desired approximate solution should satisfy two systems of equations expressing extremum of the energy functional by node parameters (Ritz system) and by basis functions. The latter depends on selected class of basis functions.

For a model problem (the Poisson equation for Dirichlet boundary conditions) with piece-wise linear basis functions the scheme was investigated in details. For calculation of approximate solution an iterative process was developed. On each step of the process either a new iteration of node parameters or a new iteration of basis functions is calculated.

For corresponding step of the iteration the unique existence of parameters of basis functions is proved. For both types of iteration an *a posteriori* decrement of the approximate solution' error in the energetic norm generalized by the problem's operator was obtained.

The numerical experiments carried out in the work showed the following fact. For sparse meshes the approximate solution with basis functions' choice has the accuracy in the energetic norm, which can be reached by classical FEM solution with given basis functions by using essentially larger numbers of degrees of freedom (parameters of a model), that may have a primary importance for large-scale and multidimensional problems.

Key words: finite element method, optimal basis functions, energy method, a posteriori estimations, elliptic boundary value problems.

ВВЕДЕНИЕ

Общая идея метода конечных элементов, возникшего несколько десятилетий назад, вытекает из классических методов строительной механики и состоит в расчленении сложной системы на простые элементы с последующим соединением их в единое целое. Эту плодотворную идею дискретной аппроксимации удалось в дальнейшем развить и перенести из области задач строительной механики на более сложные классы механических и немеханических задач, сделав тем самым МКЭ универсальным средством решения краевых задач математической физики.

При построении схем МКЭ возникает задача выбора системы базисных функций, с помощью которых строится приближенное решение. В работах многих авторов предложено большое количество различных систем базисных функций, большинство из которых представляют собой кусочно-полиномиальные интерполянты, обеспечивающие нужный класс дифференцируемости искомого приближенного решения и согласованности этого решения с граничными условиями исходной задачи [1, 2]. Из свойств приближенного решения вытекает его важнейшее свойство – порядок сходимости приближенного решения к точному в той или иной норме при дроблении сетки. Несмотря на разнообразие схем МКЭ для краевых задач с частными производными, практическое нахождение приближенного решения с высокой точностью связано с препятствиями, относящимися к значительному росту вычислительных затрат и накоплением погрешностей округления при увеличении степеней свободы и увеличении степени используемых интерполянтов.

Из этого вытекает необходимость разработки схем МКЭ, которые при заданном и, желательно, небольшом числе степеней свободы обеспечивали бы минимальную погрешность приближенного решения. Анализ схем МКЭ показывает, что используемые системы базисных функций учитывают только некоторые свойства краевой задачи (упомянутые свойства принадлежности приближенного решения определенному классу гладкости, согласованность с граничными условиями задачи) и мало связаны со свойствами дифференциального оператора задачи. Учет этих последних свойств дает один из плодотворных подходов к решению этой проблемы.

Схемы МКЭ с выбором базисных функций, которые являются оптимальными с точки зрения минимизации функционала энергии вариационной задачи, эквивалентной исходной, впервые предложены в работах О.Н. Литвина [3]. В дальнейших работах О.Н. Литвина, К.В. Носова, Т.А. Барановой [4-7] были разработаны различные вычислительные схемы МКЭ с выбором базисных функций. Например, в работе [4] координатные функции приближенного решения строились с использованием сплайнов первой степени, параметры которых определялись из условия минимума функционала энергии с использованием метода Гауса-Зейделя.

Целью работы является разработка вычислительной схемы МКЭ для краевых задач эллиптического типа с границей специального вида с выбором базисных функций, основанном на вариационной постановке исходной задачи. В этом смысле статья является обобщением работы [7]. В качестве модельной задачи, для которой детально исследована предложенная схема, выбрана задача Дирихле для уравнения Пуассона в $\mathbb{R}^n$. Вычислительный эксперимент, проведенный для модельной задачи на нескольких областях, демонстрирует высокую точность предложенной схемы.

ОБЩАЯ СХЕМА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПОРЯДКА $2m$

Рассмотрим граничную задачу для самосопряженного дифференциального оператора

$$\begin{aligned} Au(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega, \\ \partial^s u / \partial \mathbf{v}^s &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad s = \overline{0, m-1}, \end{aligned} \quad (1)$$

где Ω – n -мерная область в $\mathbb{R}^n$, границы которой состоят из участков гиперплоскостей размерности $n-1$, параллельных координатным гиперплоскостям, $\mathbf{v}$ – нормаль к $\partial\Omega$, $f(\mathbf{x}) \in L_2(\Omega)$, A – самосопряженный дифференциальный оператор эллиптического типа порядка $2m$:

$$A = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D_{\mathbf{x}}^{\alpha} (a_{\alpha}(\mathbf{x}) D_{\mathbf{x}}^{\alpha} u), \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n). \quad (2)$$

Вводится разбиение области Ω на гиперпараллелепипеды гиперплоскостями $\{\mathbf{x} | x_k = x_{k,i_k}\}$, $k = \overline{1, n}$, $i_k = \overline{1, N_k}$. Приближенное решение граничной задачи (1) строится с использованием

узловых параметров в каждой точке разбиения $(x_{1,i_1}, x_{2,i_2}, \dots, x_{n,i_n})$ и системы функций, которые обеспечивают нужную степень гладкости решения.

