

## REFERENCES

1. Ciarlet, P.G. (2002), "The Finite Element Method for Elliptic Problems", *Publisher: SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics*; 2nd edition, 530 p.
2. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and Zhu, J.Z. (2005), "The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals", Butterworth-Heinemann.
3. Litvin, O.N. (1978), "K voprosu o postroenii optimalnykh skhem MKE", *Tezisy dokl. 2-y resp. konferentsii "Vychislitel'naya matematika v sovremennom nauchno-tekhnicheskom progresse"*, pp. 21-22.
4. Baranova, T.A., Lytvyn, O.M. and Fedko, V.V. (1998), "Pro chiselnu realizatsiyu optimalnogo metodu skinchennikh elementiv (zadacha Dirikhle dlya rivniannya Puassona, priamokutni elementi)", *Visnyk Lvivskoyi Politekhniky*, vol. 2, no. 337, pp. 294-297.
5. Litvin, O.N. and Nosov, K.V. (1999), "Nekotorye aspekty chislennoy realizatsii optimalnogo metoda konechnykh elementov na primere bigarmonicheskoy zadachi s kraevymi usloviiami vtorogo roda", *Kibernetika i sistemyi analiz*, no. 1, pp. 178-187.
6. Baranova, T.A., Lytvyn, O.M. and Nosov, K.V. (2011), "Obchysliuvalna skhema metodu skinchenikh elementiv z viborom optimalnikh koordinatneykh funktsiy dlia eliptichnikh kraiovikh zadach", *Visnyk Harkivskogo natsionalnogo universitetu*, no. 977, pp. 35-49.
7. Litvin, O.N. (1984), "Optimalnye koordinatnye funktsii v metode konechnykh elementov", *Differentsialnye uravneniia*, vol. 20, no. 4, pp. 677-688.

УДК 539:634.074.432:62-112.5

## ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ СИЛОВОГО НАГРУЖЕНИЯ НА ДЕФОРМИРОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОДОЛЬНО СЖАТОЙ УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПОПЕРЕЧНЫМ РАЗРЕЗОМ

Лихачёва О. В., к. т. н.

*Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры,  
ул. Чернышевского 24а, г. Днепропетровск, 49600, Украина*

lykhachova.olga@gmail.com

В среде программного комплекса ANSYS выполнен сравнительный анализ трех решений задачи устойчивости продольно сжатой цилиндрической оболочки с одним поперечным разрезом различных размеров: линейный расчет *I*, геометрически нелинейный расчет *II* и геометрически нелинейный расчет *III* оболочек с начальной погибью. Анализ осуществлялся для двух схем силового нагружения оболочки: с поворотом плоскости торцов (схема 1) и при параллельном смещении торцов (схема 3). Сравнение результатов всех типов расчетов показало существенное отличие как критических, так предельных нагрузок выпучивания оболочек для рассматриваемых схем. Независимо от схемы нагружения, для оболочек идеальной геометрии установлен немонотонный характер уменьшения нагрузок потери устойчивости по мере увеличения разреза. Для оболочек с погибью отмечена линейная зависимость нагрузок выпучивания от размера разреза.

*Ключевые слова: устойчивость, цилиндрическая оболочка, поперечный разрез, численное моделирование, схемы нагружения*

## ВПЛИВ УМОВ СИЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ДЕФОРМУВАННЯ І СТІЙКІСТЬ ПОЗДОВЖНЬО СТИСНУТОЇ ПРУЖНОЇ ЦИЛИНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ПОПЕРЕЧНИМ РОЗРІЗОМ

Лихачова О. В., к. т. н.

*Придніпровська державна академія будівництва та архітектури,  
вул. Чернишевського 24а, м. Дніпропетровськ, 49600, Україна*

lykhachova.olga@gmail.com

У середовищі програмного комплексу ANSYS виконано порівняльний аналіз трьох розв'язків задачі стійкості поздовжньо стиснутої циліндричної оболонки з одним поперечним розрізом різних розмірів: лінійний розрахунок *I*, геометрично нелінійний розрахунок *II* і геометрично нелінійний розрахунок *III* оболонок з

початковим вигином. Аналіз здійснювався для двох схем силового навантаження оболонки: з поворотом площини торців (схема 1) та при паралельному зміщенні торців (схема 3). Порівняння результатів усіх типів розрахунків показало суттєву відмінність як критичних, так граничних навантажень оболонок для розглянутих схем. Незалежно від схеми навантаження, для оболонок ідеальної геометрії встановлено немонотонний характер зменшення навантажень втрати стійкості у міру збільшення розрізу. Для оболонок з вигином виявлено лінійну залежність навантажень випучування від розміру розрізу.

