

REFERENCES

1. Mossakovskiy, V.I. (1970), "Influence of of heterogeneity the stress state and the initials wrong on sustainability of a cylindrical shell", *Tr. VII Vses. konf. po teorii obolochek i plastin* [Proceedings of the VII All-Union Conference on the theory of shells and plates], Moscow, pp. 831-839.
2. Grischak, V.Z. (1980), "An asymptotic formula for the critical stress in an axially compressed cylindrical shells with local imperfections", *Prochnost' i dolgovechnost' konstruksiy*, pp. 113-120.
3. Schmidt, H. (2000), "Stability of steel shell structures – General Report", *Journal of Constructional Steel Research*, 55, no. 1-3, pp. 159-181.
4. Krasovskiy, V.L. (1990), "Behaviour and sustainability compressed thin-walled cylinders with local imperfections form", *Tr. XV Vses. konf. po teorii obolochek i plastin* [Proceedings of the XV All-Union Conference on the theory of shells and plates], Moscow, pp. 303-308.
5. Marchenko, V.A. (2013), "Nonlinear deformation and bulge of longitudinally compressed cylindrical shells at local quasi-static lateral exposures", *Dis. Cand. Sc. (Engineering.)*, 05.23.17, PGASA, Dnepropetrovsk, Ukraine.

УДК 539.3:534.1

**ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ
В ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНЫХ
ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРАХ**

Моисеенко И. А., к. ф.-м. н., доцент

*Донецкий национальный университет,
ул. Университетская, 24, г. Донецк, 83001, Украина*

mian@i.ua

Получены и исследованы дисперсионные соотношения, описывающие спектры бегущих осесимметричных нормальных продольных волн в протяженных экспоненциально-неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах со свободной или жестко закрепленной граничной поверхностью. Охарактеризовано влияние параметров неоднородности и механической анизотропии на топологию дисперсионных спектров, распределения фазовых скоростей и кинематические характеристики бегущих нормальных волн варьируемой длины из низших мод спектров.

Ключевые слова: трансверсально-изотропный цилиндрический волновод, экспоненциальная радиальная неоднородность, свободная граничная поверхность, жестко закрепленная граничная поверхность, осесимметричные нормальные продольные волны, дисперсионные соотношения, фазовая скорость.

**ПОЗДОВЖНІ ХВИЛІ В ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНО-НЕОДНОРІДНИХ
ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ ЦИЛІНДРАХ**

Моисеенко І. О., к. ф.-м. н., доцент

*Донецкий национальный университет,
вул. Університетська, 24, м. Донецьк, 83001, Україна*

mian@i.ua

Отримані і досліджені дисперсійні співвідношення, що описують спектри біжучих осесимметричних нормальних поздовжніх хвиль у видовжених експоненциально-неоднорідних трансверсально-ізотропних циліндрах з вільною або жорстко закріпленою граничною поверхнею. Охарактеризовано вплив параметрів неоднорідності і механічної анизотропії на топологію дисперсійних спектрів, розподіл фазових швидкостей і кінематичні характеристики біжучих нормальних хвиль варійованої довжини з нижчих мод спектрів.

Ключові слова: трансверсально-ізотропний циліндричний хвилевід, експоненціальна радіальна неоднорідність, вільна гранична поверхня, жорстко закріплена гранична поверхня, осесимметричні нормальні поздовжні хвилі, дисперсійні співвідношення, фазова швидкість.

LONGITUDINAL WAVES IN EXPONENTIALLY INHOMOGENEOUS TRANSVERSELY ISOTROPIC CYLINDERS

Moiseyenko I. A., Ph. D. in Physics and Math, associate professor

*Donetsk National University,
Universitetska street, build. 24, Donetsk, 83001, Ukraine*

mian@i.ua

Functionally graded materials (FGMs) have outstanding advantages over homogeneous materials and conventional composite materials, are the new generation of composites and important area of science research. FGMs, originally applied in thermal-protection systems of aircraft and spacecraft, have been widely developed in many other fields, for example, construction, electrical, chemical. In recent years the theoretical investigation on FGMs has received considerable attention in the literatures. Therefore, much attention has been paid to analyze the various aspects of FGMs to get an in-depth knowledge for potential applications of these materials. Currently relevant is a need summarizing the classical theories using the improved models, reflecting the behavior of modern materials.

With the advent of FGMs, the wave mechanics problems of FGMs also have received much attention in recent years. The study of elastic wave propagation through FGMs has diverse important applications in fields such as medical composite transducer design, fiber optics, signal processing, and nondestructive testing. Since most piezoelectric devices operate in a dynamic mode, the dynamic responses (including wave propagation) of piezoelectric rods or cylinders have attracted much attention.

Three-dimensional analyses based on mathematically strict and complete equations of dynamics even of homogeneous media are usually only applicable to wave propagation in infinitely long rods or free vibration of rods. Due to the non-homogeneous nature of FGMs, the analysis of the wave propagation in FGMs becomes more complex. That is why numerical methods have played an increasingly important role in modeling of dynamic processes in waveguides from the FGMs. They are versatile and can easily deal with such object with inhomogeneity or irregular domain. However, no significant insights into the physics of object of study with different geometric and material properties can be obtained due to the lack of simple analytical expressions which relate directly the objects properties.

In an ideal FGM, the material properties should vary smoothly along the thickness direction. In this paper, we intend to employ the three-dimensional analyses based on mathematically strict and complete equations of dynamics for ideal FGMs with the aim of study the effect of radial inhomogeneity on the on the topology of the dispersion spectrums, distribution of the phase velocities and kinematic characteristics of normal traveling waves.

The introduction section of the article contains an overview of previous researches.

Fundamental equations of axisymmetric dynamic deformation of long exponentially inhomogeneous transversely isotropic cylinders are described in the first section.