Пусть $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 \dots dx_n$, $\Delta_{k,i_k} = x_{k,i_k+1} - x_{k,i_k}$, $k = \overline{1, n}$, $i_k = \overline{1, N_k}$. Гиперпараллелепипед, отвечающий $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n)$, обозначим $\Pi_{\mathbf{i}} = \left\{ \mathbf{x} \mid x_k \in [x_{k,i_k}, x_{k,i_k+1}], k = \overline{1, n} \right\}$. В $\Pi_{\mathbf{i}}$ приближенное решение представим как

$$\tilde{u}_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}) = \sum_{r_1=0}^{m-1} \dots \sum_{r_n=0}^{m-1} \sum_{\mu_1=0}^1 \dots \sum_{\mu_n=0}^1 u_{\mathbf{i}+\boldsymbol{\mu}}^{\langle i_1, \dots, i_n \rangle} \prod_{q=1}^n h_{q, \mathbf{i}, 1-\mu_q, r_q} \left(\frac{x_q - x_{q,i_q}}{\Delta_{q,i_q}} \right) \Delta_{q,i_q}^{r_q}, \quad (3)$$

где $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, $\mathbf{i} + \boldsymbol{\mu} = (i_1 + \mu_1, i_2 + \mu_2, \dots, i_n + \mu_n)$, а функции $h_{q, \mathbf{i}, 1-\mu_q, p}(\cdot)$ имеют достаточную степень гладкости и обладают свойствами:

$$h_{q, \mathbf{i}, 1-\mu_q, p}^{(s)}(\gamma) = \delta_{\mu, \gamma} \delta_{s, p}, \quad \mu_q = 0, 1; \quad \gamma = 0, 1; \quad s = \overline{0, m-1}; \quad p = \overline{0, m-1}; \quad q = 0, 1, \quad (4)$$

где δ – символ Кронекера. Для всех узловых параметров $u_{i_1, \dots, i_n}^{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle}$ и узлов $\mathbf{x} = (x_{1,i_1}, x_{2,i_2}, \dots, x_{n,i_n})$ в области Ω выполняется условие $D^a \tilde{u}(\mathbf{x}) = u_{i_1, \dots, i_n}^{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle}$. Представление (3) расширяет схему, предложенную в [7], путем использования для каждого узлового параметра отдельной системы координатных функций.

Приближенное решение ищется из условия минимума функционала энергии, отвечающего задаче (1),

$$J(u) = \int_{\Omega} \left[\sum_{|a| \leq m} a_{\alpha}(\mathbf{x}) (D_{\mathbf{x}}^a u(\mathbf{x})) - 2f(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) \right] d\mathbf{x}$$

по координатным функциям $h_{q, \mathbf{i}, 1-\mu_q, r_q}(\cdot)$ и узловым параметрам $u_{i_1, \dots, i_n}^{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle}$.

Следуя [7], можно показать следующее. Узловые параметры $u_{i_1, \dots, i_n}^{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle}$ и координатные функции $h_{q, \mathbf{i}, 1-\mu_q, r_q}(\cdot)$, реализующие минимум функционала энергии, удовлетворяют системе Ритца $\frac{\partial J(\tilde{u})}{\partial u_{i_1, \dots, i_n}^{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle}} = 0$ по всем узловым параметрам и системе уравнений, определяющей минимум функционала $J(\tilde{u})$ по системе базисных функций $h_{q, \mathbf{i}, 1-\mu_q, p}(\cdot)$. Вид последней системы зависимости от избранного класса гладкости функций $h_{q, \mathbf{i}, 1-\mu_q, r_q}(\cdot)$ с учетом условий (4).

МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА – ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В $\mathbb{R}^3$

Детально исследуем данную схему для построения приближенного решения для модельной задачи

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= f(x, y), \quad (x, y) \in G \subset \mathbb{R}^2, \\ u(x, y) &= 0, \quad (x, y) \in \partial \bar{G}. \end{aligned} \quad (5)$$

Учитывая предположения относительно области G , ее можно разбить прямыми $x = x_i$, $i = \overline{0, n_x}$, $y = y_j$, $j = \overline{0, n_y}$ на прямоугольные элементы $\Pi_{ij} = \{(x, y) : x_i \leq x \leq x_{i+1}; y_j \leq y \leq y_{j+1}\}$. Обозначим $\Delta_{1,i} = x_{i+1} - x_i$, $\Delta_{2,j} = y_{j+1} - y_j$. В соответствии с изложенной схемой, с каждым