*Ключові слова:* стійкість, циліндрична оболонка, поперечний розріз, чисельне моделювання, схеми навантаження

## **INFLUENCE OF FORCE LOADING CONDITIONS ON BUCKLING OF AXIALLY COMPRESSED ELASTIC CYLINDRICAL SHELL WITH ONE TRANSVERSAL CUT**

Lykhachova O. V., Ph. D. in Technical Sciences

*Prydniprov's'ka State Academy of Civil Engineering and Architecture,  
Chernyshevsky str. 24a, Dnipropetrovsk, 49600, Ukraine*

lykhachova.olga@gmail.com

The numerical buckling analyses of axially compressed elastic thin-walled cylinders with one transversal cut of variable length ( $l = 0 \div 91^\circ.7$ ) are realized by means of ANSYS software (ANSYS Inc. Academic Research, Mechanical Analysis, Release 13.0, customer 298728; in the framework of the Institutional academic cooperation program, grant no. 3.4 – Fokoop – UKR/1070297 supported by Alexander von Humboldt Foundation). The research deals with three buckling solutions: geometrically linear buckling solution *I* for determination of eigenvalues; geometrically nonlinear stress-strain state solution *II* for computation of limit loads; geometrically nonlinear solution *III* for shells with initial predeformation  $w_0 = 0.25h$  preliminary obtained in geometrically linear buckling analysis, also in order to evaluate limit loads. Numerical simulations are accomplished for two force loading schemes. These schemes reflect two different conditions of an axial load application: with out-of-plane edge rotations (schemes 1) and with parallel edge displacements (schemes 3).

The results of simulations are represented as the dependences of relative buckling loads on the cut length. For any solution type, buckling loads of the shells compressed according to the scheme 1 are less than buckling loads found for the scheme 3. The greatest differences between buckling loads are 46, 34 and 32 % respectively for solutions *I*, *II* and *III*. Despite the loading scheme, the dependences of buckling loads on the cut length are similar. In large, they are descending. There is an exception for the solution *II* in the range of medium cuts ( $l \sim 30^\circ$ ), where buckling loads increase. In the range of small cuts, critical loads of linear solution *I* are higher than limit loads of geometrically nonlinear solution *II*. When the cuts grow over  $l \sim 10^\circ$ , linear solution *I* provides buckling loads lower than ones of solution *II*. Buckling loads of solution *III* can be defined with linear dependences on cut length.

The article also contains a comparison of typical eigenmodes, nonlinear buckling deformations and curves of equilibrium paths that help to describe the behaviour of the shells with one transversal cut.

*Key words:* buckling, cylindrical shell, transversal cut, numerical simulation, loading schemes

### **ВВЕДЕНИЕ**

Изучение процесса потери устойчивости продольно сжатых упругих круговых цилиндрических оболочек с одиночными разрезами представляет собой весьма сложную задачу. Это связано с неоднородностью докритического напряженно-деформированного состояния оболочек, порождаемой наличием разреза [1]. Очевидно, что в таком случае существенное влияние на поведение и несущую способность рассматриваемых конструкций оказывают особенности приложения осевой сжимающей нагрузки, связанные с возможностью поворота или выхода торцевых сечений из плоскости [2].

Так, в работе [1] рассмотрены вопросы численного и экспериментального исследования устойчивости оболочек, выполненных из чертежного ватмана (Гознак, марка «В», ГОСТ 597-73), с поперечным разрезом в широком диапазоне изменения его окружного размера. В силу того, что сжатие образцов осуществлялось при свободном повороте плоскости торцов оболочки (силовая схема 1, согласно классификации, приведенной в [2], см. рис. 1, а), нагрузки выпучивания для оболочек с большими разрезами  $\sim 90^\circ$  снизились более чем вдвое по сравнению с нагрузками для оболочек с малыми разрезами.

Цель настоящей работы заключается в оценке влияния условий нагружения на значения нагрузок выпучивания продольно сжатых цилиндрических оболочек с одиночными поперечными разрезами в соответствии с силовыми схемами нагружения: схемой 1, допускающей поворот плоскости торцов оболочки, а также схемой 3, предполагающей параллельное смещение плоскости торцов без их взаимного поворота.

## МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Исследование проводилось численно в среде программного комплекса (ПК) ANSYS (ANSYS Inc. Academic Research, Mechanical Analysis, Release 13.0, customer 298728) на трехмерных конечно-элементных моделях (К-ЭМ) оболочек следующей геометрии: радиус оболочки  $R = 50 \text{ мм}$ , толщина  $h = 0.23 \text{ мм}$ , длина  $L = 100 \text{ мм}$ , ( $R/h = 217$ ,  $L/R = 2.0$ ). Материал моделей принимался ортотропным и упругим с характеристиками, соответствующими данным эксперимента [1]: модули упругости  $E_y = 6.9 \text{ ГПа}$ ,  $E_x = 3.45 \text{ ГПа}$  ( $y$  – направление вдоль образующей,  $x$  – окружное направление); модуль сдвига  $G = 1.92 \text{ ГПа}$ ; коэффициенты Пуассона  $\nu_y = 0.3$ ,  $\nu_x = 0.15$ ; предел прочности  $\sigma_y = 45 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_x = 30 \text{ МПа}$ . Значения недостающих (по толщине оболочки) механических характеристик принимались равными наименьшим приведенным величинам. Длина поперечного разреза составляла  $l_p = 0 \div 80 \text{ мм}$  (что соответствовало углам раскрытия  $l = 0 \div 91^\circ.7$ ) при постоянной толщине  $a_p = 2 \text{ мм}$ . В соответствии со схемами нагружения, кроме моделей оболочек, К-ЭМ предполагали наличие жестких дисков, которые моделировались цилиндрами с радиусом  $50 \text{ мм}$  и высотой  $3 \text{ мм}$ . Материал жестких дисков принимался упругим изотропным с механическими характеристиками  $E = 2 \cdot 10^{15} \text{ Па}$  и  $\nu = 0.3$ .

При построении КЭ-М оболочек и жестких дисков использовались соответственно КЭ SHELL181 и SOLID185 из стандартной библиотеки КЭ ПК. Сперва создавалась К-Э сетка оболочки, состоящая из квадратных элементов, а затем осуществлялось дополнительное сгущение этой сети вдоль линий разрезов. В последнюю очередь на КЭ разбивались объемы жестких дисков (см. рис.1, в). Общее число КЭ составляло от 33 500 до 36 700, в т. ч. оболочечных КЭ – от 12 800 до 16 000 в зависимости от величины разреза.

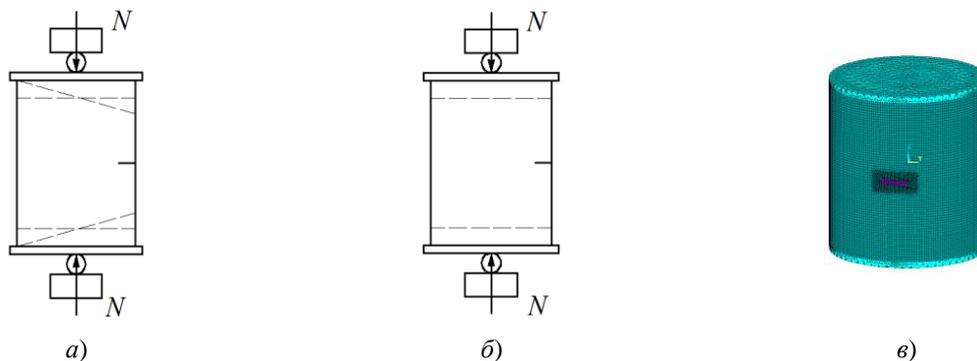


Рис. 1. Схемы силового нагружения оболочки: 1 (а) и 3 (б); а также ее К-ЭМ (в)

Для рассматриваемых схем нагружения задавались ограничения на радиальные и тангенциальные перемещения по верхней кромке верхнего диска и по нижней кромке нижнего диска. На верхней и нижней кромках оболочки накладывались ограничения на углы поворота. Здесь же, дополнительно для схемы 3, ограничивались радиальные и тангенциальные перемещения. Закрепление от вертикальных смещений оболочки как целого осуществлялось в среднем по ее высоте сечении. Нагружение оболочек задавалось осевыми сосредоточенными силами, приложенными к наружным площадям жестких дисков.

