

6. Fang, X.-Q., Liu, J.-X., Zhang, L.-L. and Kong, Y.-P. (2011), "Dynamic stress from a subsurface cylindrical inclusion in a functionally graded material layer under anti-plane shear waves", *Mater. Struct.*, vol. 44, pp. 67-75.
7. Fang, X.-Q. (2008), "Multiple scattering of electro-elastic waves from a buried cavity in a functionally graded piezoelectric material layer", *Int. J. Solids Struct.*, vol. 45, pp. 5716-5729.
8. Miyamoto, Y., Kaysser, W.A., Rabin, B.H. et al. (1999), "FGM: Design, processing and applications", Kluwer Academic, Dordrecht.
9. Frazer, W.B. (1980), "Separable equations for a cylindrical anisotropic elastic waveguide", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 72, pp. 151-157.
10. Honarvar, F., Enjilela, E. and Sinclair, A.N. (2007), "Guided ultrasonic waves in composite cylinders", *Mechanics of Composite Materials*, vol. 43, no. 3, pp. 277-288.
11. Honarvar, F., Enjilela, E., Sinclair, A.N. and Mirnezami, S.A. (2007), "Wave propagation in transversely isotropic cylinders", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 44, pp. 5236-5246.
12. Mirsky, I. (1964), "Wave propagation in transversely isotropic circular cylinders part 1: Theory", *Journal of Acoustical Society of America*, vol. 36, pp. 2106-2122.
13. Nayfeh, A.H., Abdelrahman, W.G. and Nagy, P.B. (2000), "Analyses of axisymmetric waves in layered piezoelectric rods and their composites", *Journal of Acoustical Society of America*, vol. 108, no. 4, pp. 1496-1504.
14. Wei, J.P. and Su, X.Y. (2005), "Wave propagation in a piezoelectric rod of 6mm symmetry", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 42, pp. 3644-3654.

УДК 539.3

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ОБЛАСТИ ЧЕТЫРЕХ СЖАТЫХ СФЕРОИДАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Николаев А. Г., Танчик Е. А.

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»,
г. Харьков, Украина*

eug.tanchik@yandex.ru

Исследованы напряжения в области четырех сжатых сфероидальных включений в упругом пространстве. Для их определения решена неосесимметричная краевая задача для уравнения Ламе в пространстве со сфероидальными включениями, центры которых находятся в вершинах квадрата. Предполагается, что на бесконечности приложена однородная постоянная нагрузка, а сфероидальные включения находятся в условиях идеального контакта с упругим пространством. Общее решение задачи строится обобщенным методом Фурье, который позволяет точно удовлетворить граничным условиям. Приведен численный анализ распределения напряжений на линии между центрами соседних включений в зависимости от их геометрических параметров.

Ключевые слова: теоремы сложения, базисные решения уравнения Ламе, сжатые сфероидальные включения, граничные условия, напряженно-деформированное состояние, обобщенный метод Фурье, метод редукции.

РОЗПОДІЛ НАПРУЖЕНЬ В ОБЛАСТІ ЧОТИРЬОХ СТИСНУТИХ СФЕРОЇДАЛЬНИХ ВКЛЮЧЕНЬ У ПРУЖНОМУ ПРОСТОРИ

Ніколаєв О. Г., Танчик Є. А.

*Національний аерокосмічний університет ім. М.С. Жуковського «ХАІ»,
м. Харків, Україна*

eug.tanchik@yandex.ru

Досліджено напруження в області чотирьох стиснутих сфероїдальних включень у пружному просторі. Для їх визначення розв'язана неосесимметрична крайова задача для рівняння Ламе в просторі зі сфероїдальними включеннями, центри яких знаходяться в вершинах квадрату. Передбачається, що на нескінченності прикладено однорідне постійне навантаження, а сфероїдальні включення знаходяться в умовах ідеального

контакту з пружним простором. Загальне рішення задачі будується узагальненим методом Фур'є, який дозволяє точно задовольнити граничним умовам. Наведено чисельний аналіз розподілу напружень на лінії між центрами сусідніх включень залежно від їх геометричних параметрів.

Ключові слова: теореми додавання, базисні розв'язки рівняння Ламе, стиснуті сфероїдальні включення, граничні умови, напружено-деформований стан, узагальнений метод Фур'є, метод редукції.

STRESSES DISTRIBUTION IN THE DOMAIN OF FOUR OBLATE SPHEROIDAL INCLUSIONS IN AN ELASTIC SPACE

Nikolaev A. G., Tanchik E. A.

*National Aerospace University N. E. Zhukovsky «KhAI»
Kharkiv, Ukraine*

eug.tanchik@yandex.ru

Stresses in domain of four oblate spheroidal inclusions in an elastic space are investigated. For determine them a non-axisymmetric boundary value problem for Lamé equation in space with spheroidal inclusions whose centers are located at the vertices of a square has been solved. It is assumed that at infinity uniform constant load is applied, and the spheroidal inclusions are in a perfect contact with the elastic space. The general solution of the problem is constructed by generalized Fourier method, which allows accurately satisfy the boundary conditions. A numerical analysis of the stresses distribution in the line between the centers of adjacent inclusions depending on their geometric parameters is given.

Key words: addition theorems, basic solutions of Lamé equation oblate spheroidal inclusions, boundary conditions, stress-strain state, the generalized Fourier method, the method of reduction.

ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия наблюдается стремительный рост внедрения новых видов материалов при проектировании различных образцов техники в высокотехнологических областях, в частности, в авиаракетостроении. К таким материалам относятся металлические и неметаллические композиты, металлопены, керамика, интерметаллиды, полимеры и др. При этом важной задачей является создание математических моделей материалов, учитывающих их физические и геометрические неоднородности. Практически все известные на сегодняшний день модели обладают одним существенным недостатком – они учитывают влияние неоднородностей приближенно. При этом в авиаракетостроении с каждым годом повышаются требования к точности расчетов полей напряжений и деформаций, которые возникают в процессе эксплуатации летательных аппаратов. В связи с этим актуальной задачей для высокотехнологических областей промышленности является задача точного определения напряженно-деформированного состояния многокомпонентных материалов.