узлом разбиения связывается система из 4 базисных функций. Приближенное решение в элементы представляется в форме

$$\tilde{u}(x, y) = \sum_{k=i}^{i+1} \sum_{l=j}^{j+1} u_{k,l} h_{i+1-k,k,l} \left(\frac{x-x_i}{\Delta_{1,i}} \right) H_{j+1-l,k,l} \left(\frac{y-y_j}{\Delta_{2,j}} \right). \quad (6)$$

Согласно изложенной общей схеме, приближенное решение $\tilde{u}(x, y)$ ищем из условия минимума функционала энергии

$$J(u) = \iint_G \left((u'_x(x, y))^2 + (u'_y(x, y))^2 + 2f(x, y)u(x, y) \right) dx dy, \quad (7)$$

соответствующего задаче (5), по базисным функциям $h_{\mu,i,j}(\cdot)$, $H_{\mu,i,j}(\cdot)$ ($\mu=0,1$) и узловым параметрам $u_{i,j}$. Как указывалось, в зависимости от выбора классов базисных функций, возможны различные подходы к построению решения задачи (5). Детально исследуем схему для кусочно-линейных базисных функций. Определим их следующим образом. Пусть N_x, N_y – целые числа, больше 1. Будем считать функции $h_{\mu,i,j}(\cdot)$ ($\mu=0,1$) линейными на интервалах $[k/N_x, (k+1)/N_x]$, $k=0, \overline{N_x-1}$, и, аналогично, $H_{\mu,i,j}(\cdot)$ – линейными на $[k/N_y, (k+1)/N_y]$, $k=0, \overline{N_y-1}$. Кроме того, пусть выполнено

$$\begin{aligned} h_{\mu,i,j}(k/N_x) &= h_{\mu,i,j,k}, \quad k=0,1,\dots,N_x, \quad h_{\mu,i,j,0} = \delta_{1-\mu,0}, \quad h_{\mu,i,j,N_x} = \delta_{1-\mu,1}, \\ H_{\mu,i,j}(k/N_y) &= H_{\mu,i,j,k}, \quad k=0,1,\dots,N_y, \quad H_{\mu,i,j,0} = \delta_{1-\mu,0}, \quad H_{\mu,i,j,N_y} = \delta_{1-\mu,1}, \end{aligned}$$

где δ – символ Кронекера. В соответствии с этими определениями каждая базисная функция $h_{\mu,i,j}(\cdot)$ и $H_{\mu,i,j}(\cdot)$ задается соответственно N_x-1 и N_y-1 параметрами. Очевидно, выполнено $\tilde{u}(x_i, y_j) = u_{i,j}$ для всех внутренних точек (x_i, y_j) .

Приближенное решение $\tilde{u}(x, y)$ находим из условия минимума функционала энергии, отвечающего задаче (7). Минимизация осуществляется по узловым параметрам $u_{i,j}$ и свободным параметрам $h_{1,i,j,k}$, $h_{0,i,j,k}$, $H_{1,i,j,k}$, $H_{0,i,j,k}$

$$J(\tilde{u}) \rightarrow \min \text{ (по } u_{i,j}, h_{1,i,j,k}, h_{0,i,j,k}, H_{1,i,j,k}, H_{0,i,j,k} \text{)}.$$

Минимизацию проводим с помощью следующего итерационного процесса. Выбирается некоторое начальное приближение для параметров $h_{1,i,j,k}$, $h_{0,i,j,k}$, $H_{1,i,j,k}$, $H_{0,i,j,k}$, которое обозначим $h_{1,i,j,k}^{(0)}$, $h_{0,i,j,k}^{(0)}$, $H_{1,i,j,k}^{(0)}$, $H_{0,i,j,k}^{(0)}$, где верхний индекс $\langle 0 \rangle$ означает начальное приближение. Схему процесса можно представить (начиная с $n=0$) следующим образом:

$$\begin{aligned} \{h_{1,i,j,k}^{(n)}, h_{0,i,j,k}^{(n)}, H_{1,i,j,k}^{(n)}, H_{0,i,j,k}^{(n)}\} &\mapsto u_{i,j}^{(n)}, \\ \{u_{i,j}^{(n)}, h_{0,i,j,k}^{(n)}, H_{1,i,j,k}^{(n)}, H_{0,i,j,k}^{(n)}\} &\mapsto h_{1,i,j,k}^{(n+1)}, \quad \{u_{i,j}^{(n)}, h_{1,i,j,k}^{(n)}, H_{1,i,j,k}^{(n)}, H_{0,i,j,k}^{(n)}\} \mapsto h_{0,i,j,k}^{(n+1)}, \\ \{h_{1,i,j,k}^{(n+1)}, h_{0,i,j,k}^{(n+1)}, H_{1,i,j,k}^{(n)}, H_{0,i,j,k}^{(n)}\} &\mapsto u_{i,j}^{(n+1)}, \\ \{u_{i,j}^{(n+1)}, h_{1,i,j,k}^{(n+1)}, h_{0,i,j,k}^{(n+1)}, H_{0,i,j,k}^{(n)}\} &\mapsto H_{1,i,j,k}^{(n+1)}, \quad \{u_{i,j}^{(n+1)}, h_{1,i,j,k}^{(n+1)}, h_{0,i,j,k}^{(n+1)}, H_{1,i,j,k}^{(n)}\} \mapsto H_{0,i,j,k}^{(n+1)}, \\ \{h_{1,i,j,k}^{(n+1)}, h_{0,i,j,k}^{(n+1)}, H_{1,i,j,k}^{(n+1)}, H_{0,i,j,k}^{(n+1)}\} &\mapsto u_{i,j}^{(n+1,n+1)}. \end{aligned}$$