Выполнялось три типа расчетов: линейный расчет I; геометрически нелинейный расчет II; геометрически нелинейный расчет III оболочек с начальной погибью  $w_0 = 0.25h$ , предварительно полученной в ходе линейного расчета на устойчивость. Все нелинейные расчеты осуществлялись методом оптимальной длины дуги.

## АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА

На рис. 2-3 приведены графики, отражающие зависимости критических и предельных нагрузок от величины разреза оболочек. Здесь единице на оси ординат соответствует значение классической критической нагрузки изотропной оболочки с осредненными механическими характеристиками ( $E = 5.175 \text{ ГПа}$  и  $\nu = 0.225$ ), вычисленной по формуле  $N^{cl} = 2\pi E h^2 / \sqrt{3(1 - \nu^2)}$ .

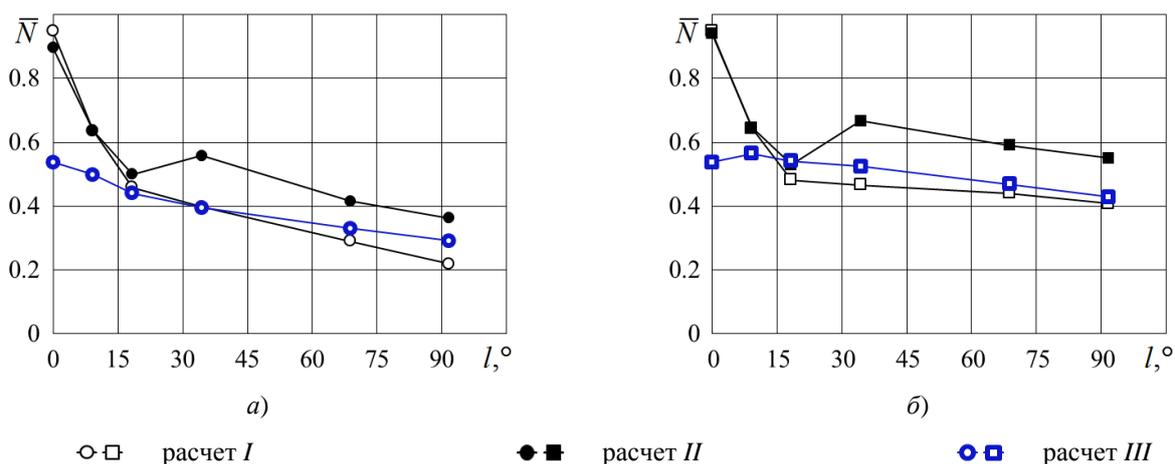


Рис. 2. Зависимости критических и предельных нагрузок от величины разреза  $l$  для схем нагружения 1 (а) и 3 (б)

Рис. 2, а объединяет данные трех типов расчетов оболочек, нагружение которых происходило по схеме 1, допускающей поворот торцов. На рис. 2, б представлены результаты трех расчетов оболочек, для которых в соответствии со схемой 3 исключается взаимный поворот торцов в процессе нагружения. Здесь отмечается хорошее качественное согласие между результатами, полученными для исследуемых силовых схем. При  $l = 0$ , независимо от схемы нагружения, линейный и нелинейный расчеты практически совпадают. В области малых разрезов ( $l \neq 0$ ) критические нагрузки расчета I лежат выше предельных нагрузок нелинейного расчета II, при этом предельные нагрузки нелинейного расчета III оказываются в диапазоне  $0.4 \div 0.6N^{cl}$ . Далее, по мере увеличения разреза появляется резкое отличие. В области больших разрезов наибольших величин достигают предельные нагрузки нелинейного расчета II, а нагрузки, соответствующие точкам бифуркации, являются наименьшими.