В настоящее время предлагаются разные модели напряженно-деформированного состояния пористых и композиционных материалов. В работе [1] обобщены базовые подходы, применяемые в математических моделях, и общие методы решения уравнений механики стохастических композитов. Они могут быть сведены к стохастическим уравнениям теории упругости структурно неоднородного тела, к уравнениям теории эффективных упругих модулей, к уравнениям теории упругих смесей или к более общим уравнениям четвертого порядка. Решение стохастических уравнений теории упругости для произвольной области вызывает значительные математические трудности и может быть реализовано только приближенно. Построение уравнений теории эффективных упругих модулей связано с задачей определения интегральных модулей стохастически неоднородной среды, которая может быть решена методом возмущений, методом моментов или методом условных моментов. Однако, т.к. уравнения состояния не были строго обоснованы, эта теория не может использоваться для систематического моделирования композитных структур.

В статьях [2-4] методами теории аналитических функций решаются некоторые осесимметричные задачи теории упругости для системы сферических и эллипсоидальных полостей и включений.

В статье [5] предложена структурная модель зернистого эластомерного композита, позволившая связать его деформационное и прочностное поведение с размерами частиц дисперсной фазы, т.е. учесть масштабный фактор прочности. На основе теоретических исследований напряженно-деформированного состояния вокруг двух жестких сферических включений в упругой несжимаемой матрице установлены зависимости математического ожидания разрывного усилия от физико-механических характеристик связующего, размеров частиц и расстояния между ними. В результате предложен новый вероятностный критерий появления микроразрушения в композитной структуре в виде отслоений матрицы от частиц. С его помощью проведены модельные исследования процессов развития внутренней поврежденности в композитной системе в зависимости от степени наполнения и величины включений. Построены соответствующие кривые растяжения, определены предельные разрывные макронапряжения и макродеформации.

В работах [6, 7] методами теории гармонических функций исследованы осесимметричные напряженные состояния в упругом пространстве с двумя сферическими включениями и в полупространстве с вытянутой сфероидальной полостью.

В статье [8] сделана попытка моделирования напряженного состояния упругой среды с периодической системой вытянутых сфероидальных включений.

В статье [9] дается обзор методов моделирования напряженного состояния композита с очень малыми размерами нановключений. Обсуждаются варианты применения функции Грина, непосредственного интегрирования уравнений равновесия, метода бесконечно малых включений. Все перечисленные методы учитывают неоднородные включения приближенно.

В работе [10] на примере решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа приводится сравнительный анализ методов решения краевых задач в областях с N непересекающимися включениями.

В статьях [11, 12] исследовано напряженное состояние в окрестности четырех вытянутых сфероидальных пор и включений в упругом материале обобщенным методом Фурье (ОМФ). Численная реализация модели позволила получить характер распределения локальных напряжений в области их концентрации. Аппарат и применение ОМФ излагается в работах [13, 14]. Развитие ОМФ на модифицированный базис в сжатых сфероидальных координатах приведено в [15, 16]. В настоящей работе исследуется локальное поле напряжений в области четырех сжатых сфероидальных включений в упругом пространстве.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается упругое пространство Ω с четырьмя непересекающимися сжатыми сфероидальными включениями Ω_j , центры которых расположены в вершинах квадрата со стороной a , как показано на рис. 1. Будем использовать одинаково ориентированные цилиндрические (ρ_j, φ_j, z_j) и сжатые сфероидальные системы координат $(\xi_j, \eta_j, \varphi_j)$, начала которых отнесены к центрам включений O_j , $j=1\div 4$. Граница Γ_j сфероидального включения Ω_j описывается в локальной сжатой сфероидальной системе координат уравнением $\xi_j = \xi_{j0}$. Материал пространства имеет упругие характеристики (G, σ) , материал включений – (G_j, σ_j) .

Будем считать, что на бесконечности приложены постоянные растягивающие усилия $\sigma_z^\infty = T$, $\tau_{\rho z}^\infty = \tau_{\varphi z}^\infty = 0$ (одноосное растяжение) или $\sigma_\rho^\infty = T$, $\tau_{\rho\varphi}^\infty = \tau_{\rho z}^\infty = 0$ (двуосное растяжение), а включения находятся в условиях идеального контакта с упругим пространством.

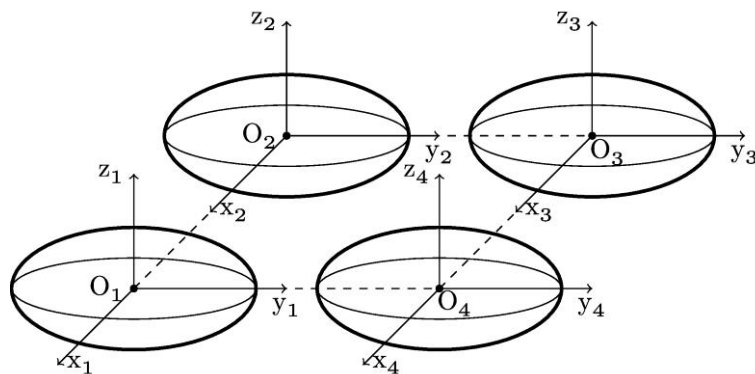


Рис. 1. Схематическое представление задачи

Для определения напряженно-деформированного состояния в рассматриваемом теле необходимо решить краевую задачу для уравнения Ламе

$$\Delta \mathbf{U} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{U} = 0 \quad (1)$$

с условиями сопряжения на границе включений

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{\Gamma_j} = \mathbf{F}\mathbf{U}_j|_{\Gamma_j}, \quad \mathbf{U}|_{\Gamma_j} = \mathbf{U}_j|_{\Gamma_j}, \quad (2)$$

а также указанными выше условиями на бесконечности. Здесь $\mathbf{F}\mathbf{U}$ – отвечающий перемещению \mathbf{U} вектор усилий на соответствующей граничной поверхности; σ – коэффициент Пуассона.

ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ

Решение задачи в упругом пространстве Ω ищется в виде:

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{U}_0; \quad (3)$$

$$\tilde{\mathbf{U}} = \sum_{j=1}^4 \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{s,n,m}^{(j)} \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(6)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) \quad \text{при } x \in \Omega \setminus \bigcup_j \Omega_j, \quad (4)$$

$$\mathbf{U}_j = \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n b_{s,n,m}^{(j)} \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{-(6)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) \quad \text{при } x \in \Omega_j, \quad (5)$$

где $a_{s,n,m}^{(j)}$, $b_{s,n,m}^{(j)}$ – неизвестные коэффициенты, которые определяются из граничных условий. Перемещение \mathbf{U}_0 соответствует напряженно-деформированному состоянию на бесконечности (для одноосного и двуосного растяжения упругого пространства):

$$\mathbf{U}_0 = -\frac{1}{2} \frac{T\sigma\rho}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{2} \frac{Tz}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_z; \quad (6)$$

$$\mathbf{U}_0 = -\frac{1}{2} \frac{T(\sigma-1)\rho}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_\rho - \frac{1}{2} \frac{T\sigma z}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_z; \quad (7)$$

где T – усилие на бесконечности; G – модуль сдвига; $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$ – орты цилиндрической системы координат.

В работе [13] были введены наборы частных решений уравнения Ламе (1) в сжатых сфероидальных системах координат (ξ, η, φ)

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(6)} = \frac{-ic}{2n+1} \mathbf{D}_s \left[u_{n-1,m}^{\pm(6)} - u_{n+1,m}^{\pm(6)} \right], \quad s = 1, 3; \quad (8)$$

$$\mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(6)} = \mathbf{D}_2 u_{n,m}^{\pm(6)} - ic\bar{q}_0^2 \mathbf{D}_1 u_{n\pm 1,m}^{\pm(6)}, \quad n, m \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0, \quad |m| \leq n+1, \quad (9)$$

$$u_{n,m}^{\pm(6)}(\xi, \eta, \varphi) = u_{n,m}^{\pm}(\xi) S_n^m, \quad u_{n,m}^+(\xi) = Q_n^{-m}(\text{ish } \xi), \quad u_{n,m}^-(\xi) = P_n^{-m}(\text{ish } \xi),$$

где $\mathbf{D}_1 = \nabla$, $\mathbf{D}_2 = z\nabla - \chi \mathbf{e}_z$, $\mathbf{D}_3 = i[\nabla \times \mathbf{e}_z]$ (здесь i - мнимая единица), $S_n^m = P_n^m(\cos \eta) e^{im\varphi}$, $\chi = 3 - 4\sigma$, $\bar{q} = sh \xi$, $\bar{q}_0 = sh \xi_0$, P_n^m и Q_n^m - присоединенные функции Лежандра первого и второго рода соответственно.

В координатной форме перемещения (8), (9) имеют вид:

$$\mathbf{U}_{1,n,m}^{\pm(6)} = u_{n,m-1}^{\pm(6)} \mathbf{e}_{-1} - u_{n,m+1}^{\pm(6)} \mathbf{e}_1 - u_{n,m}^{\pm(6)} \mathbf{e}_0, \quad (10)$$

$$\mathbf{U}_{3,n,m}^{\pm(6)} = -u_{n,m-1}^{\pm(6)} \mathbf{e}_{-1} - u_{n,m+1}^{\pm(6)} \mathbf{e}_1, \quad (11)$$

$$\mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(6)} = i\bar{q} u_{1,n,m-1}^{\pm(6)} \mathbf{e}_{-1} - i\bar{q} u_{1,n,m+1}^{\pm(6)} \mathbf{e}_1 - [i\bar{q} u_{1,n,m}^{\pm(6)} + \chi u_{n,m}^{\pm(6)}] \mathbf{e}_0 + ic(\bar{q}^2 - \bar{q}_0^2) \nabla u_{n\pm 1,m}^{\pm(6)}, \quad (12)$$

где

$$u_{1,n,m}^{\pm(6)} = u_{1,n,m}^{\pm} S_n^m, \quad u_{1,n,m}^+ = (n+m+1) Q_{n+1}^{-m}(i\bar{q}), \quad u_{1,n,m}^- = -(n-m) P_{n-1}^{-m}(i\bar{q}).$$

Базис $(\mathbf{e}_{-1}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_0)$ связан с ортами цилиндрической системы координат следующим образом:

$$\mathbf{e}_{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\rho + i\mathbf{e}_\varphi) e^{i\varphi}, \quad \mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\rho - i\mathbf{e}_\varphi) e^{-i\varphi}, \quad \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z.$$

Можно заметить, что приведенные частные решения уравнения Ламе не при всех индексах n и m являются регулярными линейно независимыми функциями в областях $\xi > \xi_0$ ($\xi < \xi_0$). Ввиду этого в работе [13] были введены наборы регулярных линейно независимых модифицированных решений уравнения Ламе в соответствующих областях

$$\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(6)} = \mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(6)}, \quad s=1 \div 3, \quad n \in \mathbb{N}, \quad |m| \leq n-1; \quad \tilde{\mathbf{U}}_{1,n,\pm n}^{+(6)} = \mathbf{U}_{1,n,\pm n}^{+(6)} \mp \mathbf{U}_{3,n,\pm n}^{+(6)}, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,0,0}^{+(6)} = -\chi \mathbf{U}_{1,0,1}^{+(6)} + \mathbf{U}_{2,0,1}^{+(6)} + (1+\chi) \mathbf{U}_{3,0,1}^{+(6)}; \quad \tilde{\mathbf{U}}_{2,n,\pm n}^{+(6)} = \mathbf{U}_{2,n,\pm n}^{+(6)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+;$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,n,\pm n}^{+(6)} = -\chi \mathbf{U}_{1,n,\pm(n+1)}^{+(6)} + \mathbf{U}_{2,n,\pm(n+1)}^{+(6)} \pm (1+\chi) \mathbf{U}_{3,n,\pm(n+1)}^{+(6)} \quad n \in \mathbb{N};$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,0,0}^{-(6)} = -\chi \mathbf{U}_{1,0,-1}^{-(6)} + \mathbf{U}_{2,0,-1}^{-(6)} - (1+\chi) \mathbf{U}_{3,0,-1}^{-(6)}; \quad \tilde{\mathbf{U}}_{1,n,\pm n}^{-(6)} = \mathbf{U}_{1,n,\pm n}^{-(6)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+; \quad \tilde{\mathbf{U}}_{2,n,\pm n}^{-(6)} = \mathbf{U}_{1,n,\pm(n+1)}^{-(6)}, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,n,\pm n}^{-(6)} = \mathbf{U}_{3,n,\pm n}^{-(6)}, \quad n \in \mathbb{N}; \quad \tilde{\mathbf{U}}_{2,0,0}^{-(6)} = \mathbf{U}_{1,0,1}^{-(6)}, \quad \tilde{\mathbf{U}}_{3,0,0}^{-(6)} = \mathbf{U}_{1,0,-1}^{-(6)}.$$