Эта схема означает, что набор параметров слева от стрелки подставляется в функционал энергии и из условия его минимума находятся параметры, стоящие справа от стрелки. Решение системы Ритца (шаг $\{h_{1,i,j,k}^{(n)}, h_{0,i,j,k}^{(n)}, H_{1,i,j,k}^{(n)}, H_{0,i,j,k}^{(n)}\} \mapsto u_{i,j}^{(n,n)}\}$) не представляет трудностей и всегда является единственным. Опишем нахождение итераций для параметров $h_{1,i,j,k}$, $h_{0,i,j,k}$, $H_{1,i,j,k}$, $H_{0,i,j,k}$. Пусть $\Pi_{i,m}$, $\Pi_{i,m+1}$, ..., $\Pi_{i,M}$ – такая совокупность прямоугольных элементов, что их границы $\{(x, y) | x_i \leq x \leq x_{i+1}, y = y_j\}$ при $j = \overline{m, M+1}$ принадлежат ∂G , а при $j = \overline{m+1, M}$ – не принадлежит. Обозначим $\mathbf{P}_{i,m,M} = \bigcup_{j=m}^M \Pi_{i,j} = \{(x, y) | x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_m \leq y \leq y_{M+1}\}$. Очевидно, область $\mathbf{P}_{i,m,M}$ (за исключением ее границы) лежит в G . Как следует из представленной итерационной процедуры, на шаге $\{u_{i,j}^{(n,n)}, h_{0,i,j,k}^{(n)}, H_{1,i,j,k}^{(n)}, H_{0,i,j,k}^{(n)}\} \mapsto h_{1,i,j,k}^{(n+1)}$ происходит вычисление $h_{1,i,j,k}$ (предполагается, что параметры $h_{0,i,j,k}$, $H_{1,i,j,k}$, $H_{0,i,j,k}$ относятся к $\tilde{u}(x, y)$ в $\mathbf{P}_{i,m,M}$). В соответствии со структурой приближенного решения, нахождение можно производить по отдельности в каждой такой области $\mathbf{P}_{i,m,M}$.

Предположим, что для области $\mathbf{P}_{i,m,M}$ все узлы (x_i, y_j) при $j = \overline{m+1, M}$ – внутренние для G . Покажем однозначность нахождения $h_{1,i,j,k}$. Ниже для сокращения записи верхние индексы в обозначениях этих параметров опустим.

Теорема 1. Значения $h_{1,i,j,k}$ находятся из системы линейных уравнений порядка $(N_x - 1)(M - m)$

$$A\mathbf{h} = \mathbf{F}, \quad (8)$$

где $\mathbf{h} = (h_{1,i,m+1,1}, \dots, h_{1,i,m+1,N_x-1}, \dots, h_{1,i,M,1}, \dots, h_{1,i,M,N_x-1})^T$ – вектор искомых параметров, причем матрица A – невырожденная.

Доказательство. Матрицу A получают путем подстановки решения в функционал энергии и нахождения производных $\frac{\partial J(\tilde{u})}{\partial h_{1,i,j,k}} = 0$ для $k = \overline{1, N_x - 1}$, $j = \overline{m+1, M}$. Доказательство невырожденности матрицы основано на том, что функционал энергии, вычисленный по области $\mathbf{P}_{i,m,M}$, как функция от $\mathbf{h}$, представляется собой сумму положительно определенной квадратичной формы от $\mathbf{h}$, линейной формы от $\mathbf{h}$ и константы. Данная функция, очевидно, имеет единственный минимум, который дает решение (8). Теорема доказана.

Аналогичные результаты имеют место и для других шагов итерационного процесса, т. е. при нахождении $h_{0,i,j,k}$, $H_{1,i,j,k}$, $H_{0,i,j,k}$.

Получим апостериорную оценку изменения квадрата погрешности приближенного решения в энергетической норме, соответствующую шагу $\{u_{i,j}^{(n,n)}, h_{0,i,j,k}^{(n)}, H_{1,i,j,k}^{(n)}, H_{0,i,j,k}^{(n)}\} \mapsto h_{1,i,j,k}^{(n+1)}$.