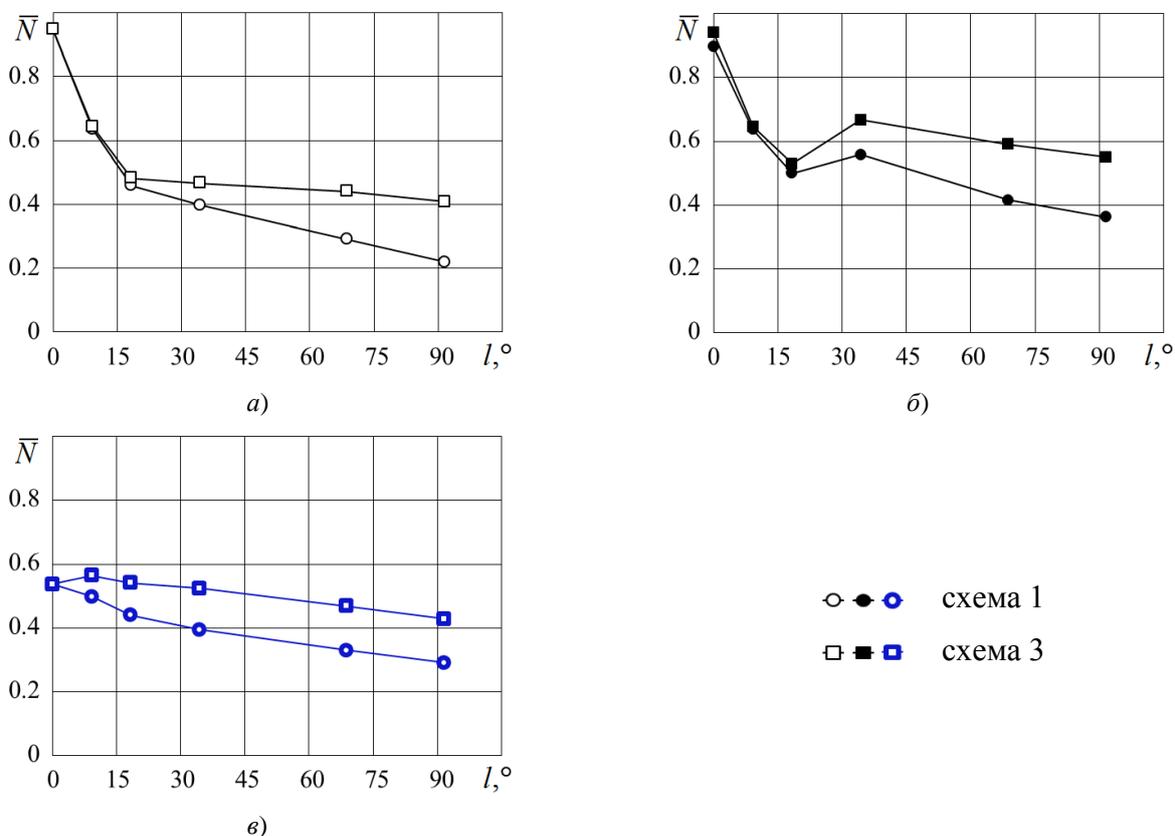
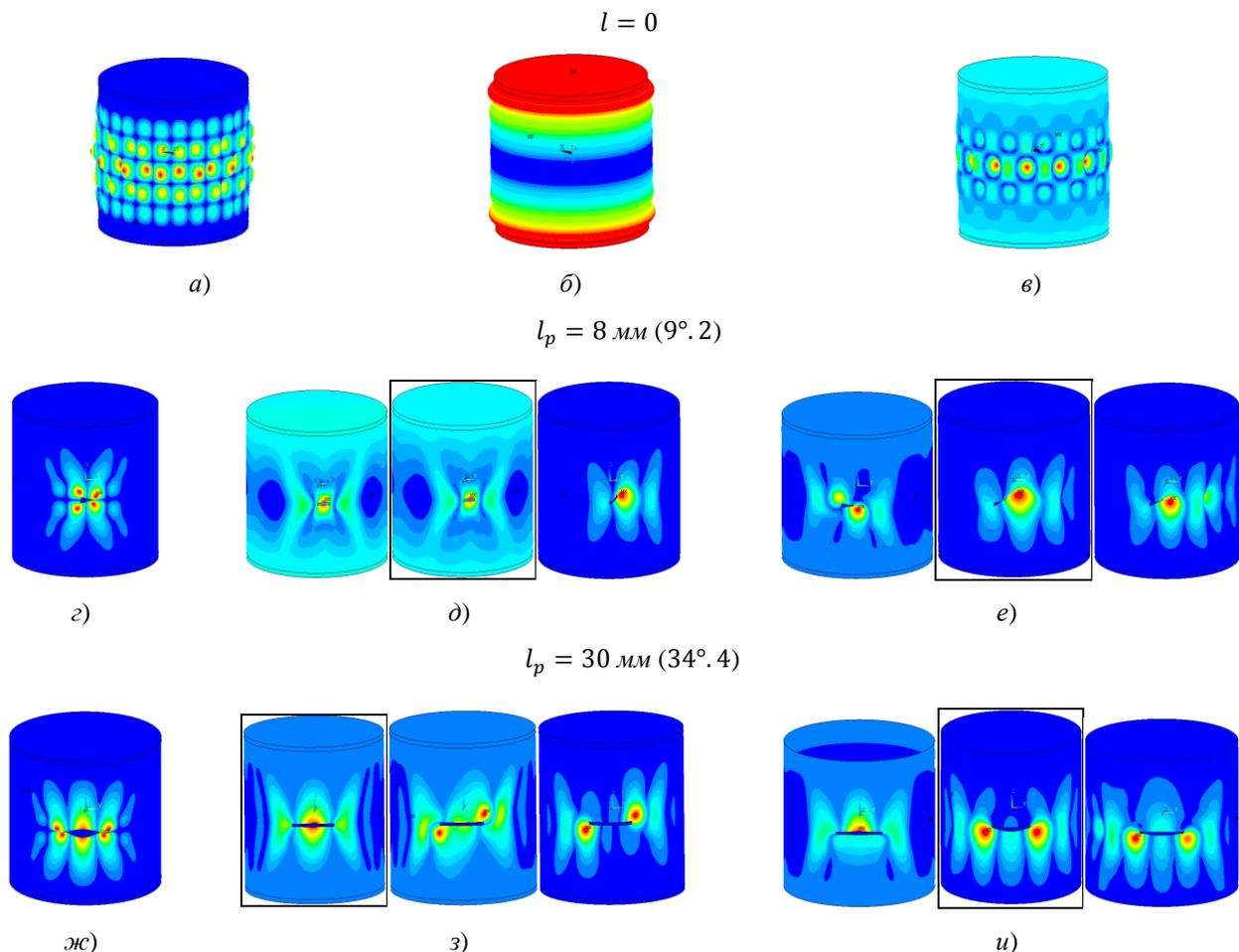


