8. Zav'yalov, Yu.S., Kvasov, Yu.I. and Miroshnichenko, V.M. (1980), *Metody splayn-funktsiy* [Methods of spline functions], Nauka, Moskow, USSR.
9. Klark, E. and Reyssner, E. (1955), *Izgib trub s krivolineynoy os'yu. – V kn.: Problemy mekhaniki* [Bending of roads with a curvilinear axe – in book Problems of mechanics], Izdatel'stvo inostr. lit., Moscow, USSR.
10. Lekhnitskiy, S.G. (1977), *Teoriya uprugosti anizotropnykh tel* [Theory of elasticity for anisotropic bodies], Nauka, Moscow, USSR.
11. Timoshenko, S.P. (1972), *Kurs teorii uprugosti* [Theory of elasticity], Naukova Dumka, Kiev, USSR.
12. Grigorenko, Ya.M., Grigorenko, A.YA. and Vlaykov, G.G. (2009), "Problems of mechanics for anisotropic inhomogeneous shells on the basis of different models", S.P. Timoshenko Institute of Mechanics, Technical Center of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine.
13. Grigorenko, Ya.M. and Rozhok, L.S. (2003), "Discrete Fourier-series method in problems of bending of variable-thinkness rectangular plates", *J. Engng. Math*, vol. 46, pp. 269-280.
14. Grigorenko, Ya.M. and Rozhok, L.S. (2006), "Equilibrium of elastic hollow inhomogeneous cylinders of corrugated elliptic cross-section", *J. Engng. Math*, vol. 54, pp. 145-157.

УДК 517.9

КЕРОВАНІСТЬ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯНЬ ЛЯПУНОВА В ПРОСТОРІ ГІЛЬБЕРТА

[1]Панасенко Є. В., к. ф.-м. н., доцент,
[2]Покутний О. О., к. ф.-м. н., старший науковий співробітник

[1]*Запорізький національний університет,*
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна

[2]*Інститут математики НАНУ,*
вул. Терещенківська, Київ-4, 01601 Україна

innovatory@rambler.ru

У статті розглянуто двоточкову крайову задачу в критичному випадку, яка виникає в теорії оптимального керування для матричних диференціальних рівнянь Ріккаті та рівнянь типу Ляпунова. Досліджено задачу в припущенні, що оператор, який описує однорідну лінійну крайову задачу, є нетеровим. Запропоновано підхід до знаходження її розв'язку за допомогою теорії псевдообернених матриць. Знайдено умову розв'язності таких задач.
Ключові слова: крайова задача, керуючий процес, керування, псевдообернена матриця, нормальна фундаментальна матриця.

УПРАВЛЯЕМОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЛЯПУНОВА В ПРОСТРАНСТВЕ ГИЛЬБЕРТА

[1]Панасенко Е. В., к. ф.-м. н., доцент, [2]Покутный А. А., к. ф.-м. н, старший научный сотрудник

[1]*Запорожский национальный университет,*
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина

[2]*Институт математики НАНУ,*
ул. Терещенковская, Киев-4, 01601 Украина

innovatory@rambler.ru

В статье рассмотрено двухточечную краевую задачу в критическом случае, которая возникает в теории оптимального управления для матричных дифференциальных уравнений Риккати и уравнений типа Ляпунова. Исследовано задачу в предположении, что оператор, который описывает линейную краевую задачу, является нетеровым. Предложен подход к нахождению её решения с помощью теории псевдообратных матриц. Найдено условие разрешимости таких задач.
Ключевые слова: краевая задача, управляющий процесс, управление, уравнение Ляпунова, псевдообратная матрица, нормальная фундаментальная матрица.

CONTROLLABILITY OF BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR LYAPUNOV EQUATIONS IN HILBERT SPACE

[1]Panasenko Y. V., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor,
[2]Pokutnyi A. A., Ph.D. in Physics and Maths, Senior Researcher

[1]*Zaporizhzhya National University,*
66, Zhukovsky str., Zaporizhzhya, 69600, Ukraine

[2]*Institute of mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine,*
3, Tereschenkivska str., Kiev-4, 01601, Ukraine

innovatory@rambler.ru

The paper is devoted to investigation of the two-point boundary-value problem in the critical case. This problem has many applications in the optimal control theory. Under assumption that the corresponding generating operator is Fredholm the given boundary-value problem is studied. The set of solutions are constructed with using the theory of pseudoinvertible operators. Conditions of solvability of such problems are found.