В работе [17] было доказано, что приведенные наборы решений являются базисными решениями уравнения Ламе в областях $\xi > \xi_0$ и $\xi < \xi_0$. В работе [13] были получены теоремы сложения решений (8), (9) в сжатых сфероидальных системах координат, начала которых произвольно сдвинуты друг относительно друга. В работе [15] доказана теорема сложения для модифицированного базиса.

Теорема. Справедливы теоремы сложения внешних базисных решений уравнения Ламе по внутренним решениям при $\xi_\alpha \in (0, \gamma_{j\alpha})$:

$$\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(6)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=-k}^k \tilde{T}_{s,n,m,j}^{t,k,\ell,\alpha} \tilde{\mathbf{U}}_{t,k,\ell}^{-(6)}(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \varphi_\alpha), \quad (13)$$

где коэффициенты $\tilde{T}_{s,n,m,j}^{t,k,\ell,\alpha}$ приведены в работе [15].

Вектор напряжений на площадке с нормалью \mathbf{n} имеет вид:

$$\mathbf{FU} = 2G \left[\frac{\sigma}{1-2\sigma} \mathbf{n} \text{div} \mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{2} (\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{U}) \right]. \quad (14)$$

Применив к формулам (8), (9) оператор (14) на площадке с нормалью $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ получим:

$$\mathbf{F}\mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(6)} \Big|_{\xi=\xi_0} = 2G \frac{h}{c} \sum_{r=-1}^1 F_{s,n,m}^{\pm(r)}(\xi_0) P_n^{m+r}(\cos \eta) e^{i(m+r)\varphi} \mathbf{e}_r, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} F_{1,n,m}^{\pm(-1)} &= \frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m-1}^{\pm}, & F_{1,n,m}^{\pm(1)} &= -\frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m+1}^{\pm}, & F_{2,n,m}^{\pm(1)} &= -i\bar{q}^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{q}^{-1} u_{1,n,m+1}^{\pm}) + 2\sigma u_{3,n,m}^{\pm}, \\ F_{2,n,m}^{\pm(0)} &= -i\bar{q}^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{q}^{-1} u_{1,n,m}^{\pm}) + (2\sigma - 1) \frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m}^{\pm}, & F_{1,n,m}^{\pm(0)} &= -\frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m}^{\pm}, \\ F_{2,n,m}^{\pm(-1)} &= i\bar{q}^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{q}^{-1} u_{1,n,m-1}^{\pm}) - 2\sigma u_{2,n,m}^{\pm}, & F_{3,n,m}^{\pm(-1)}(\xi) &= -\frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m-1}^{\pm}(\xi) + \frac{1}{2} u_{2,n,m}^{\pm}(\xi), \\ F_{3,n,m}^{\pm(1)}(\xi) &= -\frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m+1}^{\pm}(\xi) + \frac{1}{2} u_{n,m}^{\pm}(\xi), & F_{3,n,m}^{\pm(0)}(\xi) &= \frac{m\bar{q}}{2q} u_{n,m}^{\pm}(\xi); & u_{2,n,m}^{+(6)} &= \omega^- Q_n^{-m}(i\bar{q}) S_n^{m-1}, \\ u_{3,n,m}^{+(6)} &= Q_n^{-m}(i\bar{q}) S_n^{m+1}, & u_{3,n,m}^{-(6)} &= P_n^{-m}(i\bar{q}) S_n^{m+1}, & u_{2,n,m}^{-(6)} &= \omega^- P_n^{-m}(i\bar{q}) S_n^{m-1}, \\ \omega^- &= (n+m)(n-m+1), & h &= (\bar{q}^2 + \cos^2 \eta)^{-1/2}, & \bar{q} &= sh\xi. \end{aligned}$$

Используя теоремы сложения (13), представим вектор перемещения $\tilde{\mathbf{U}}$ в системе координат с началом в точке O_j :

$$\tilde{\mathbf{U}} = \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{s,n,m}^{(j)} \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(6)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) + \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{-(6)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=-k}^k a_{t,k,\ell}^{(\alpha)} \tilde{T}_{t,k,\ell,\alpha}^{s,n,m,j}. \quad (16)$$