Рис. 3. Зависимость критических (а – расчет I) и предельных (б – расчет II и в – расчет III) нагрузок от величины разреза  $l$

Для более детального анализа результатов исследования рассмотрим графики на рис. 3. Здесь, все результаты объединены по трем типам расчетов. Общим для этих графиков является то, что схема 3 с более жесткими условиями обеспечивает более высокий уровень нагрузок, чем схема 1. Так, наибольшее расхождение между критическими нагрузками расчета I составляет 46 % (по отношению к большему, рис. 3, а). В области малых разрезов их величины резко падают с  $0.90 N^{cl}$  и  $0.94 N^{cl}$  до  $0.46 N^{cl}$  и  $0.48 N^{cl}$  (соответственно для схем 1 и 3), а затем плавно опускаются до уровня  $0.22 N^{cl}$  и  $0.41 N^{cl}$ . Для предельных нагрузок расчета II отличительным является некоторый «подъем» нагрузок в области средних разрезов ( $l \sim 30^\circ$ ). При этом наибольшее расхождение между значениями для двух схем также составляет 34 % (рис. 3, б), с общим падением нагрузок до уровня  $0.36 N^{cl}$  и  $0.55 N^{cl}$  (соответственно для схем 1 и 3).

Предельные нагрузки, полученные в ходе нелинейного расчета III с погибью, представляют собой линейные зависимости от величины  $l$  (рис.3, в) для обеих схем нагружения во всем диапазоне изменения параметра  $l \neq 0$ . При этом уровень предельных нагрузок изменяется в диапазонах  $0.29 \div 0.5 N^{cl}$  и  $0.43 \div 0.57 N^{cl}$  для схем 1 и 3, соответственно, с наибольшим отклонением в 32 %.

В рамках проведенного исследования было установлено, что различие условий нагружения, связанное с возможностью выхода из плоскости торцов оболочки, не влияет на характер докритического и закритического деформирования. На рис. 4 показаны характерные формы потери устойчивости оболочек, полученные в ходе расчета I (а, г, ж, к), а также формы нелинейного деформирования, полученные в ходе расчетов II (б, д, з, л) и III (в, е, и, м). Здесь, рамками отмечены формы выпучивания, отвечающие значениям предельных нагрузок, которые нанесены на графики рис. 2-3.