Solution of the system of differential equations describing the propagation of axisymmetric normal longitudinal traveling waves in long exponentially inhomogeneous transversely isotropic cylinders in the form of absolutely and uniformly convergent power series is obtained the second section. Recurrence relations for the coefficients of the expansions are defined explicitly. Dispersion relations for describing the spectrum of axisymmetric normal longitudinal traveling waves in long exponentially inhomogeneous transversely isotropic cylinders with free or rigidly fixed boundary surfaces are obtained. For the homogeneous materials, the satisfactory agreement with the solutions in previous literatures shows the validity of the present approach.

Characteristics of the influence of the parameters of heterogeneity and mechanical anisotropy on the topology of the dispersion spectrums, distribution of the phase velocities and kinematic characteristics of normal traveling waves varying lengths from lower modes of spectra are presented and investigated in the third section. Numerical experiment was conducted with four materials with different physical and mechanical characteristics and alternative values of parameter wave anisotropy. Normalized forms of wave motions to normal waves for the different modes of the spectrum are constructed, effects of the parameter inhomogeneity on kinematic characteristics are illustrated.

Conclusions and prospects for the future research are represented in the last section.

Key words: Transversely isotropic cylindrical waveguide, exponential radial inhomogeneity, free boundary surface, rigidly fixed boundary surface, axisymmetric normal longitudinal wave, dispersion relations, phase velocity.

ВВЕДЕНИЕ

В исследованиях закономерностей процессов распространения нормальных упругих волн в трансверсально-изотропных цилиндрах кругового сечения, представленных и обобщенных в работах [2, 9-12, 14], используется модель однородного по физико-механическим свойствам материала. Достаточно широко исследованы также волновые процессы для кусочно-однородных в радиальном направлении многослойных трансверсально-изотропных цилиндров [13]. Вместе с тем, как с позиций углубления фундаментальных исследований, так и с учетом характера изменений свойств материалов конструкций при применении различных технологий обработки, актуальными являются проблемы анализа спектров и

свойств нормальных упругих волн вдоль непрерывно-неоднородных по радиальной координате анизотропных цилиндров, в том числе трансверсально-изотропных цилиндров с экспоненциальной радиальной неоднородностью физико-механических свойств [3-8]. В этой связи, целью настоящей работы является получение и анализ дисперсионных зависимостей для одного из классов волновых процессов в протяженных экспоненциально-неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах, а именно процессов распространения осесимметричных продольных волн в цилиндрах со свободной или жестко закрепленной граничной поверхностью.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается бесконечно протяженный трансверсально-изотропный упругий цилиндр кругового сечения радиуса R со свободной либо закрепленной боковой поверхностью, ось которого перпендикулярна плоскости изотропии материала. В приведенной цилиндрической системе координат $Or\theta z$, линейные координатные переменные которой отнесены к нормирующему параметру $R_* = R$, указанный цилиндр имеет единичный приведенный безразмерный радиус и занимает в пространстве область $V = \{r \in [0, 1]; 0 \leq \theta \leq 2\pi, z \in (-\infty, \infty)\}$. Динамическое деформирование цилиндра описывается системой дифференциальных уравнений движения

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} - \rho R_*^2 / c_* \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{\theta r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{r\theta}}{r} - \rho R_*^2 / c_* \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{zr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \rho R_*^2 / c_* \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где u_r, u_θ, u_z – компоненты отнесенного к нормирующему параметру R_* безразмерного вектора динамических упругих перемещений; $\sigma_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = r, \theta, z$) – компоненты отнесенного к нормирующему параметру c_* тензора динамических напряжений; ρ – плотность материала цилиндра; t – время. В исследуемом случае осесимметричных динамических деформаций, характеризуемом полем волновых перемещений $u_r(r, z, t), u_z(r, z, t), u_\theta = 0$ и полем динамических напряжений $\sigma_{rr}(r, z, t), \sigma_{rz}(r, z, t), \sigma_{\theta\theta}(r, z, t), \sigma_{zz}(r, z, t), \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = 0$ следствием из системы (1) является система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rr}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} - \rho R_*^2 / c_* \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{zr}) + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \rho R_*^2 / c_* \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

а рассматриваемые граничные условия имеют альтернативный вид

$$(u_r)_{r=1} = (u_z)_{r=1} = 0, \quad (3)$$

либо

$$(\sigma_{rr})_{r=1} = (\sigma_{rz})_{r=1} = 0. \quad (4)$$

Полагается, что трансверсально-изотропный материал цилиндра является экспоненциально-неоднородным в радиальном направлении по всем своим физико-механическим свойствам, а

его плотность ρ и отнесенные к c_* нормированные модули упругости c_{ij} описываются представлениями

$$\rho = \rho^{(0)} \exp(\lambda r), \quad c_{ij} = c_{ij}^{(0)} \exp(\lambda r), \quad (5)$$

в которых λ – действительный приведенный параметр неоднородности. При этом характеристики тензора динамических напряжений σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} , σ_{rz} в поле продольных волн имеют зависимости от u_r и u_z следующего вида:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \exp(\lambda r) \cdot \left(\left(c_{11}^{(0)} \frac{\partial}{\partial r} + c_{12}^{(0)} \frac{1}{r} \right) u_r + c_{13}^{(0)} \frac{\partial}{\partial z} u_z \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \exp(\lambda r) \cdot \left(\left(c_{12}^{(0)} \frac{\partial}{\partial r} + c_{11}^{(0)} \frac{1}{r} \right) u_r + c_{13}^{(0)} \frac{\partial}{\partial z} u_z \right), \\ \sigma_{zz} &= \exp(\lambda r) \cdot \left(c_{13}^{(0)} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) u_r + c_{33}^{(0)} \frac{\partial}{\partial z} u_z \right), \\ \sigma_{rz} &= \exp(\lambda r) \cdot c_{44}^{(0)} \left(\frac{\partial}{\partial z} u_r + \frac{\partial}{\partial r} u_z \right). \end{aligned} \quad (6)$$