Пусть $\tilde{u}(x, y; u_{i,j}^{(n,n)}, h_{1,i,j,k}^{(v)}, h_{0,i,j,k}^{(n)}, H_{1,i,j,k}^{(n)}, H_{0,i,j,k}^{(n)})$ – приближенное решение, построенное на основе параметров $u_{i,j}^{(n,n)}$, $h_{1,i,j,k}^{(v)}$, $h_{0,i,j,k}^{(n)}$, $H_{1,i,j,k}^{(n)}$, $H_{0,i,j,k}^{(n)}$, $v = n, n+1$.

Теорема 2. Пусть элементы $\Pi_{i,m}$, $\Pi_{i,m+1}$, ..., $\Pi_{i,M}$ удовлетворяют условиям Теоремы 1. Тогда

$$\left\| \tilde{u}(x, y; u_{i,j}^{[n,n]}, h_{1,i,j,k}^{[n]}, h_{0,i,j,k}^{[n]}, H_{1,i,j,k}^{[n]}, H_{0,i,j,k}^{[n]}) - u_0 \right\|_{\Delta}^2 -$$

$$\left\| \tilde{u}(x, y; u_{i,j}^{[n]}, h_{1,i,j,k}^{[n+1]}, h_{0,i,j,k}^{[n]}, H_{1,i,j,k}^{[n]}, H_{0,i,j,k}^{[n]}) - u_0 \right\|_{\Delta}^2 \geq \lambda \left\| \mathbf{h}^{[n]} - \mathbf{h}^{[n+1]} \right\|^2$$

для некоторого $\lambda > 0$, здесь $\| \cdot \|_{\Delta}$ – энергетическая норма, порождаемая оператором задачи Δ , $\| \cdot \|$ – евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^{(M-m)(N_x-1)}$.

Доказательство. Основано на представлении функционала энергии задачи как функции параметров $\mathbf{h}$ (Теорема 1) в виде $J(\mathbf{h}) = (\mathbf{A}\mathbf{h}, \mathbf{h}) - 2(\mathbf{F}, \mathbf{h}) + C$, где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{(M-m)(N_x-1)}$, C – константа, не зависящая от $\mathbf{h}$. Число λ равно минимальному собственному числу матрицы $\mathbf{A}$ (оно всегда положительно ввиду положительной определенности $\mathbf{A}$).

Аналогичные оценки имеют место и при нахождении очередных итераций параметров $h_{0,i,j,k}$, $H_{1,i,j,k}$, $H_{0,i,j,k}$.

Для шага итерации $\{h_{1,i,j,k}^{(n+1)}, h_{0,i,j,k}^{(n+1)}, H_{1,i,j,k}^{(n)}, H_{0,i,j,k}^{(n)}\} \mapsto u_{i,j}^{(n+1,n)}$ имеет место сходная апостериорная оценка. Пусть $\tilde{u}(x, y; u_{i,j}^{(v,n)}, h_{1,i,j,k}^{(n+1)}, h_{0,i,j,k}^{(n+1)}, H_{1,i,j,k}^{(n)}, H_{0,i,j,k}^{(n)})$ – приближенное решение до (при $v = n$) и соответственно после ($v = n+1$) данного шага. Нахождение параметров $u_{i,j}$ из условия минимума функционала энергии задачи получаем из системы Ритца $\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{G}$, где $\mathbf{B}$ – матрица Ритца, $\mathbf{u}$ – набор искомых $u_{i,j}$. Обозначим векторами $\mathbf{u}^{(v)}$ наборы параметров $u_{i,j}^{(v,n)}$ $v = n, n+1$.

Теорема 3. Для указанного шага итерации имеет место оценка

$$\left\| \tilde{u}(x, y; u_{i,j}^{(n,n)}, h_{1,i,j,k}^{(n+1)}, h_{0,i,j,k}^{(n+1)}, H_{1,i,j,k}^{(n)}, H_{0,i,j,k}^{(n)}) - u_0 \right\|_{\Delta}^2 - \left\| \tilde{u}(x, y; u_{i,j}^{(n+1,n)}, h_{1,i,j,k}^{(n+1)}, h_{0,i,j,k}^{(n+1)}, H_{1,i,j,k}^{(n)}, H_{0,i,j,k}^{(n)}) - u_0 \right\|_{\Delta}^2 \geq \mu \left\| \mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^{(n+1)} \right\|^2,$$