$$l_p = 80 \text{ мм} (91^\circ.7)$$

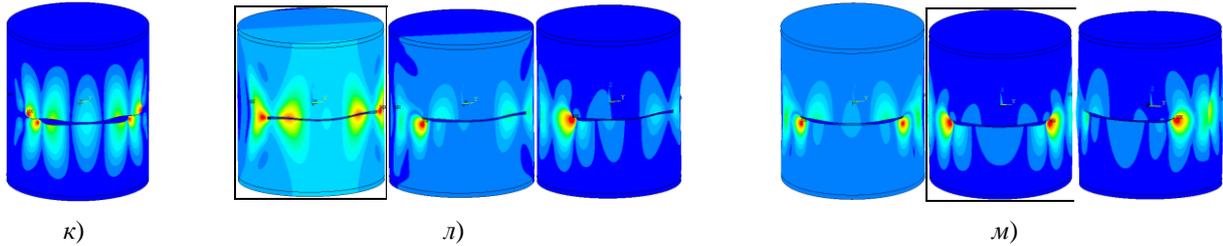


Рис 4. Характерные формы потери устойчивости (а, г, ж, к), а также нелинейного деформирования оболочек, полученные в расчетах II (б, д, з, л) и III (в, е, и, м)

Характер поведения оболочек для схемы 3 полностью соответствует поведению оболочек, нагруженных по схеме 1 (см. рис. 5,  $l = 60 \text{ мм}$ , или  $68^\circ.8$ ). В области малых разрезов проявляется некоторая асимметрия в развитии деформаций, тогда, как в области больших и средних разрезов наблюдается симметричное волнообразование по обе стороны от линии рассечений оболочки в окружном направлении.

Отметим также, что для оболочек с поперечным разрезом (кроме  $l = 0$ ) при нагружении в соответствии со схемой 1 и 3 радиальные перемещения точек, находящихся по центру разреза, составили  $w = (0.38 \div 2.63)h$  (для схемы 1) и  $w = (0.55h \div 2.43)h$  (для схемы 3); а вертикальные смещения точек, находящихся в центре наружных плоскостей жестких дисков,  $-\Delta Z = (0.22h \div 0.26)h$  (для схемы 1) и  $\Delta Z = (0.27 \div 0.28)h$  (для схемы 3).

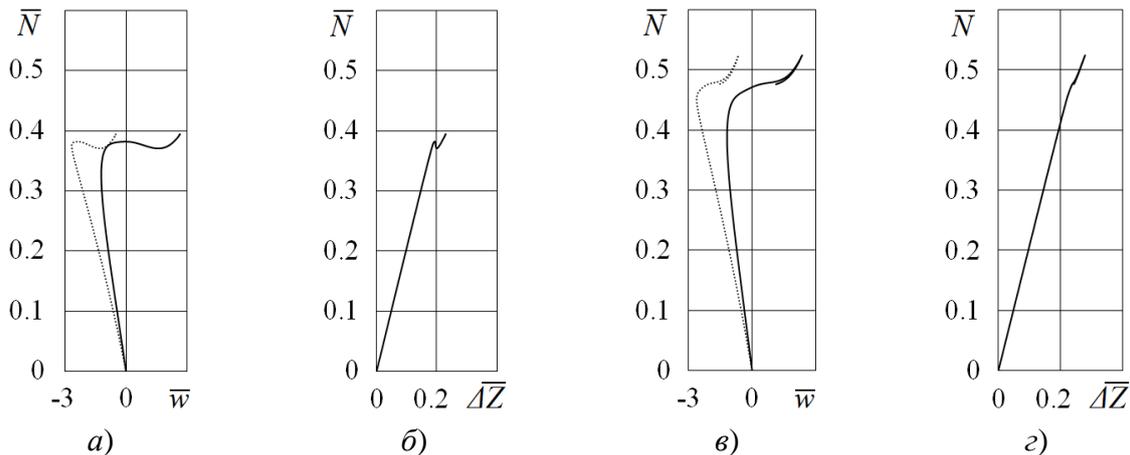


Рис 5. Характер деформирования оболочек с погибью, сжатых по схеме 1 (а, б) и 3 (в, г)