ПОЛУЧЕНИЕ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ

Для комплексных функций волновых упругих перемещений u_r , u_z и динамических напряжений σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} , σ_{rz} в исследуемых нормальных волнах с круговой частотой ω и нормированным волновым числом k вводятся представления:

$$\begin{aligned} u_r(r, z, t) &= \tilde{u}_r(r) \exp(-i(\omega t - kz)), \\ u_z(r, z, t) &= i \tilde{u}_z(r) \exp(-i(\omega t - kz)), \\ \sigma_{jj}(r, z, t) &= \exp(\lambda r) \tilde{\sigma}_{jj}(r) \exp(-i(\omega t - kz)) \quad (j = r, \theta, z), \\ \sigma_{rz}(r, z, t) &= i \exp(\lambda r) \tilde{\sigma}_{rz}(r) \exp(-i(\omega t - kz)), \end{aligned} \quad (7)$$

с учетом которых и соотношений (5), (6) система уравнений (2) приводится к виду:

$$\begin{aligned} &\left(c_{11}^{(0)} r^2 \partial_r^2 + c_{11}^{(0)} (\lambda r + 1) r \partial_r + c_{44}^{(0)} (\Omega^2 - k^2) r^2 + c_{12}^{(0)} \lambda r - c_{11}^{(0)} \right) \tilde{u}_r(r) - \\ &\quad - k r^2 \left(\left(c_{13}^{(0)} + c_{44}^{(0)} \right) \partial_r + c_{13}^{(0)} \lambda \right) \tilde{u}_z(r) = 0, \\ &k r \left(\left(c_{13}^{(0)} + c_{44}^{(0)} \right) r \partial_r + c_{44}^{(0)} (\lambda r + 1) + c_{13}^{(0)} \right) \tilde{u}_r(r) + \\ &\quad + \left(c_{44}^{(0)} r^2 \partial_r^2 + c_{44}^{(0)} (\lambda r + 1) r \partial_r + \left(c_{44}^{(0)} \Omega^2 - c_{33}^{(0)} k^2 \right) r^2 \right) \tilde{u}_z(r) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\partial_r = \frac{d}{dr}, \quad \Omega^2 = \frac{\omega^2 \rho^{(0)} R_*^2}{c_{44}^{(0)} c_*}.$$

Решение системы дифференциальных уравнений (8) отыскивается в форме степенных рядов

$$\tilde{u}_r(r) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m r^{m+1+\alpha},$$

$$\tilde{u}_z(r) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m r^{m+\alpha} \quad (a_0 \cdot b_0 \neq 0), \quad (9)$$

подстановка которых в (8) приводит к рекуррентной системе соотношений

$$\begin{cases} \alpha \left((c_{13}^{(0)} + c_{44}^{(0)}) k b_0 - c_{11}^{(0)} (\alpha + 2) a_0 \right) = 0, \\ \alpha^2 c_{44}^{(0)} b_0 = 0; \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} a_n = q_{0,n}^{(\alpha)} \left(q_{1,n}^{(\alpha)} a_{n-1} + q_{2,n}^{(\alpha)} b_{n-1} + q_{3,n}^{(\alpha)} a_{n-2} + q_{4,n}^{(\alpha)} b_{n-2} + q_{5,n}^{(\alpha)} a_{n-3} \right), \\ b_n = p_{0,n}^{(\alpha)} \left(p_{1,n}^{(\alpha)} b_{n-1} + p_{2,n}^{(\alpha)} a_{n-2} + p_{3,n}^{(\alpha)} b_{n-2} + p_{4,n}^{(\alpha)} a_{n-3} \right) \end{cases} \quad (n=1, 2, \dots). \quad (11)$$

Здесь полагаем, что $a_{-2} = a_{-1} = b_{-1} = 0$. Соотношение (10) определяет допустимое значение параметра $\alpha = 0$ и закладывает произвол выбора начальных значений $a_0 = p$, $b_0 = q$ ($p \cdot q \neq 0$). С учетом этого использованные в (11) обозначения принимают вид:

$$\begin{aligned} q_{0,n}^{(0)} &= \left(-n^2 (n+2) c_{11}^{(0)} c_{44}^{(0)} \right)^{-1}, \quad q_{1,n}^{(0)} = n \lambda c_{44}^{(0)} \left(n c_{11}^{(0)} + c_{12}^{(0)} \right), \\ q_{2,n}^{(0)} &= \lambda k c_{44}^{(0)} \left((n-1) c_{44}^{(0)} - c_{13}^{(0)} \right), \quad q_{3,n}^{(0)} = n \left(c_{13}^{(0)} \left(c_{13}^{(0)} + 2 c_{44}^{(0)} \right) k^2 + c_{44}^{(0)} \Omega^2 \right), \\ q_{4,n}^{(0)} &= -k \left(c_{13}^{(0)} + c_{44}^{(0)} \right) \left(c_{33}^{(0)} k^2 - c_{44}^{(0)} \Omega^2 \right), \quad q_{5,n}^{(0)} = \lambda k^2 c_{44}^{(0)} \left(c_{13}^{(0)} + c_{44}^{(0)} \right), \\ p_{0,n}^{(0)} &= \left(n^2 c_{44}^{(0)} \right)^{-1}, \quad p_{1,n}^{(0)} = -(n-1) \lambda c_{44}^{(0)}, \quad p_{2,n}^{(0)} = -n k \left(c_{13}^{(0)} + c_{44}^{(0)} \right), \\ p_{3,n}^{(0)} &= c_{33}^{(0)} k^2 - c_{44}^{(0)} \Omega^2, \quad p_{4,n}^{(0)} = -\lambda k c_{44}^{(0)}, \end{aligned}$$