It should be noted that such equations very often use in the games theory and the variational calculations. There are exist many papers where matrix Riccati equations and operator differential Riccati equations was investigated. As a rule such equations was investigated in the regular case where the given problem has a unique solution. In the nonregular case such equation was investigated (in the periodic case) in the work [1,5] of Boichuk O.A., Krivosheya S.A. It should be noted that this equation was investigated as in the operator and matrix case as in the operator-differential and differential case.

Riccati equation plays important role in the theory of optimal control, calculus of variations, physics and many others applications. It should be noted here that in general many papers are devoted to obtaining the conditions of solvability in the regular case. We can be noted such papers as [1-3, 5-7] where this equation was investigated in finite-dimensional case and papers where such equation was investigated in the infinite-dimensional case.

Examples of countable system of such equations is presented. We find the necessary and sufficient conditions of the existence of solutions of boundary value problem for Lyapunov equation in the Hilbert space. The controllability of such operator-differential equation is investigated. We find the control function, which satisfy the next condition: the solutions of boundary value problem have to go through the given operator at the given moment of time.

Key words: boundary-value problem, controlled process, control, Lyapunov equation, *pseudoinverse matrix, normal fundamental matrix.*

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Крайовим задачам для диференціальних рівнянь як у скінченновимірних, так і нескінченновимірних просторах присвячена величезна кількість робіт. Серед останнього класу добре відомим є рівняння Ляпунова. Його розглядають як у матричному, так й операторному випадках [1-3]. У нашій статті розглядається крайова задача для операторно-диференціального рівняння типу Ляпунова в просторі Гільберта й у тому випадку, коли відповідна задача може мати не єдиний розв’язок.

Розглянемо таку крайову задачу:

$$\dot{Z}(t) = AZ(t) + Z(t)B + \Phi(t), \tag{1}$$

$$\ell Z(\cdot) = \alpha, \tag{2}$$

де $Z = Z(t)$ є невідомою оператор-функцією; $A, B \in L(B_1)$ – лінійні обмежені оператори, що діють з простору Банаха B_1 в себе; оператор-функція $\Phi(t)$ є шляхом у просторі лінійних та обмежених операторів, тобто неперервне відображення відрізка $[a;b]$ у простір $L(B_1)$, $\Phi(t) \in C([a;b]; L(B_1))$; лінійний обмежений оператор ℓ переводить оператор-функцію $Z(t)$ в простір Банаха B_2, тобто $\ell : C([a;b]; L(B_1)) \to B_2$, α – елемент простору B_2.

Матричне рівняння такого вигляду відіграє важливу роль у теорії лінійних Гамільтонових систем, варіаційному численні та оптимальному керуванні і широко використовується в теорії ігор [4].

У роботі [5] отримано критерій розв'язності періодичної крайової задачі для матричного рівняння Ріккаті в термінах жорданової структури матриць A та B й у нерегулярному випадку.

ЗНАХОДЖЕННЯ УМОВ РОЗВ'ЯЗНОСТІ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯНЬ ЛЯПУНОВА В БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

Розглянемо лінійний оператор K_τ^t, який переводить оператор-функцію $\Phi(t)$ з простору $C([a;b];L(B_1))$ в оператор-функцію $K_\tau^t[\Phi]\in C([a;b]\times[a;b];L(B_1))$ вигляду

$$K_\tau^t[\Phi]=e^{A(t-\tau)}\Phi(\tau)e^{B(t-\tau)},\ (t,\tau\in[a;b]). \tag{3}$$

За допомогою цього оператора можна представити загальний розв'язок рівняння (1) у вигляді:

$$Z(t)=K_a^t[M]+\int_a^t K_\tau^t[\Phi]d\tau, \tag{4}$$

де довільний оператор $M\in L(B_1)$; $\tilde{Z}(t)$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (1), який має вигляд:

$$\tilde{Z}(t)=\int_a^t K_\tau^t[\Phi]d\tau. \tag{5}$$

Підставимо (4) в крайову умову (2) та отримаємо операторне рівняння відносно оператора M:

$$LM=\alpha-\ell\int_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau, \tag{6}$$

де оператор L діє за правилом $LM=\ell K_a^{\cdot}[M]:L(B_1)\to B_2$. Покажемо, що за певних додаткових умов на оператор L це рівняння має розв'язки. Розглянемо випадок, коли оператор L є узагальнено-оборотним [6].