После удовлетворения граничных условий задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $a_{s,n,m}^{(j)}$, $b_{s,n,m}^{(j)}$:

$$\sum_{s=1}^3 a_{s,n,m}^{(j)} \tilde{F}_{s,n,m}^{+(r)}(\xi_j) + \tilde{F}_{s,n,m}^{-(r)}(\xi_j) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=-k}^k a_{t,k,\ell}^{(\alpha)} \tilde{T}_{t,k,\ell,\alpha}^{s,n,m,j} + F_{0,n,m}^{(r)} = \frac{G_j}{G} \sum_{s=1}^3 b_{s,n,m}^{(j)} \tilde{F}_{s,n,m}^{-(r)}(\xi_j), \quad (17)$$

$$\sum_{s=1}^3 a_{s,n,m}^{(j)} \tilde{E}_{s,n,m}^{+(r)}(\xi_j) + \tilde{E}_{s,n,m}^{-(r)}(\xi_j) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=-k}^k a_{t,k,\ell}^{(\alpha)} \tilde{T}_{t,k,\ell,\alpha}^{s,n,m,j} + E_{0,n,m}^{(r)} = \sum_{s=1}^3 b_{s,n,m}^{(j)} \tilde{E}_{s,n,m}^{-(r)}(\xi_j), \quad (18)$$

$$r = -1, 0, 1; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = -n \div n,$$

$$\text{где } E_{0,n,m}^{(k)} = \frac{Tc}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0} \left[-\frac{2\sigma}{1+\sigma} \text{ch} \xi_{0j} \delta_{k,-1} + \frac{\sigma}{1+\sigma} \text{ch} \xi_{0j} \delta_{k1} + \frac{1}{1+\sigma} \text{sh} \xi_{0j} \delta_{k0} \right], \quad F_{0,n,m}^{(0)} = \frac{Td_1}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0},$$

$$F_{0,n,m}^{(-1)} = F_{0,n,m}^{(1)} = 0 \quad (\text{для одноосного растяжения}) \quad \text{и} \quad F_{0,n,m}^{(0)} = 0, \quad F_{0,n,m}^{(-1)} = \frac{Td_2}{G} \delta_{n1} \delta_{m0},$$

$$F_{0,n,m}^{(-1)} = -\frac{Td_2}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0} \quad E_{0,n,m}^{(k)} = \frac{Tc}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0} \left[\frac{2-2\sigma}{1+\sigma} \text{ch} \xi_{0j} \delta_{k,-1} - \frac{1-\sigma}{1+\sigma} \text{ch} \xi_{0j} \delta_{k1} - \frac{2\sigma}{1+\sigma} \text{sh} \xi_{0j} \delta_{k0} \right] \quad (\text{для}$$

двуосного растяжения). Выражения $\tilde{E}_{s,n,m}^{\pm(r)}(\xi_j)$, $\tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(r)}(\xi_j)$ являются компонентами перемещений $\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(6)}$ и напряжений $\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(6)}$ и получаются из компонент $\mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(6)}$, $\mathbf{F}\mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(6)}$ при помощи линейных преобразований. Ввиду громоздкости их явный вид мы не приводим. Оператор системы уравнений (17), (18) является фредгольмовым при условии непересечения граничных поверхностей [17].

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

При численном анализе полагаем коэффициент Пуассона материала упругого пространства равным $\sigma = 0.38$, а включений – $\sigma_j = 0.21$, отношение модулей сдвига $G_j / G = 25$;

включения считаем одного размера. Система уравнений (17), (18) численно решается методом редукции ($n_{max} = 6$). На основании полученных решений находятся нормальные напряжения на площадках, параллельных координатным плоскостям. На рис. 2-4 приведены напряжения σ_x/T , σ_y/T , σ_z/T на линии O_1O_4 (рис. 1) вне включений при одноосном и двuosном растяжениях упругого пространства в зависимости от относительного расстояния a/d_2 между включениями.

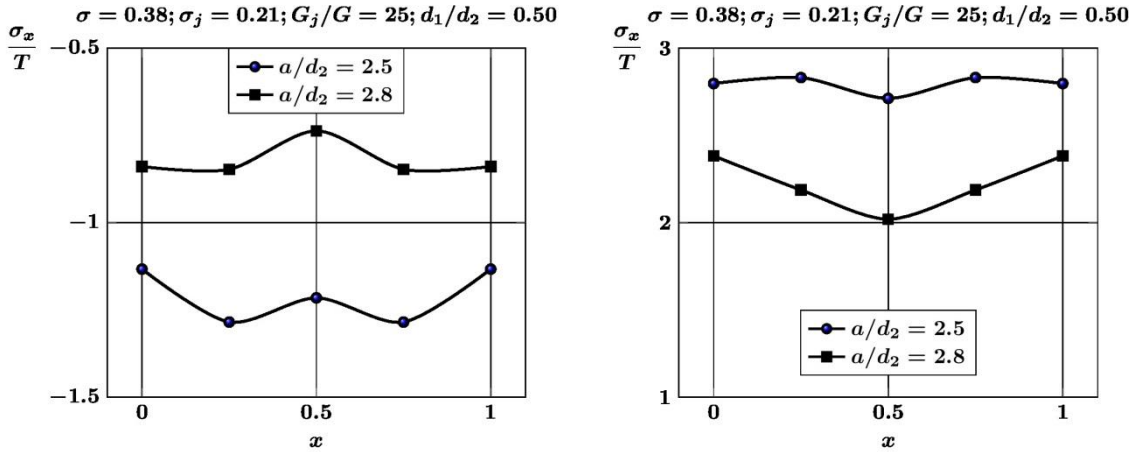


Рис. 2. Напряжения σ_x/T на линии O_1O_4 в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном и двuosном растяжении

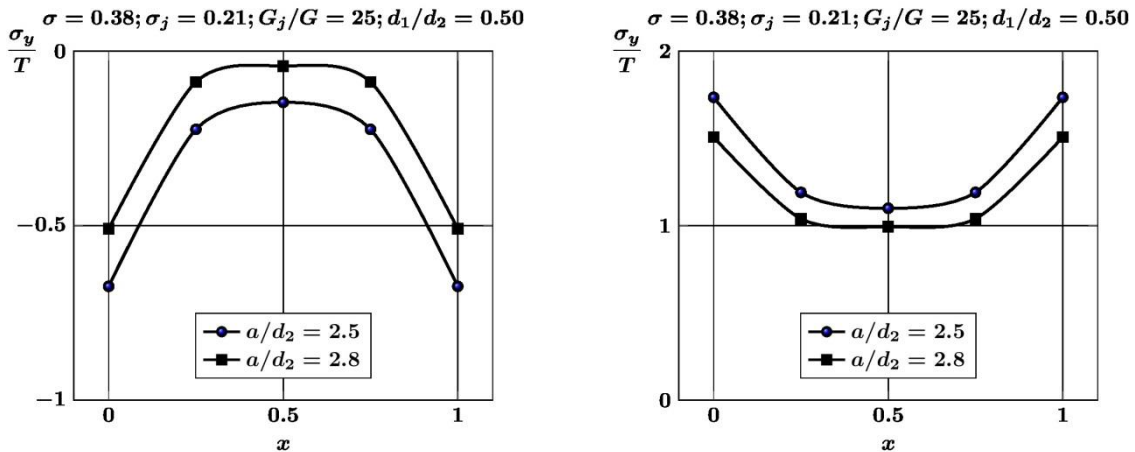


Рис. 3. Напряжения σ_y/T на линии O_1O_4 в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном и двuosном растяжении