а представления (9) преобразуются к виду комбинации базисных частных решений

$$\begin{aligned} \tilde{u}_r(r) &= d_1 \varphi_{p_1, q_1}(r) + d_2 \varphi_{p_2, q_2}(r), \\ \tilde{u}_z(r) &= d_1 \psi_{p_1, q_1}(r) + d_2 \psi_{p_2, q_2}(r) \quad (p_1 q_2 - p_2 q_1 \neq 0), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{p,q}(r) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(p,q)} r^{m+1}, \\ \psi_{p,q}(r) &= \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(p,q)} r^m, \quad (a_0^{(p,q)} = p, b_0^{(p,q)} = q), \end{aligned}$$

d_j ($j = \overline{1,2}$) произвольные постоянные коэффициенты. Актуальные для граничных условий (4) представления (6) записываются в аналогичном виде

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{rr}(r) &= d_1 \chi_{p_1, q_1}(r) + d_2 \chi_{p_2, q_2}(r), \\ \tilde{\sigma}_{rz}(r) &= d_1 \phi_{p_1, q_1}(r) + d_2 \phi_{p_2, q_2}(r), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\chi_{p,q}(r) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\left((m+1) c_{11}^{(0)} + c_{12}^{(0)} \right) a_m^{(p,q)} - k c_{13}^{(0)} b_m^{(p,q)} \right) r^m,$$

$$\phi_{p,q}(r) = c_{44}^{(0)} b_1^{(p,q)} + c_{44}^{(0)} \sum_{m=0}^{\infty} (k a_m^{(p,q)} + (m+2) b_{m+2}^{(p,q)}) r^{m+1}.$$

Выбирая для определенности $(p_1, q_1) = (1, 1)$ и $(p_2, q_2) = (1, -1)$, используя представления (12) и (13) при формулировке граничных условий соответственно (3) и (4) получаем в итоге дисперсионные соотношения для жестко закрепленной граничной поверхности вида

$$F_c(\Omega, k, \lambda) = \varphi_{1,1}(1) \psi_{1,-1}(1) - \varphi_{1,-1}(1) \psi_{1,1}(1) = 0,$$

и для свободной граничной поверхности вида

$$F_f(\Omega, k, \lambda) = \chi_{1,1}(1) \phi_{1,-1}(1) - \chi_{1,-1}(1) \phi_{1,1}(1) = 0.$$

Все ряды в представлениях $\varphi_{p,q}(r)$, $\psi_{p,q}(r)$, $\chi_{p,q}(r)$ и $\phi_{p,q}(r)$ являются абсолютно и равномерно сходящимися.

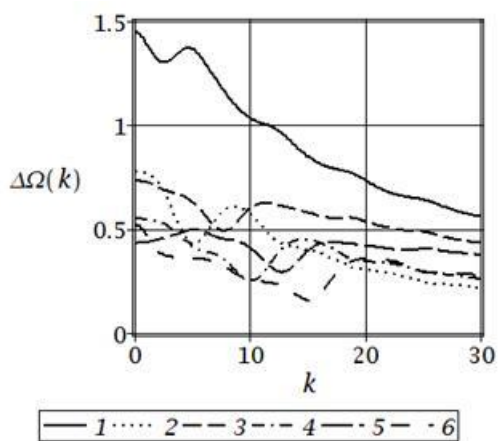
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

С целью исследования факторов влияния параметра радиальной неоднородности λ и степени механической анизотропии материала цилиндра на топологическую картину спектра бегущих осесимметричных нормальных продольных волн $\Omega^{(\lambda)}(k)$, распределения отнесенных к скорости бездисперсной осесимметричной волны кручения $V_t^{(\lambda=0)} = \sqrt{c_{44}^{(0)} c_* / \rho^{(0)}}$ в радиально однородном ($\lambda = 0$) цилиндре их фазовых скоростей $V_p^{(\lambda)}(k)$ и радиальные распределения нормированных величин

$$U_j(r) = u_j(r, 0, 0) / \max_{r \in [0,1]} (|u_j(r, 0, 0)|) \quad (j = r, z),$$

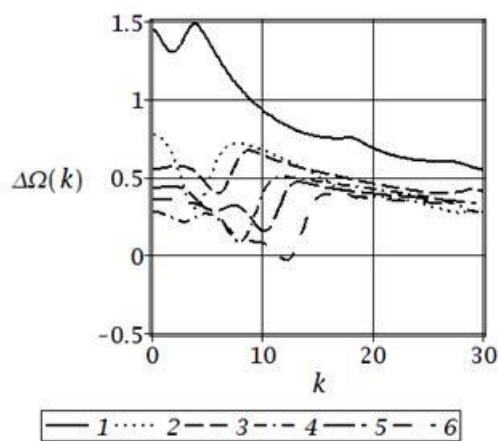
характеризующих формы амплитудных составляющих динамических перемещений для моментов времени, соответствующих началу периода волновых колебаний, при численном эксперименте в качестве базовых радиально однородных ($\lambda = 0$) были выбраны конкретные трансверсально-изотропные материалы, волноводные свойства которых характеризуются различными альтернативными величинами введенного в [1] приведенного параметра волновой анизотропии Δ . Из группы материалов с отрицательными значениями этого параметра взяты $Zn^{(\lambda=0)}$ ($\Delta = -10.24$) и $Cd^{(\lambda=0)}$ ($\Delta = -1.04$), а из группы с положительным значением – $CdS^{(\lambda=0)}$ ($\Delta = 0.37$) и $Co^{(\lambda=0)}$ ($\Delta = 0.64$). Для анализа полученных спектров использовалась также функция сравнения парных по номеру в соответствующем спектре мод $\Delta\Omega(k) = \Omega^{(2)}(k) - \Omega^{(-2)}(k)$.