для некоторого $\mu > 0$, $\| \cdot \|_{\Delta}$ – энергетическая норма, порождаемая оператором задачи Δ , $\| \cdot \|$ – евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^Q$, где Q – размерность $\mathbf{u}^{(v)}$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} & J\left(\tilde{u}(x, y; u_{i,j}^{(n,n)}, h_{1,i,j,k}^{(n+1)}, h_{0,i,j,k}^{(n+1)}, H_{1,i,j,k}^{(n)}, H_{0,i,j,k}^{(n)})\right) - J\left(\tilde{u}(x, y; u_{i,j}^{(n+1,n)}, h_{1,i,j,k}^{(n+1)}, h_{0,i,j,k}^{(n+1)}, H_{1,i,j,k}^{(n)}, H_{0,i,j,k}^{(n)})\right) = \\ & = \left\| \tilde{u}(x, y; u_{i,j}^{(n,n)}, h_{1,i,j,k}^{(n+1)}, h_{0,i,j,k}^{(n+1)}, H_{1,i,j,k}^{(n)}, H_{0,i,j,k}^{(n)}) - u_0 \right\|_{\Delta}^2 - \left\| \tilde{u}(x, y; u_{i,j}^{(n+1,n)}, h_{1,i,j,k}^{(n+1)}, h_{0,i,j,k}^{(n+1)}, H_{1,i,j,k}^{(n)}, H_{0,i,j,k}^{(n)}) - u_0 \right\|_{\Delta}^2 = \\ & = (\mathbf{B}\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{u}^{(n)}) - 2(\mathbf{G}, \mathbf{u}^{(n)}) - (\mathbf{B}\mathbf{u}^{(n+1)}, \mathbf{u}^{(n+1)}) + 2(\mathbf{G}, \mathbf{u}^{(n+1)}) = \\ & = (B(\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^{(n+1)}), \mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^{(n+1)}) + (\mathbf{B}\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{u}^{(n+1)}) + (\mathbf{B}\mathbf{u}^{(n+1)}, \mathbf{u}^{(n)}) - (\mathbf{B}\mathbf{u}^{(n+1)}, \mathbf{u}^{(n+1)}) - \\ & - 2(\mathbf{G}, \mathbf{u}^{(n)}) - (\mathbf{B}\mathbf{u}^{(n+1)}, \mathbf{u}^{(n+1)}) + 2(\mathbf{G}, \mathbf{u}^{(n+1)}) = (B(\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^{(n+1)}), \mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^{(n+1)}) \geq \mu \left\| \mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^{(n+1)} \right\|^2. \end{aligned}$$

В качестве μ можно взять минимальное собственное число матрицы $\mathbf{B}$ (оно положительно для матрицы Ритца). Теорема доказана.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Вычислительный эксперимент был проведен для модельной задачи с константой в правой части ($\Delta u(x, y) = -2$) для двух областей: Γ -образной ($([0, 2] \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times [0, 2])$, область a) и Z -образной ($([0, 1] \times [0, 1]) \cup ([0, 3] \times [1, 2]) \cup ([2, 3] \times [2, 3])$, область b). Для приближенного

решения с выбором базисных функций использовалось разбиение с $\Delta_{1,x} = \Delta_{2,y} = 1/2$. На рис. 1 представлены используемые в эксперименте области с нанесенными сетками.

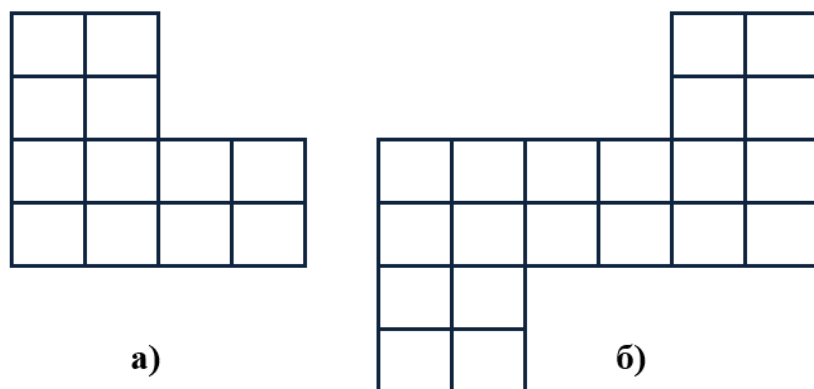


Рис. 1. Области a , b с нанесенной сеткой, используемые для вычислительного эксперимента