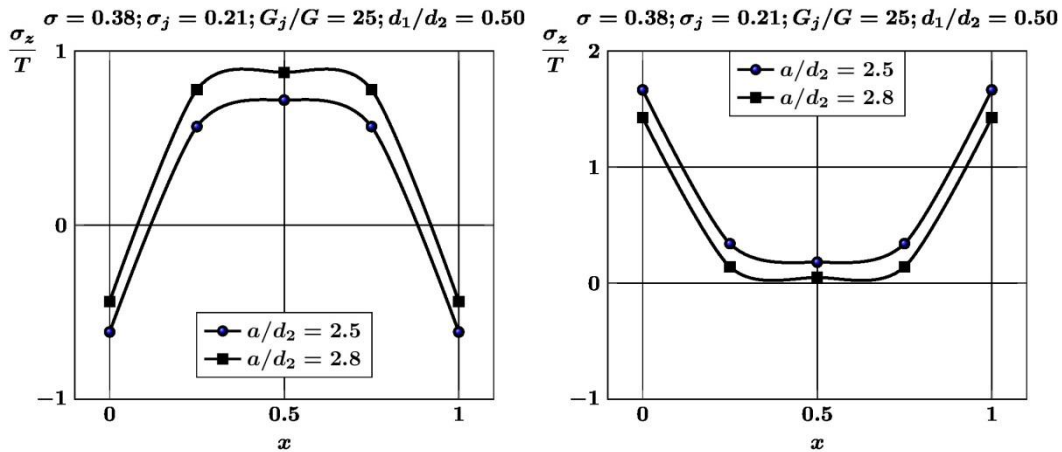


Рис. 4. Напряжения σ_z/T на линии O_1O_4 в зависимости от относительного расстояния между включениями при одноосном и двuosном растяжении

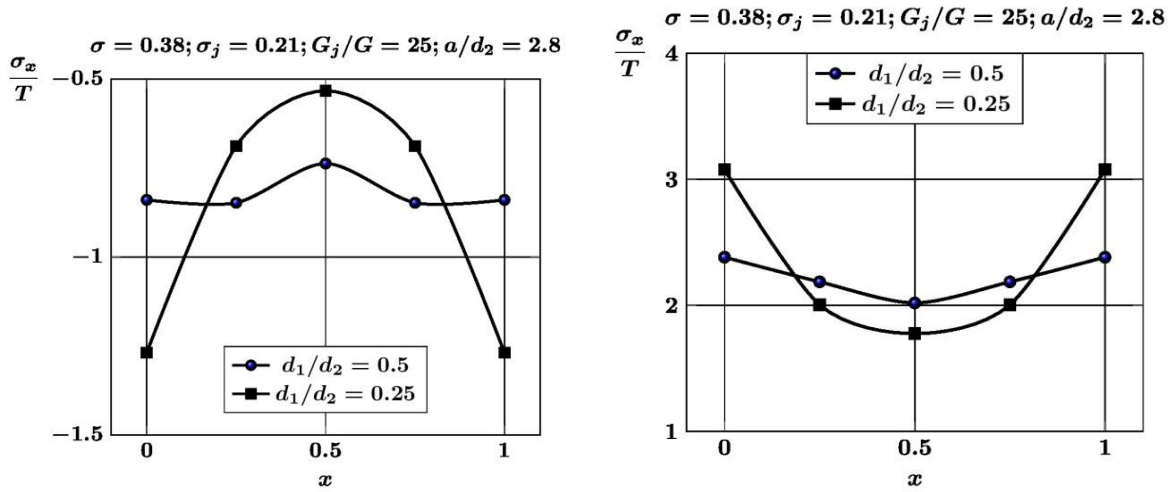


Рис. 5. Напряжения σ_x/T на линии O_1O_4 в зависимости от формы включений при одноосном и двуосном растяжении

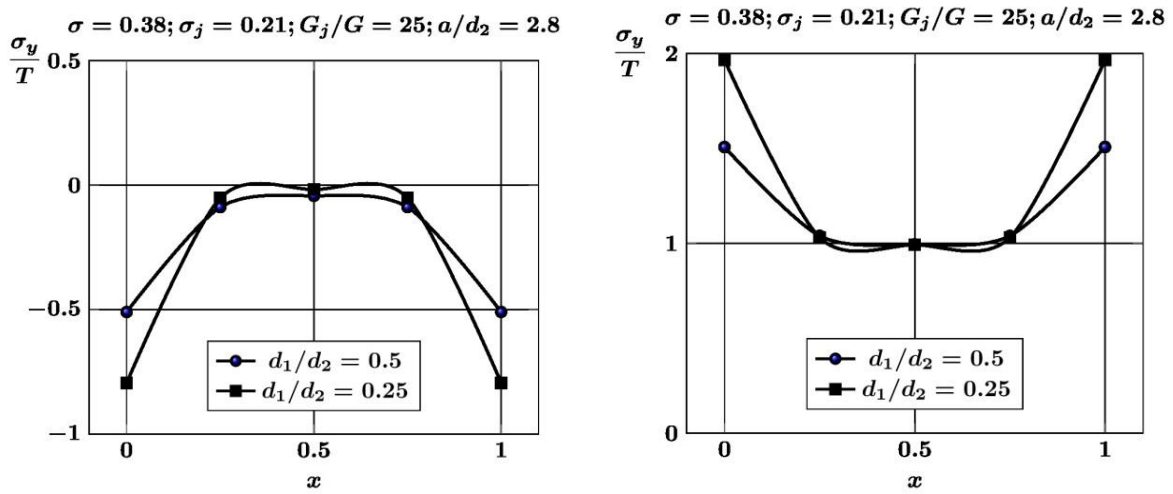


Рис. 6. Напряжения σ_y/T на линии O_1O_4 в зависимости от формы включений при одноосном и двуосном растяжении