Наиболее характерные результаты проведенных исследований для жестко закрепленного цилиндра представлены на рис. 1-8. Для цилиндра из $Zn^{(\lambda=0)}$, характеризующегося наибольшей волновой анизотропией в рассматриваемой группе материалов, все моды спектра $\Omega^{(2)}(k)$ в исследованном диапазоне волнового параметра k лежат выше соответствующих парных мод спектра $\Omega^{(-2)}(k)$ (рис. 1), в то время, как для цилиндра из $Co^{(\lambda=0)}$ третья и шестая моды спектра $\Omega^{(2)}(k)$ в области длинных и сверхдлинных волн оказались ниже соответствующих парных мод спектра $\Omega^{(-2)}(k)$ и только начиная с некоторого k_* для этих мод наблюдается характерная тенденция мажорирования сверху мод спектра $\Omega^{(2)}(k)$ над соответствующими парными модами спектра $\Omega^{(-2)}(k)$ (рис. 4).



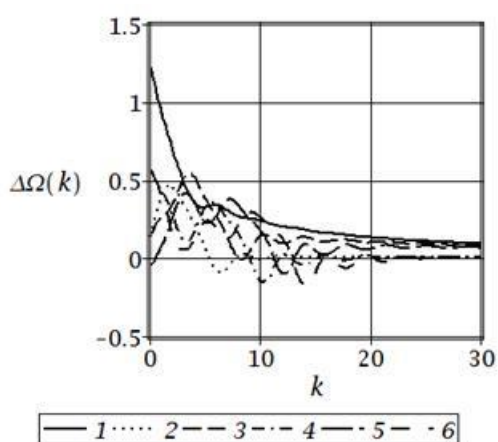
Zn (Закрепленный цилиндр)

Рис. 1



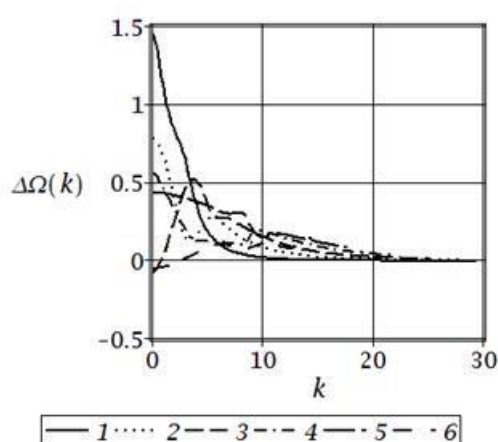
Cd (Закрепленный цилиндр)

Рис. 2



CdS (Закрепленный цилиндр)

Рис. 3



Co (Закрепленный цилиндр)

Рис. 4

Общей для всех рассмотренных случаев оказалась тенденция к максимальному различию спектров в диапазоне сверхдлинных волн для первой моды (на частоте запираания в отношении к $\Omega^{(2)}(0)$ для $Zn^{(\lambda=0)}$ 46%, для $Cd^{(\lambda=0)}$ 45%, для $Co^{(\lambda=0)}$ 42%, для $CdS^{(\lambda=0)}$ 46%).

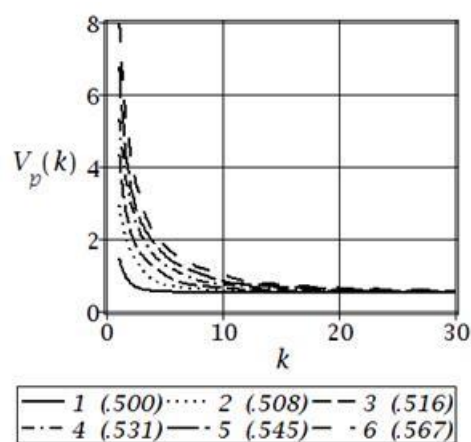
CdS, $\lambda=-2$, Закрепленный цилиндр

Рис. 5

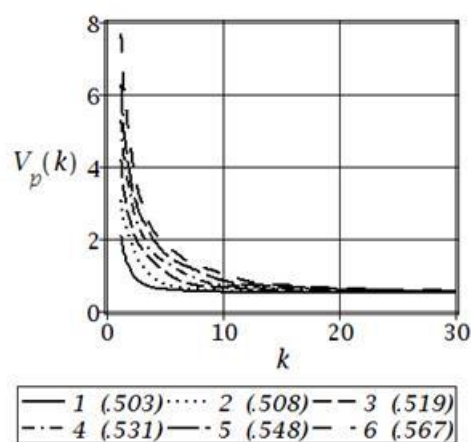
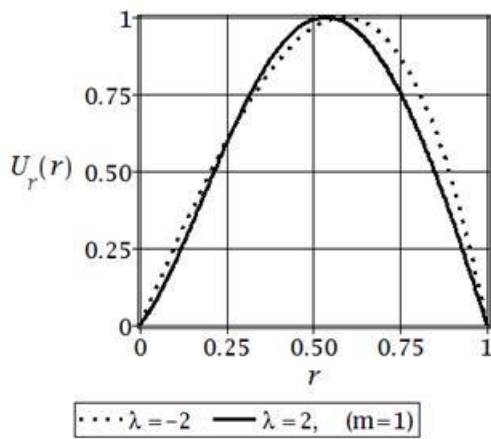
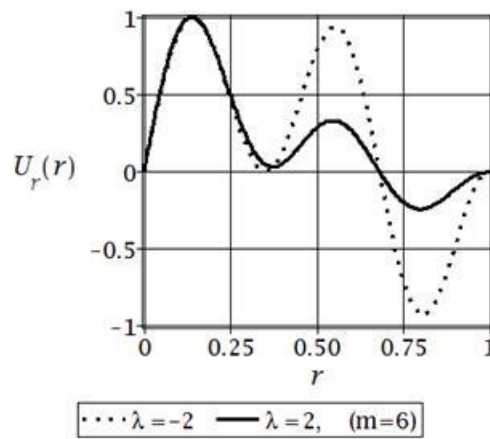
CdS, $\lambda=2$, Закрепленный цилиндр