Итерационный процесс завершался, когда изменение функционала энергии для соседних итераций становилось пренебрежимо малым. Для нашего случая вычисления достаточно было остановить при нахождении параметров $u_{i,j}^{(3)}$, $h_{1,i,j,k}^{(3)}$, $h_{0,i,j,k}^{(3)}$, $H_{1,i,j,k}^{(3)}$, $H_{0,i,j,k}^{(3)}$. Для приближенного решения, основанного на данных параметрах, вычислялось классическое приближенное решение с максимальным диаметром разбиения, имеющее в энергетической норме не меньшую точность, чем решение с выбором функций. Назовем это решение *эквивалентным* (имея ввиду, что оно дает сравнимую точность с решением с выбором базисных функций). Здесь под классическим приближенным решением понимается решение в виде (6) с линейными базисными функциями. Использование функционала энергии как меры точности приближенного решения данной эллиптической задачи основано на связи погрешности решения в энергетической норме с функционалом $J(u) = \|u - u_0\|_{\Delta}^2 - \|u_0\|_{\Delta}^2$, где $\|\cdot\|_{\Delta}$ – энергетическая норма, связанная с оператором задачи Δ . Для приближенного решения с выбором базисных функций на каждом шаге итерационного процесса вычислялись: $J(\tilde{u})$ – функционал энергии от данного решения; N_{apr} – число степеней свободы данного решения (общее число узловых параметров и параметров, связанных с базисными функциями); N_{cls} – число степеней свободы эквивалентного классического приближенного решения; C_{apr} – максимальное из чисел обусловленности матрицы A из уравнения (8) и матрицы Ритца (11); C_{cls} – число обусловленности матрицы Ритца, используемой при нахождении эквивалентного приближенного классического решения. Шаг разбиения классического решения выбирался равномерным, при этом $\Delta_{1,x} = \Delta_{2,y}$. В качестве начальных приближений базисных функций выбирались линейные функции.

Таблица 1 – Характеристики приближенных решений с кусочно-линейными базисными функциями для областей a , b

Область	N_x, N_y	N_{apr}	$J(\tilde{u})$	C_{apr}	N_{cls}	C_{cls}
a	3	45	-0,82331608	5,958283062	85	28,37214130
	4	65	-0,83372808	15,24330663	120	38,26283431
	6	105	-0,84117916	33,80613231	208	64,15706082
	8	145	-0,84378994	59,89769215	261	78,79849508
	10	185	-0,84499888	93,39351449	320	95,57584792
b	3	77	-1,53294644	5,980329834	146	28,78790660
	4	113	-1,55226254	15,29992224	204	38,96902391
	6	185	-1,56608490	33,9319599	352	65,15460070
	8	261	-1,57092803	60,12059305	441	80,22556185
	10	333	-1,57317067	93,74114592	441	80,22556185

Из табл. 1 следует, что использование схемы с кусочно-линейными базисными функциями дает заметные преимущества только для небольших значений N_x , N_y . Например, для области a при $N_x = 3$, $N_y = 3$ приближенное решение с кусочно-линейными базисными функциями и эквивалентное ему классическое приближенное решение характеризуются тем, что отношение N_{cls}/N_{apr} равно примерно 2, а C_{cls}/C_{apr} – примерно 5. С увеличением N_x , N_y данные отношения убывают. Это говорит о том, что сопоставимые по точности приближенные решения сближаются по этим двум важным характеристикам, т.е. при значительных N_x , N_y решение с выбором базисных функций утрачивает преимущества перед классическим. Аналогичная особенность имеет место и для области b , что, видимо, является общим свойством данной схемы.

ВЫВОДЫ

В данной работе предложено дальнейшее расширение вычислительной схемы МСЭ с выбором оптимальных базисных функций для эллиптических краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Схема отличается от ранее предложенных использованием локальной системы базисных функций, связанных с каждым узлом, в отличие от общей системы функций, предложенной ранее. Это повышает адаптивность вычислительной схемы. Предложенная схема была применена к модельной задаче, для которой был разработан итерационный метод построения приближенного решения. Метод включает итерации двух видов: решение системы Ритца и нахождение системы базисных функций. Если решение системы Ритца является классической процедурой МКЭ, то нахождение системы базисных функций зависит от выбранного класса данных функций. На основании этих результатов проведен вычислительный эксперимент, продемонстрировавший, что метод с выбором базисных функций дает сравнимую точность с классическим МКЭ, для которого базисные функции фиксированы, *при значительно меньшем числе искомых параметров*.

Отметим, что решение граничных задач с помощью данной схемы позволяет использовать алгоритмы с распараллеливанием вычислений, так как нахождение базисных функций в отдельных подобластях (в нашей модельной задаче – в полосе, составленной из прямоугольных элементов) происходит независимо. Эта особенность схемы может оказаться важной при решении задач с областями сложной конфигурации или задач высокой размерности.

Отметим, что в данной работе исследуются свойства решения с выбором базисных функций только для фиксированной сетки; исследованию случая, связанного с уменьшением диаметра сетки, предполагается посвятить отдельную работу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ciarlet P. G. The Finite Element Method for Elliptic Problems / P.G. Ciarlet // Publisher : SIAM : Society for Industrial and Applied Mathematics; 2nd edition. – 2002. – 530 p.
2. Zienkiewicz O. C. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals / O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, J.Z. Zhu. – Butterworth-Heinemann, 2005. – 752 p.
3. Литвин О. Н. К вопросу о построении оптимальных схем МКЭ / О.Н. Литвин // Тезисы докл. 2-й респ. конференции «Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе». – К., 1978. – С. 21-22.
4. Баранова Т. А. Про чисельну реалізацію оптимального методу скінчених елементів (задача Діріхле для рівняння Пуассона, прямокутні елементи) / Т.А. Баранова, О.М. Литвин, В.В. Федько // Вісник Львівської Політехніки. – 1998. – Т. 2, № 337. – С. 294-297.
5. Литвин О. Н. Некоторые аспекты численной реализации оптимального метода конечных элементов на примере бигармонической задачи с краевыми условиями второго рода / О.Н. Литвин, К.В. Носов // Кибернетика и системный анализ. – 1999. – № 1. – С. 178-187.
6. Баранова Т. А. Обчислювальна схема методу скінчених елементів з вибором оптимальних координатних функцій для еліптичних крайових задач / Т.А. Баранова, О.М. Литвин, К.В. Носов // Вісник Харківського національного університету. – 2011. – № 977. – С. 35-49.
7. Литвин О. Н. Оптимальные координатные функции в методе конечных элементов / О.Н. Литвин // Дифференциальные уравнения. – 1984. – Т 20, № 4. – С.677-688.