У цьому випадку розв'язки рівняння (6) існують тоді й тільки тоді [6, 7], коли

$$P_{N(L^*)}\left[\alpha-\ell\int_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau\right]=0. \tag{7}$$

Тут $P_{N(L^*)}$ – проектор на ядро оператора L^*, спряженого до оператора L. Ця умова гарантує належність правої частини рівняння (6) $\left[\alpha-\ell\int_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau\right]\in R(L)$ множині значень оператора L.

За виконання умови розв'язності (7), операторне рівняння (6) має множину розв'язків вигляду:

$$M=L^+\left[\alpha-\ell\int_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau\right]+P_{N(L)}C, \tag{8}$$

де C – довільний лінійний обмежений оператор $(C\in L(B_1)),P_{N(L)}$ – проектор на ядро оператора L. Підставивши оператор M в умову (4), отримаємо загальний розв'язок (1),(2) у вигляді:

$$Z(t)=K_a^t\left[P_{N(L)}C\right]+G([\Phi,\alpha])(t), \tag{9}$$

де узагальнений оператор Гріна визначається так:

$$G\left(\left[\Phi,\alpha\right]\right)(t)=\int_a^t K_\tau^t\left[\Phi\right]d\tau-K_a^t\left[\ell\int_a^{\cdot}K_\tau^{\cdot}\left[\Phi\right]d\tau\right]+K_a^t\left[L^+\alpha\right] \qquad (10)$$

Таким чином доведено наступну теорему.

Теорема 1. Нехай оператор L є узагальнено-оборотним. Тоді крайова задача (1), (2) має розв'язки тоді й тільки тоді, коли виконується умова (7). За виконання умови (7) розв'язки крайової задачі (1), (2) мають вигляд (9) для довільного оператора $C\in L(B_1)$.

Зауваження. Якщо оператор L оборотний, то умова (7) виконується автоматично й крайова задача для рівняння Ляпунова має єдиний розв'язок.

КЕРОВАНІСТЬ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯНЬ ЛЯПУНОВА В ПРОСТОРІ ГІЛЬБЕРТА

У просторах Гільберта, за рахунок більш багатої геометрії, результати з попереднього пункту можуть бути уточненими і доведеними до свого повного завершення.

Дослідимо крайову задачу для рівняння Ляпунова на керованість такого вигляду:

$$\dot{Z}_0(t)=AZ_0(t)+Z_0(t)B+\Phi(t)+u(t)D, \qquad (11)$$

$$\ell Z_0(\cdot)=\alpha, \qquad (12)$$

де $Z_0(t)$ є невідомою оператор-функцією з простору $C\left(\left[a;b\right];H_1\right)$; $A(t),B(t)\in C\left(\left[a;b\right];L\left(H_1,H_2\right)\right)$; оператор-функція $\Phi(t)$ є шляхом у просторі лінійних та обмежених операторів $L(H_1,H_2)$. $\Phi(t)$ – неперервне відображення відрізка $\left[a;b\right]$ в простір $L(H_1,H_2)$, тобто $\Phi(t)\in C\left(\left[a;b\right];L\left(H_1,H_2\right)\right)$; $u(t)$ – керування; $D\in L(H_1,H_2)$ – лінійний обмежений компактный оператор, що діє з простору Гільберта H_1 в себе; лінійний обмежений оператор ℓ переводить оператор-функцію $Z_0(t)$ в простір Гільберта H_2, тобто $\ell:C\left(\left[a;b\right];L\left(H_1\right)\right)\to H_2$; α – елемент з простору H_2.

Шукається таке керування, щоб розв'язок крайової задачі (11), (12) у даний момент часу t_1 дорівнював Z_1, де Z_1 – лінійний обмежений оператор з простору $L(H_1,H_2)$.