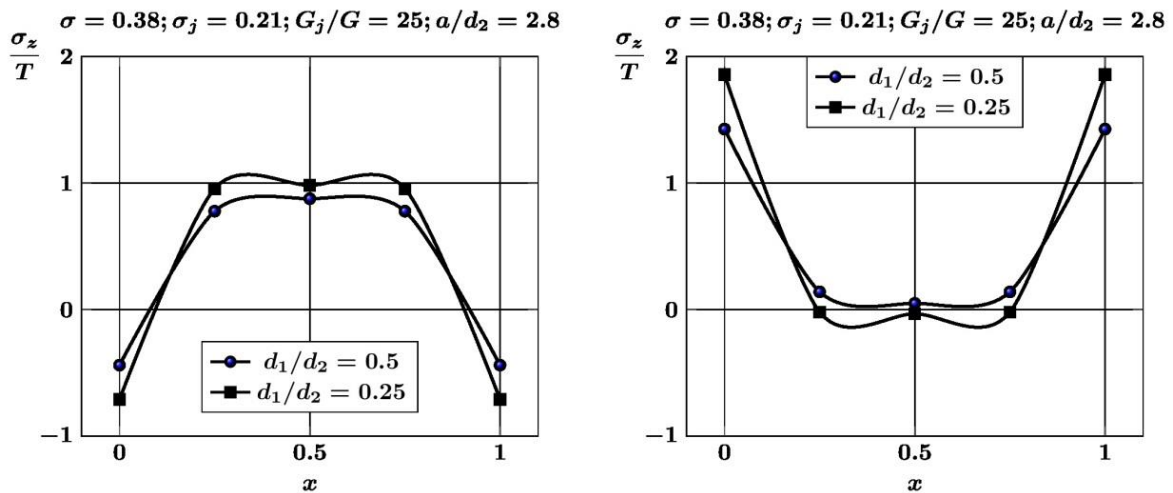


Рис. 7. Напряжения σ_z/T на линии O_1O_4 в зависимости от формы включений при одноосном и двуосном растяжении

На рис. 5-7 приведены напряжения σ_x/T , σ_y/T , σ_z/T на линии O_1O_4 (рис. 1) вне включений при одноосном и двуосном растяжениях упругого пространства в зависимости от отношения полуосей сфероидов.

ЛІТЕРАТУРА

1. Khoroshun L. P. Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites / L. P. Khoroshun // *International Applied Mechanics*. – 2000. – V. 36, No 10. – P. 1284-1316.
2. Вольперт В. С. Осесимметричное напряжённое состояние пространства, содержащего систему сферических полостей или включений / В.С. Вольперт, И.П. Олегин // *Новосиб. ин-т инж. ж.-д. транспорта*. – 1977. – 19 с. – Деп. в ВИНТИ. №3266–77.
3. Олегин И. П. Осесимметричное напряжённое состояние в трансверсально-изотропной упругой среде с двумя жесткими эллипсоидальными включениями / И.П. Олегин // *Сибирский журнал индустриальной математики*. – 2002. – Т. V, № 1(9). – С. 127-132.
4. Олегин И. П. Решение пространственной задачи теории упругости для трансверсально-изотропного тела, содержащего периодическую систему эллипсоидальных полостей / И.П. Олегин // *Сибирский журнал индустриальной математики*. – 1999. – Т. II, № 1. – С. 117-122.
5. Гаришин О. К. Прогнозирование прочности эластомерных зернистых композитов в зависимости от размеров частиц наполнителя / О.К. Гаришин, Л.А. Комар // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2003. – Т. 9, № 3. – С. 278-286.
6. Tsuchida E. On the asyymmetric problem of the theory for an infinite elastic solid containing two spherical inclusions / E. Tsuchida, I. Nakahara, M. Kodama // *Bull. JSME*. – 1980. – V. 23, № 181. – P. 1072-1080.
7. Stress concentration around a prolate spheroidal cavity in a semi-infinite elastic body under all-round tension / E. Tsuchida, Y. Saito, I. Nakahara, M. Kodama // *Bull. JSME*. – 1982. – V. 25, № 202. – P. 493-500.
8. Куш В. И. Напряжённое состояние и эффективные упругие модули среды, нормированной периодически расположенными сфероидальными включениями / В.И. Куш // *Прикладная механика*. – 1995. – Т. 31, №3. – С. 32-39.
9. Овидько И. А. Упругие поля наноскопических включений в нанокompозитах / И.А. Овидько, А.Г. Шейнерман // *Физика и механика материалов*. – 2010. – Т. 10, №1/2. – С. 1-29.
10. Трайтак С. Д. Методы решения краевых задач в областях с несвязной границей / С.Д. Трайтак // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2005. – Т. 11, № 1. – С. 87-112.
11. Николаев А. Г. Напряжённое состояние пористого материала в области между четырьмя сфероидальными порами / А.Г. Николаев, Е.А. Танчик // *Вісник НТУ «ХПІ»*. Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х. : НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 150-160.
12. Николаев А. Г. Упругое пространство с четырьмя сфероидальными включениями под действием внешней нагрузки / А.Г. Николаев, Е.А. Танчик // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2014. – № 4(111). – С. 49-60.
13. Николаев А. Г. Теоремы сложения решений уравнения Ламе / А.Г. Николаев. – Х. : Харьк. авиац. ин-т, 1993. – 109 с. – Деп. в ГНТБ Украины 21.06.93, № 1178 – Ук 93.
14. Николаев А. Г. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости : монография / А.Г. Николаев, В.С. Проценко. – Х. : Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского «Харьк. авиац. ин-т», 2011. – 344 с.
15. Николаев А. Г. Развитие аппарата обобщенного метода Фурье на некоторые многосвязные области и его использование для моделирования пористого материала / А.Г. Николаев, Е.А. Танчик // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2014. – №6(113). – С. 48-56.
16. Николаев А. Г. Упругая механика многокомпонентных тел : монография / А.Г. Николаев, Е.А. Танчик. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского «Харьк. авиац. ин-т», 2014. – 272 с.
17. Николаев А. Г. Обоснование обобщенного метода Фурье в основных краевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических областей / А.Г. Николаев // *Доповіди НАН України*. – 1998. – Т. 2. – С. 78-83.