Рис. 6



Cd (Закрепленный цилиндр)

Рис. 7



Cd (Закрепленный цилиндр)

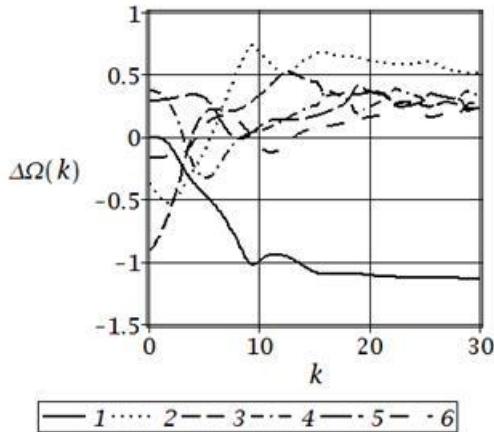
Рис. 8

Сравнительный анализ распределения относительных фазовых скоростей показал идентичность в асимптотическом поведении всех мод распространяющихся нормальных продольных волн в высокочастотном коротковолновом диапазоне при любых значениях показателя неоднородности λ – приближение относительных фазовых скоростей $V_p^{(\lambda)}(k)$ к критическому значению V_p^* ($V_p^* \approx 0.4998$ для $CdS^{(\lambda=0)}$) сверху (рис. 5, 6). В качестве непосредственного следствия данного факта стало устойчивое стремление значения функции $\Delta\Omega(k)$ в высокочастотном коротковолновом диапазоне к фиксированным значениям, степень близости к нулю которых оказалась существенно большей для слабо анизотропных материалов $CdS^{(\lambda=0)}$ и $Co^{(\lambda=0)}$ (рис. 3, 4) по сравнению с существенно анизотропными материалами $Zn^{(\lambda=0)}$ и $Cd^{(\lambda=0)}$ (рис. 1, 2).

На частотах, близких к частотам запирания ($k = 0.001$), был проведен сравнительный анализ кинематических форм упругих колебательных перемещений в исследуемых волнах для цилиндров из указанных материалов с различными показателями экспоненциальной неоднородности. Были проанализированы распределения относительных интенсивностей динамических перемещений $U_j(r)$ ($j=r, z$) в сечении волновода при альтернативных показателях радиальной неоднородности $\lambda = -2$ и $\lambda = 2$. Характерные результаты исследований приведены на рис. 7-8 (параметр m определяет номер волны). В качестве устойчивой тенденции исследованных распределений следует отметить: смещение локализации областей повышенной интенсивности волновых колебаний к границе цилиндра при уменьшении значения параметра неоднородности λ ; отсутствие прямой зависимости различий в интенсивности волновых колебаний на парных модах от различий в топологических картинах распределения действительных ветвей спектров для всех рассмотренных материалов – при наблюдаемых максимальных различиях в спектрах для первой моды на частотах, близких к частотам запирания и устойчивой тенденции к уменьшению этих различий с ростом номера волны, различия в кинематических формах упругих колебательных перемещений для первой волны в области критической частоты оказались наименьшими. В этой связи можно указать на рост количественной меры указанных эффектов с увеличением номера моды рассматриваемых волн.

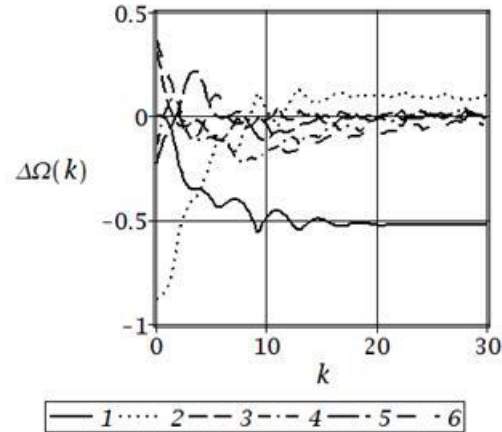
Наиболее характерные результаты проведенных численных исследований для свободного цилиндра представлены на рис. 9-12. Сравнительный анализ спектров выявил качественные и количественные отличия в поведении первой моды спектра от остальных (рис. 9, 10). Если для альтернативных показателей радиальной неоднородности $\lambda = -2$ и $\lambda = 2$ в длинноволновом диапазоне наибольшие различия выявлены для низших мод спектра, начиная со второй, то в высокочастотном коротковолновом диапазоне для всех материалов доминирующее отличие наблюдалось для первой моды при устойчивом асимптотическом

стремлении значения функции $\Delta\Omega(k)$ для нее к фиксированному отрицательному значению (≈ -1.152 для $Zn^{(\lambda=0)}$, ≈ -0.522 для $CdS^{(\lambda=0)}$).