Розглянемо лінійний оператор K_τ^t, який переводить оператор-функцію $\Phi(t)$ з простору $C\left(\left[a;b\right];L\left(H_1,H_2\right)\right)$ в оператор-функцію $K_\tau^t\left[\Phi\right]\in C\left(\left[a;b\right]\times\left[a;b\right];L\left(H_1,H_2\right)\right)$ вигляду

$$K_\tau^t\left[\Phi\right]=X(t)X^{-1}(t)\Phi(\tau)V^{-1}(t)V(t), \qquad (13)$$

де $X(t)$, $V(t)$ – це еволюційні оператори наступних операторно-диференційних рівнянь

$$\dot{H}(t)=A(t)H(t),\quad H(0)=I,$$

$$\dot{Y}(t)=B(t)Y(t),\quad Y(0)=I,$$

відповідно.

За допомогою цього оператора можна представити загальний розв'язок рівняння (11) у вигляді

$$Z_0(t)=K_a^t\left[M\right]+\int_a^t K_\tau^t\left[\Phi\right]d\tau+\int_a^t K_\tau^t\left[u(\tau)D\right]d\tau, \qquad (14)$$

де довільний оператор $M \in L(H_1, H_2)$; $\tilde{Z}(t)$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (11), який має вигляд:

$$\tilde{Z}(t) = \int_a^t K_\tau^t [\Phi] d\tau + \int_a^t K_\tau^t [u(\tau)D] d\tau . \tag{15}$$

Підставимо (14) в крайову умову (12) та отримаємо таке операторне рівняння відносно оператора M:

$$LM = \alpha - \ell \int_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot} [\Phi] d\tau - \ell \int_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot} [u(\tau)D] d\tau , \tag{16}$$

де оператор L діє за правилом $LM = \ell K_a^{\cdot}[M] : L(H_1, H_2) \to H_2$. Покажемо, що за певних додаткових умов на оператор L це рівняння має розв'язки.

У цьому випадку розв'язки рівняння (16) існують тоді й тільки тоді [7], коли

$$P_{N(L^*)} \left[\alpha - \ell \int_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot} [\Phi] d\tau - \ell \int_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot} [u(\tau)D] d\tau \right] = 0 . \tag{17}$$

Тут $P_{N(L^*)}$ – проектор на ядро оператора L^*, спряженого до оператора L. Ця умова гарантує належність правої частини рівняння (16) $\left[\alpha - \ell \int_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot} [\Phi] d\tau - \ell \int_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot} [u(\tau)D] d\tau \right] \in R(L)$ множині значень оператора L.

За виконання умови розв'язності (17), операторне рівняння (16) має множину розв'язків вигляду:

$$M = L^+ \left[\alpha - \ell \int_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot} [\Phi] d\tau - \ell \int_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot} [u(\tau)D] d\tau \right] + P_{N(L)} C , \tag{18}$$

де C – довільний лінійний обмежений оператор $(C \in L(H_1, H_2))$, $P_{N(L)}$ – проектор на ядро оператора L. Підставивши оператор M в умову (14), отримаємо загальний розв'язок (11), (12) у вигляді:

$$Z_0(t) = K_a^t \left[P_{N(L)} C \right] + G([\Phi, u, D, \alpha])(t) , \tag{19}$$

де узагальнений оператор Гріна визначається так

$$G([\Phi, u, D, \alpha])(t) = \int_a^t K_\tau^t [\Phi] d\tau + \int_a^t K_\tau^t [u(\tau)D] d\tau + K_a^t \left[L^+ \alpha \right] -$$
$$- K_a^t \left[L^+ \left(\ell \int_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot} [\Phi] d\tau - \ell \int_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot} [u(\tau)D] d\tau \right) \right] . \tag{20}$$

Розглянемо випадок, коли керування має вигляд $U(t)D$, де оператор $U(t) = U$, а оператор $D = I$. У цьому випадку будемо припускати, що оператор U комутує з усіма операторами в представленні розв'язку. Знайдемо умову, коли для всіх операторів C наш розв'язок у момент часу t_1 проходить через заданий оператор Z_1: $Z_0(t_1) = Z_1$.

$$Z_0(t_1) = K_a^{t_1} \left[P_{N(L)} C \right] + G([\Phi, u, D, \alpha])(t_1) = Z_1 .$$