REFERENCES

1. Ciarlet, P.G. (2002), "The Finite Element Method for Elliptic Problems", *Publisher: SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics*; 2nd edition, 530 p.
2. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and Zhu, J.Z. (2005), "The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals", Butterworth-Heinemann.
3. Litvin, O.N. (1978), "K voprosu o postroenii optimalnykh skhem MKE", *Tezisy dokl. 2-y resp. konferentsii "Vychislitel'naya matematika v sovremennom nauchno-tehnicheskome progrese"*, pp. 21-22.
4. Baranova, T.A., Lytvyn, O.M. and Fedko, V.V. (1998), "Pro chiselnu realizatsiyu optimalnogo metodu skinchennikh elementiv (zadacha Dirikhle dlya rivniannya Puassona, priamokutni elementi)", *Visnyk Lvivskoyi Politekhniky*, vol. 2, no. 337, pp. 294-297.
5. Litvin, O.N. and Nosov, K.V. (1999), "Nekotorye aspekty chislennoy realizatsii optimalnogo metoda konechnykh elementov na primere bigarmonicheskoy zadachi s kraevymi usloviiami vtorogo roda", *Kibernetika i sistemnyi analiz*, no. 1, pp. 178-187.
6. Baranova, T.A., Lytvyn, O.M. and Nosov, K.V. (2011), "Obchysliuvalna skhema metodu skinchenikh elementiv z viborom optimalnikh koordinatneykh funktsiy dlia eliptichnikh kraiovikh zadach", *Visnyk Harkivskogo natsionalnogo universitetu*, no. 977, pp. 35-49.
7. Litvin, O.N. (1984), "Optimalnye koordinatnye funktsii v metode konechnykh elementov", *Differentsialnye uravneniya*, vol. 20, no. 4, pp. 677-688.

УДК 539:634.074.432:62-112.5

ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ СИЛОВОГО НАГРУЖЕНИЯ НА ДЕФОРМИРОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОДОЛЬНО СЖАТОЙ УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПОПЕРЕЧНЫМ РАЗРЕЗОМ

Лихачёва О. В., к. т. н.

*Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры,
ул. Чернышевского 24а, г. Днепропетровск, 49600, Украина*

lykhachova.olga@gmail.com

В среде программного комплекса ANSYS выполнен сравнительный анализ трех решений задачи устойчивости продольно сжатой цилиндрической оболочки с одним поперечным разрезом различных размеров: линейный расчет *I*, геометрически нелинейный расчет *II* и геометрически нелинейный расчет *III* оболочек с начальной погибью. Анализ осуществлялся для двух схем силового нагружения оболочки: с поворотом плоскости торцов (схема 1) и при параллельном смещении торцов (схема 3). Сравнение результатов всех типов расчетов показало существенное отличие как критических, так предельных нагрузок выпучивания оболочек для рассматриваемых схем. Независимо от схемы нагружения, для оболочек идеальной геометрии установлен немонотонный характер уменьшения нагрузок потери устойчивости по мере увеличения разреза. Для оболочек с погибью отмечена линейная зависимость нагрузок выпучивания от размера разреза.

Ключевые слова: устойчивость, цилиндрическая оболочка, поперечный разрез, численное моделирование, схемы нагружения

ВПЛИВ УМОВ СИЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ДЕФОРМУВАННЯ І СТІЙКІСТЬ ПОЗДОВЖНЬО СТИСНУТОЇ ПРУЖНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ПОПЕРЕЧНИМ РОЗРІЗОМ

Лихачова О. В., к. т. н.

*Придніпровська державна академія будівництва та архітектури,
вул. Чернишевського 24а, м. Дніпропетровськ, 49600, Україна*

lykhachova.olga@gmail.com

У середовищі програмного комплексу ANSYS виконано порівняльний аналіз трьох розв'язків задачі стійкості поздовжньо стиснутої циліндричної оболонки з одним поперечним розрізом різних розмірів: лінійний розрахунок *I*, геометрично нелінійний розрахунок *II* і геометрично нелінійний розрахунок *III* оболонок з