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный сравнительный анализ численного исследования выпучивания оболочек с поперечным разрезом для двух силовых схем сжатия (схема 1 и 3) выявил падение нагрузок потери устойчивости от 32 до 46 %, вызванное возможностью поворота плоскости торцов оболочки в процессе нагружения.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование проведено в рамках гранта Фонда Гумбольдта № 3.4 – Fokoop – UKR/1070297.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лихачева О. Экспериментальное и численное исследование устойчивости продольно сжатых упругих цилиндрических оболочек с одним поперечным разрезом / О. Лихачева, Е. Прокопало // Theoretical foundations of civil engineering. Warsaw : WP, 2013. – Vol. 21. – P. 267-274.
2. Марченко В. А. Равновесные ветви в сжатых цилиндрических оболочках при локальных воздействиях / В.А. Марченко, В.Л. Красовский, Р. Шмидт // Проблемы нелинейной динамики и физики конденсированных сред. – Москва : ИХФ РАН, 2013. – С. 297-307.
3. Lykhachova O. V. Deformation and buckling of axially compressed elastic cylindrical shells with transversal cut in experiments and numerical simulation / O.V. Lykhachova, R. Schmidt // Shell Structures. Theory and Applications : eds. W. Pietraszkiewicz, J. Gorski. – London : Taylor and Francis Group, 2013. – Vol. 3. – P. 219-222.

## REFERENCES

1. Lykhachova, O. and Prokopalo, Ye. (2013), "Experimental and numerical investigation of buckling of axially compressed elastic cylindrical shells with one transversal cut", Theoretical foundations of civil engineering, WP, Warsaw, vol.21, pp. 267-274.
2. Marchenko, V. A., Krasovsky, V. L. and Schmidt, R. (2013), "Ravnovesnye vetvi v szhatykh tsilindricheskikh obolochkakh pri lokalnykh vozdeystviyakh, Problemy nelineynoy dinamiki i fiziki kondensirovannykh sred, IKhF RAN, Moscow, pp. 297-307.
3. Lykhachova, O. V. and Schmidt, R. (2013), "Deformation and buckling of axially compressed elastic cylindrical shells with transversal cut in experiments and numerical simulation", Shell Structures. Theory and Applications, eds. W. Pietraszkiewicz, J. Gorski, London: Taylor and Francis Group, 2014, vol. 3, pp. 219-222.

УДК 539:634.074.432:62-112.5

## ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ ВМЯТИН НА НЕСУЩЮЮ СПОСОБНОСТЬ ПРОДОЛЬНО СЖАТОЙ УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Марченко В. А., к. т. н.

*Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры,  
ул. Чернышевского 24а, г. Днепропетровск, 49600, Украина*

marvit19@gmail.com

Показаны возможности использования ПК ANSYS для анализа деформирования и выпучивания продольно сжатых тонкостенных круговых цилиндров с начальными несовершенствами серединной поверхности в виде одной локализованной вмятины, глубина которой существенно превышает среднюю амплитуду начальной погиби оболочки.

*Ключевые слова: упругая круговая цилиндрическая оболочка, осевое сжатие, локальное поперечное воздействие, геометрическое нелинейное деформирование, численные методы.*

## ВПЛИВ ПОЧАТКОВИХ ВМ'ЯТИН НА НЕСУЧУ ЗДАТНІСТЬ ПОЗДОВЖНЬО СТИСНУТОЇ ПРУЖНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

Марченко В. А., к. т. н.

*Придніпровська державна академія будівництва та архітектури,  
вул. Чернишевського 24а, м. Дніпропетровськ, 49600, Україна*

marvit19@gmail.com

Показано можливості використання ПК ANSYS для аналізу деформування та випучування поздовжньо стиснутих тонкостінних кругових циліндрів з початковими недосконаліостями серединної поверхні у вигляді однієї локалізованої вмятини, глибина якої істотно перевищує середню амплітуду початкового вигину оболонки.

*Ключові слова: пружна циліндрична оболонка, осьове стискання, локальний поперечний вплив, геометрично нелінійне деформування, чисельні методи.*

## INFLUENCE OF INITIAL DENTS ON THE LOAD-CARRYING CAPACITY OF LONGITUDINAL COMPRESSION ELASTIC CYLINDRICAL SHELL

Marchenko V.A., Ph. D. in Technical Sciences

*Prydniprovs'ka State Academy of Civil Engineering and Architecture,  
Chernyshevsky str. 24a, Dnipropetrovsk, 49600, Ukraine*

marvit19@gmail.com

The paper shows the possibility of using a PC ANSYS to analyze the deformation and buckling of longitudinal compression of thin-walled circular cylinder with initial imperfections of the middle surface in the form of a localized dent whose depth is substantially higher than the average amplitude of the initial deflection of the shell.

*Key words: elastic cylindrical shell, axial compression, the local lateral-impact, geometrically nonlinear deformation, numerical methods.*