Звідси отримаємо операторне рівняння відносно оператора U:

$$QU = G ,$$

де оператор Q має вигляд:

$$Q=\int_a^{t_1} K_\tau^{t_1}\left[I\right]d\tau+K_a^{t_1}\left[\ell\int_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot}\left[I\right]d\tau\right],$$

а оператор G має вигляд:

$$G=Z_1-K_a^{t_1}\left[P_{N(L)}C\right]-\int_a^{t_1} K_\tau^{t_1}\left[\Phi\right]d\tau-K_a^{t_1}\left[L^+\alpha\right]+K_a^{t_1}\left[L\left(\ell\int_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot}\left[\Phi\right]d\tau\right)\right].$$

Для отриманого рівняння маємо три випадки:

1) класичні розв'язки існують тоді й тільки тоді, коли $R(Q)=\overline{R(Q)}$ й виконується умова

$$P_{N\left(Q^*\right)}G=0, \tag{21}$$

за цієї умови родина розв'язків має вигляд:

$$U=Q^+G+P_{N(Q)}\overline{C},\quad \forall\overline{C}\in H_1, \tag{22}$$

де Q^+ – псевдообернений до оператора Q;

2) якщо $R(Q)\subset\overline{R(Q)}$, то узагальнені розв'язки існують тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{N\left(Q^*\right)}G=0, \tag{23}$$

за цієї умови родина розв'язків має вигляд:

$$U=\overline{Q}^+G+P_{N(Q)}\overline{C},\quad \forall\overline{C}\in H_1, \tag{24}$$

де $\overline{Q}^+$ – узагальнено-обернений до оператора Q;

3) узагальнені квазірозв'язки існують тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{N\left(Q^*\right)}G\neq 0, \tag{25}$$

за цієї умови родина квазірозв'язків має вигляд

$$U=\overline{Q}^+G+P_{N(Q)}\overline{C},\ \forall\overline{C}\in H_1, \tag{26}$$

де $\overline{Q}^+$ – узагальнено-обернений до оператора Q.

Таким чином доведено наступну теорему.

Теорема 2. Крайова задача (11), (12) у випадку, коли оператор U лінійний обмежений, й оператор $D=I$ є керованою. 1) Керована в класичному сенсі тоді й тільки тоді, коли виконується умова (21). У цьому випадку керування може бути знайденим за формулою (22); 2) Керована в узагальненому сенсі тоді й тільки тоді, коли виконується умова (23). У цьому випадку керування може бути знайденим за формулою (24); 3) Квазікерована тоді й тільки тоді, коли виконується умова (25). У цьому випадку керування може бути знайденим за формулою (26).

ПРИКЛАД

Нехай керуючий процес описується крайовою задачею (11), (12) у просторі Гільберта з зліченновимірними матрицями A, B, D, $u(t)$ і $\Phi(t)$ у диференціальній системі:

$$A = \operatorname{diag}\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\right\},$$

$$B = \operatorname{diag}\{0,1,0,1,\ldots,0,1,\ldots\},\ D = \operatorname{diag}\{1,1,1,1,\ldots,1,1,\ldots\},$$

$$\Phi(t) = \operatorname{diag}\left\{e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{3}{2}t}, e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{3}{2}t}, \ldots, e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{3}{2}t}, \ldots\right\},$$

$$u(t) = \operatorname{diag}\left\{\frac{u_1}{2\ln 5}, \frac{u_2}{2\ln 5}, \frac{u_1}{2\ln 5}, \frac{u_2}{2\ln 5}, \ldots, \frac{u_1}{2\ln 5}, \frac{u_2}{2\ln 5}, \ldots\right\},$$

і крайовою умовою вигляду

$$\ell Z_0(\cdot) = Z_0(0) - Z_0(2\ln 5) = \alpha,$$

$$\alpha = \operatorname{diag}\{2 - 10\ln 5, -250\ln 5, 2 - 10\ln 5, -250\ln 5, \ldots, 2 - 10\ln 5, -250\ln 5, \ldots\}.$$