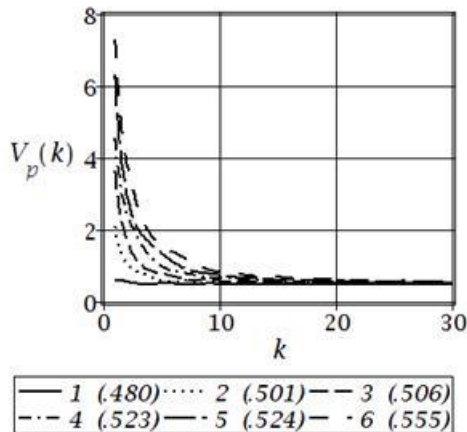
Zn (Свободный цилиндр)

Рис. 9



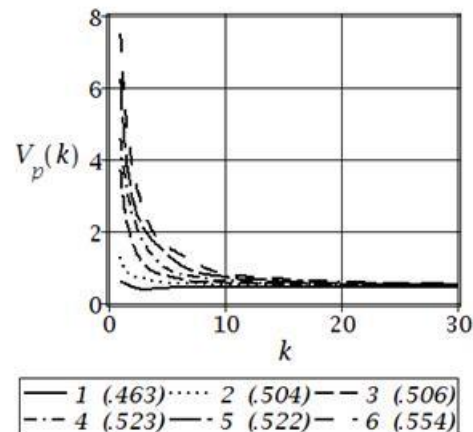
CdS (Свободный цилиндр)

Рис. 10



CdS, $\lambda = -2$, Свободный цилиндр

Рис. 11



CdS, $\lambda = 2$, Свободный цилиндр

Рис. 12

Данная закономерность нашла отражение и в картине распределения относительных фазовых скоростей. При идентичности асимптотического поведения всех мод спектра, начиная со второй, в высокочастотном коротковолновом диапазоне для любых значений показателя неоднородности λ , выявившейся в приближении относительных фазовых скоростей $V_p^{(\lambda)}(k)$ к V_p^* сверху, для первой моды при любых значениях показателя неоднородности λ асимптотику определяет относительная скорость поверхностной волны рэлеевского типа $V_R^{(\lambda=0)}$ в однородном ($\lambda = 0$) полупространстве, с общей тенденцией приближения $V_p^{(\lambda \geq 0)}(k)$ к асимптотическому значению ($V_R^{(\lambda=0)} \approx 0.4724$ для $CdS^{(\lambda=0)}$) снизу (рис. 11, 12).

ВЫВОДЫ

В результате проведенных исследований в форме абсолютно и равномерно сходящихся степенных рядов с определяемыми из рекуррентных соотношений коэффициентами получено решение системы дифференциальных уравнений, описывающее распространение осесимметричных нормальных продольных волн в бесконечно протяженном трансверсально-изотропном экспоненциально-неоднородном в радиальном направлении цилиндре. Построенное решение использовано для получения дисперсионных уравнений, определяющих спектр указанных волн для цилиндров со свободной или жестко

закрепленной граничной поверхностью. Для набора материалов с различными физико-механическими характеристиками проанализирована зависимость топологии распределений действительных ветвей спектров и фазовых скоростей бегущих нормальных волн от параметра неоднородности. На основе расчета нормированных форм волновых перемещений проиллюстрированы эффекты влияния показателя экспоненциальной неоднородности на кинематические характеристики исследуемых нормальных волн из различных мод спектра. Области использования результатов представленного исследования являются прочностные расчеты деталей машин, технологии ультразвуковой диагностики, акустоэлектроника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Космодамианский А. С. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред / А.С. Космодамианский, В.И. Сторожев. – К. : Наукова думка, 1985. – 176 с.
2. Berliner M. J. Wave propagation in fluid-loaded transversely isotropic cylinders. Part 1. Analytical formulation / M.J. Berliner, R. Solecki // *Journal of Acoustical Society of America*. – 1996. – Vol. 99. – P. 1841-1847.
3. Birman V. Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures / V. Birman, L.W. Byrd // *Appl. Mech. Rev.* – 2007. – Vol. 60, N 5. – P. 195-216.
4. Fang X.-Q. Dynamic stress around two holes in a functionally graded piezoelectric material layer under electro-elastic waves / X.-Q. Fang, J.-X. Liu, X.-H. Wang, L.-L. Zhang // *Phil. Mag. Lett.* – 2010. – Vol. 90. – P. 361-380.
5. Fang X.-Q. Dynamic stress from a cylindrical inclusion buried in a functionally graded piezoelectric material layer under electro-elastic waves / X.-Q. Fang, J.-X. Liu, X.-H. Wang, et al. // *Compos. Sci. Technol.* – 2009. – Vol. 69 – P. 1115-1123.
6. Fang X.-Q. Dynamic stress from a subsurface cylindrical inclusion in a functionally graded material layer under anti-plane shear waves / X.-Q. Fang, J.-X. Liu, L.-L. Zhang, Y.-P. Kong // *Mater. Struct.* – 2011. – Vol. 44. – P. 67-75.
7. Fang X.-Q. Multiple scattering of electro-elastic waves from a buried cavity in a functionally graded piezoelectric material layer / X.-Q. Fang // *Int. J. Solids Struct.* – 2008. – Vol. 45. – P. 5716–5729.
8. FGM: Design, processing and applications / Y. Miyamoto, W.A. Kaysser, B.H. Rabin et al. – Dordrecht: Kluwer Academic, 1999. – 434 p.
9. Frazer W. B. Separable equations for a cylindrical anisotropic elastic waveguide / W.B. Frazer // *Journal of Sound and Vibration*. – 1980. – Vol. 72. – P. 151-157.
10. Honarvar F. Guided ultrasonic waves in composite cylinders / F. Honarvar, E. Enjilela, A.N. Sinclair // *Mechanics of Composite Materials*. – 2007. – Vol. 43, N 3. – P. 277-288.
11. Honarvar F. Wave propagation in transversely isotropic cylinders / F. Honarvar, E. Enjilela, A.N. Sinclair, S.A. Mirnezami // *International Journal of Solids and Structures*. – 2007. – Vol. 44. – P. 5236-5246.
12. Mirsky I. Wave propagation in transversely isotropic circular cylinders part 1: Theory / I. Mirsky // *Journal of Acoustical Society of America*. – 1964. – Vol. 36. – P. 2106-2122.
13. Nayfeh A.H. Analyses of axisymmetric waves in layered piezoelectric rods and their composites / A.H. Nayfeh, W.G. Abdelrahman, P.B. Nagy // *Journal of Acoustical Society of America*. – 2000. – Vol. 108, N 4. – P. 1496-1504.
14. Wei J.P. Wave propagation in a piezoelectric rod of 6mm symmetry / J.P. Wei, X.Y. Su // *International Journal of Solids and Structures*. – 2005. – January, Vol. 42. – P. 3644-3654.