REFERENCES

1. Khoroshun, L.P. (2000), “Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites”, *International Applied Mechanics*, vol. 36, no. 10, pp. 1284-1316.
2. Vol'pert, V.S. and Olegin, I.P. (1977), “Axisymmetric stress state space that contains system of sphericals of cavities or the inclusion”, *Novosib. in-t inzh. zh.-d. transporta*, 19 s., Dep. v VINITI, №3266–77.
3. Olegin, I.P. (2002), “Axisymmetric stress state in a transversal-isotropic elastic medium with two rigid elliptic inclusions”, *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki*, vol. V, no. 1(9), pp. 127-132.

4. Olegin, I.P. (1999), "The solution of the spatial problem of elasticity theory for a transversally isotropic body with a periodic system of ellipsoidal cavities", *Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki*, vol. II, no. 1, pp. 117-122.
5. Garishin, O.K. and Komar, L.A. (2003), "Prediction strength elastomeric of granular composites depending on particle size of the filler", *Mehanika kompozicionnyh materialov i konstrukcij*, vol. 9, no. 3, pp. 278-286.
6. Tsuchida, E., Nakahara, I. and Kodama, M. (1980), "On the asyymmetric problem of the theory for an infinite elastic solid containing two spherical inclusions", *Bull. JSME*, vol. 23, no. 181, pp. 1072-1080.
7. Tsuchida, E., Saito, Y., Nakahara, I. and Kodama, M. (1982), "Stress concentration around a prolate spheroidal cavity in a semi-infinite elastic body under all-round tension", *Bull. JSME*, vol. 25, no. 202, pp. 493-500.
8. Kushh, V.I. (1995), "Stress state and the efficient elastic moduli of the medium normalized to periodically arranged spheroidal inclusions", *Prikladnaya mehanika*, vol. 31, no. 3, pp. 32-39.
9. Ovid'ko, I.A. and Sheynerman, A.G. (2010), "Elastic fields of nanoscopic inclusions in nanocomposites", *Fizika i mehanika materialov*, vol. 10, no. 1/2, pp. 1-29.
10. Traytak, S.D. (2005), "Methods of of solving boundary problems in domains with disconnected abroad", *Mehanika kompozicionnyh materialov i konstrukciy*, vol. 11, no. 1, pp. 87-112.
11. Nikolaev, A.G. and Tanchik, E.A. (2014), "Stress state of the porous material in the region between the four spheroidal pores", *Visnik NTU «HPI», Seriya: Matematichne modelyuvannya v tehnic i ta tehnologiyah*, no. 6 (1049), pp. 150-160.
12. Nikolaev, A.G. and Tanchik, E.A. (2014), "Elastic space with four spheroidal inclusions under the action of the external load", *Aviacionno-kosmicheskaya tehnika i tehnologiya*, no. 4(111), pp. 49-60.
13. Nikolaev, A.G. (1993), *Teoremy slozheniya resheniy uravneniya Lamé* [Addition theorems of solutions of equation Lamé], Khar'k. aviac. in-t, Kharkiv, 109 p., Dep. v GNTB Ukrainy 21.06.93, № 1178 – Uk 93.
14. Nikolaev, A.G. and Prochenko, V.S. (2011), *Obobshhennyi metod Fur'e v prostranstvennyh zadachah teorii uprugosti* [A generalized Fourier method in spatial problems of elasticity theory], Nac. aerokosm. un-t im. N. E. Zhukovskogo «Khar'k. aviac. in-t», Kharkiv.
15. Nikolaev, A.G. and Tanchik, E.A. (2014), "The development apparatus of the generalized Fourier method to multiply connected some field and its use for modeling porous material", *Aviacionno-kosmicheskaya tehnika i tehnologiya*, no. 6(113), pp. 48-56.
16. Nikolaev, A.G. and Tanchik, E.A. (2014), *Uprugaya mehanika mnogokomponentnyh tel* [Elastic mechanics of multicomponentof bodies], Nac. ajerokosm. un-t im. N.E. Zhukovskogo "Khar'k. aviac. in-t", Kharkiv.
17. Nikolaev, A.G. (1998), "Justification of generalized Fourier method in the basics boundary value problems of elasticity theory for some of the spatial canonical domains", *Dopovidi NAN Ukraini*, vol. 2, pp. 78-83.

УДК 621.01: 62-883

СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД В ТЕХНИЧЕСКОМ СОВЕРШЕНСТВОВАНИИ ПРЯМЫХ ПРИВОДОВ БЕСКОНТАКТНОГО ТИПА

Носко П. Л., д. т. н., Брешев В. Е., к. т. н., Брешев А. В., инженер,
Панкратова С. С., аспирант

*Восточноукраинский национальный университет им. В. Даля,
просп. Советский, 59А, г. Северодонецк, 93406, Украина*

abreshev@gmail.com

Систематизированы основные направления технического совершенствования приводов, в которых роторы приводятся во вращение и удерживаются в требуемом положении без непосредственного механического контакта между деталями, совершающими относительное движение. Показана целесообразность рассмотрения бесконтактных приводов как единой механической системы, обоснована эффективность регулирования их опорной системы для расширения диапазонов скоростных режимов, повышения жесткости и несущей способности, снижения эксплуатационных затрат.

Ключевые слова: аэростатическая опора, газовая смазка, прямой привод, грузоподъемность, жесткость.