Знайдемо матриці $K_\tau^t[\Phi]$ та $K_\tau^t[uD]$, $t \in [0; 2\ln 5]$. Еволюційні оператори $X(t)$, $V(t)$ дорівнюють:

$$X(t) = \operatorname{diag}\left\{e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{1}{2}t} e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{1}{2}t}, \ldots, e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{1}{2}t}, \ldots\right\},$$

$$V(t) = \operatorname{diag}\{1, e^t, 1, e^t, \ldots, 1, e^t, \ldots\},$$

звідки

$$K_\tau^t[\Phi] = X(t)X^{-1}(t)\Phi(\tau)V^{-1}(t)V(t) = \operatorname{diag}\left\{e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{3}{2}t} e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{3}{2}t}, \ldots, e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{3}{2}t}, \ldots\right\},$$

$$K_\tau^t[uD] = X(t)X^{-1}(t)u(\tau)DV^{-1}(t)V(t) =$$

$$= \operatorname{diag}\left\{\frac{u_1 e^{\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\tau}}{2\ln 5}, \frac{u_2 e^{\frac{3}{2}t - \frac{3}{2}\tau}}{2\ln 5}, \frac{u_1 e^{\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\tau}}{2\ln 5}, \frac{u_2 e^{\frac{3}{2}t - \frac{3}{2}\tau}}{2\ln 5}, \ldots, \frac{u_1 e^{\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\tau}}{2\ln 5}, \frac{u_2 e^{\frac{3}{2}t - \frac{3}{2}\tau}}{2\ln 5}, \ldots\right\}.$$

Частинний розв’язок неоднорідного рівняння (11) має вигляд:

$$\tilde{Z}(t) = \int_0^t K_\tau^t[\Phi]\,d\tau + \int_0^t K_\tau^t[u(\tau)D]\,d\tau =$$

$$= \operatorname{diag}\left\{te^{\frac{1}{2}t} + \frac{u_1\left(e^{\frac{1}{2}t} - 1\right)}{\ln 5}, te^{\frac{3}{2}t} + \frac{u_2\left(e^{\frac{3}{2}t} - 1\right)}{3\ln 5}, \ldots, te^{\frac{1}{2}t} + \frac{u_1\left(e^{\frac{1}{2}t} - 1\right)}{\ln 5}, te^{\frac{3}{2}t} + \frac{u_2\left(e^{\frac{3}{2}t} - 1\right)}{3\ln 5}, \ldots\right\}.$$

Загальний розв’язок рівняння (11) можна представити у вигляді $Z_0(t) = K_0^t[M] + \tilde{Z}(t)$, де M – матриця з невідомими компонентами, які треба знайти. Оскільки, за умовою задачі A і B – діагональні матриці, то для зручності будемо шукати матрицю M у вигляді зліченновимірної матриці з ненульовими елементами на діагоналі:

$$M = \operatorname{diag}\{m_{11}, m_{22}, m_{33}, m_{44}, \ldots, m_{k-1k-1}, m_{kk}, \ldots\}.$$

Знайдемо оператор $K_0^t[M]$ за формулою (13):

$$K_0^t[M] = \mathrm{diag}\left\{ e^{\frac{1}{2}t}m_{11}, e^{\frac{3}{2}t}m_{22}, e^{\frac{1}{2}t}m_{33}, e^{\frac{3}{2}t}m_{44}, \ldots, e^{\frac{1}{2}t}m_{k-1k-1}, e^{\frac{3}{2}t}m_{kk}, \ldots \right\}. \quad (27)$$

Підставивши (27) у крайову умову, отримаємо, що оператор L діє на M так:

$$L = \mathrm{diag}\{-4m_{11}, -124m_{22}, -4m_{33}, -124m_{44}, \ldots, -4m_{k-1k-1}, -124m_{kk}, \ldots\}.$$

Цей оператор діє неперервним чином і має обернений L^{-1}, який можна визначити наступним чином:

$$L^{-1} = \mathrm{diag}\left\{ -\frac{1}{4m_{11}}, -\frac{1}{124m_{22}}, -\frac{1}{4m_{33}}, -\frac{1}{124m_{44}}, \ldots, -\frac{1}{4m_{k-1k-1}}, -\frac{1}{124m_{kk}}, \ldots \right\}.$$