REFERENCES

1. Kosmodamianskii, A.S. and Storozhev, V.I. (1985), *Dinamicheskie zadachi teorii uprugosti dlya anizotropnykh sred* [Dynamic elastic problems for anisotropic media], Naukova Dumka, Kiev.
2. Berliner, M.J. and Solecki, R. (1996), “Wave propagation in fluid-loaded transversely isotropic cylinders. Part 1. Analytical formulation”, *Journal of Acoustical Society of America*, vol. 99, pp. 1841-1847.
3. Birman, V. and Byrd, L.W. (2007), “Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures”, *Appl. Mech. Rev.*, vol. 60, no. 5, pp. 195-216.
4. Fang, X.-Q., Liu, J.-X., Wang, X.-H. and Zhang, L.-L. (2010), “Dynamic stress around two holes in a functionally graded piezoelectric material layer under electro-elastic waves”, *Phil. Mag. Lett.*, vol. 90, pp. 361-380.
5. Fang, X.-Q., Liu, J.-X., Wang, X.-H. et al. (2009), “Dynamic stress from a cylindrical inclusion buried in a functionally graded piezoelectric material layer under electro-elastic waves”, *Compos. Sci. Technol.*, vol. 69, pp. 1115-1123.

6. Fang, X.-Q., Liu, J.-X., Zhang, L.-L. and Kong, Y.-P. (2011), "Dynamic stress from a subsurface cylindrical inclusion in a functionally graded material layer under anti-plane shear waves", *Mater. Struct.*, vol. 44, pp. 67-75.
7. Fang, X.-Q. (2008), "Multiple scattering of electro-elastic waves from a buried cavity in a functionally graded piezoelectric material layer", *Int. J. Solids Struct.*, vol. 45, pp. 5716-5729.
8. Miyamoto, Y., Kaysser, W.A., Rabin, B.H. et al. (1999), "FGM: Design, processing and applications", Kluwer Academic, Dordrecht.
9. Frazer, W.B. (1980), "Separable equations for a cylindrical anisotropic elastic waveguide", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 72, pp. 151-157.
10. Honarvar, F., Enjilela, E. and Sinclair, A.N. (2007), "Guided ultrasonic waves in composite cylinders", *Mechanics of Composite Materials*, vol. 43, no. 3, pp. 277-288.
11. Honarvar, F., Enjilela, E., Sinclair, A.N. and Mirnezami, S.A. (2007), "Wave propagation in transversely isotropic cylinders", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 44, pp. 5236-5246.
12. Mirsky, I. (1964), "Wave propagation in transversely isotropic circular cylinders part 1: Theory", *Journal of Acoustical Society of America*, vol. 36, pp. 2106-2122.
13. Nayfeh, A.H., Abdelrahman, W.G. and Nagy, P.B. (2000), "Analyses of axisymmetric waves in layered piezoelectric rods and their composites", *Journal of Acoustical Society of America*, vol. 108, no. 4, pp. 1496-1504.
14. Wei, J.P. and Su, X.Y. (2005), "Wave propagation in a piezoelectric rod of 6mm symmetry", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 42, pp. 3644-3654.

УДК 539.3

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ОБЛАСТИ ЧЕТЫРЕХ СЖАТЫХ СФЕРОИДАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Николаев А. Г., Танчик Е. А.

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»,
г. Харьков, Украина*

eug.tanchik@yandex.ru

Исследованы напряжения в области четырех сжатых сфероидальных включений в упругом пространстве. Для их определения решена неосесимметричная краевая задача для уравнения Ламе в пространстве со сфероидальными включениями, центры которых находятся в вершинах квадрата. Предполагается, что на бесконечности приложена однородная постоянная нагрузка, а сфероидальные включения находятся в условиях идеального контакта с упругим пространством. Общее решение задачи строится обобщенным методом Фурье, который позволяет точно удовлетворить граничным условиям. Приведен численный анализ распределения напряжений на линии между центрами соседних включений в зависимости от их геометрических параметров.

Ключевые слова: теоремы сложения, базисные решения уравнения Ламе, сжатые сфероидальные включения, граничные условия, напряженно-деформированное состояние, обобщенный метод Фурье, метод редукции.

РОЗПОДІЛ НАПРУЖЕНЬ В ОБЛАСТІ ЧОТИРЬОХ СТИСНУТИХ СФЕРОЇДАЛЬНИХ ВКЛЮЧЕНЬ У ПРУЖНОМУ ПРОСТОРІ

Ніколаєв О. Г., Танчик Є. А.

*Національний аерокосмічний університет ім. М.С. Жуковського «ХАІ»,
м. Харків, Україна*

eug.tanchik@yandex.ru

Досліджено напруження в області чотирьох стиснутих сфероїдальних включень у пружному просторі. Для їх визначення розв'язана неосесимметрична крайова задача для рівняння Ламе в просторі зі сфероїдальними включеннями, центри яких знаходяться в вершинах квадрату. Передбачається, що на нескінченності прикладено однорідне постійне навантаження, а сфероїдальні включення знаходяться в умовах ідеального