Проектори $P_{N(L)}$ і $P_{N(L^*)}$ у цьому випадку будуть нульовими. Умова (17) виконується. Тоді операторне рівняння $LM = \alpha - \ell\int_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau - \ell\int_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[u(\tau)D]d\tau$ має розв'язок вигляду:

$$M = L^{-1}\left[\alpha - \ell\int_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau - \ell\int_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[u(\tau)D]d\tau \right] =$$

$$= \mathrm{diag}\left\{ -\frac{1}{2} - \frac{u_1}{\ln 5}, -\frac{u_2}{3\ln 5}, \ldots, -\frac{1}{2} - \frac{u_1}{\ln 5}, -\frac{u_2}{3\ln 5}, \ldots \right\}. \quad (28)$$

Отже, за допомогою матриці (28) можна виписати загальний розв'язок рівняння (11) у вигляді:

$$Z_0(t) = K_0^t[M] + \tilde{Z}(t) =$$

$$= \mathrm{diag}\left\{ \frac{2te^{\frac{1}{2}t}m_{11}\ln 5 + 2u_1m_{11}e^{\frac{1}{2}t} - e^{\frac{1}{2}t}\ln 5 - 2u_1e^{\frac{1}{2}t} - 2u_1m_{11}}{2m_{11}\ln 5}, \right.$$

$$\frac{3te^{\frac{3}{2}t}m_{22}\ln 5 + u_2m_{22}e^{\frac{3}{2}t} - u_2e^{\frac{3}{2}t} - u_2m_{22}}{3m_{22}\ln 5}, \frac{2te^{\frac{1}{2}t}m_{33}\ln 5 + 2u_1m_{33}e^{\frac{1}{2}t} - e^{\frac{1}{2}t}\ln 5 - 2u_1e^{\frac{1}{2}t} - 2u_1m_{33}}{2m_{33}\ln 5},$$

$$\left. \frac{3te^{\frac{3}{2}t}m_{44}\ln 5 + u_2m_{44}e^{\frac{3}{2}t} - u_2e^{\frac{3}{2}t} - u_2m_{44}}{3m_{44}\ln 5}, \ldots \right\}. \quad (29)$$

Підставивши знайдену матрицю $Z_0(t)$ вигляду (29) в крайову умову (12), з'ясовуємо, що $m_{11} = 1, m_{22} = 1, m_{33} = 1, m_{44} = 1, \ldots, m_{k-1k-1} = 1, m_{kk} = 1, \ldots$.

Таким чином, функція $Z_0(t)$ дорівнює:

$$Z_0(t) = \mathrm{diag}\left\{ \frac{2te^{\frac{1}{2}t}\ln 5 - e^{\frac{1}{2}t}\ln 5 - 2u_1}{2\ln 5}, \frac{3te^{\frac{3}{2}t}\ln 5 - u_2}{3\ln 5}, \ldots, \frac{2te^{\frac{1}{2}t}\ln 5 - e^{\frac{1}{2}t}\ln 5 - 2u_1}{2\ln 5}, \frac{3te^{\frac{3}{2}t}\ln 5 - u_2}{3\ln 5}, \ldots \right\}. \quad (30)$$

Далі, наприклад, шукається таке керування $u(t)$, щоб розв'язок $Z_0(t)$ (30) крайової задачі (11), (12) у даний момент часу $t = t_1 = 2$ дорівнював $Z_0(t_1) = Z_1 = \mathrm{diag}\{5, 5, \ldots, 5, 5, \ldots\}$. Для виконання такої умови необхідно розв'язати систему:

$$\begin{cases} \dfrac{2te^{\frac{1}{2}t}\ln 5 - e^{\frac{1}{2}t}\ln 5 - 2u_1}{2\ln 5} = 5 \\ \dfrac{3te^{\frac{3}{2}t}\ln 5 - u_2}{3\ln 5} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 2te^{\frac{1}{2}t}\ln 5 - \dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}\ln 5 - 5\ln 5 \\ u_2 = 3te^{\frac{3}{2}t}\ln 5 - 15\ln 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1\big|_{t_1=2} = \dfrac{3}{2}e\ln 5 - 5\ln 5 \\ u_2\big|_{t_1=2} = 6e^3\ln 5 - 15\ln 5 \end{cases}$$

Отже, знайдено керування

$$u(t) = \operatorname{diag}\left\{\frac{3}{2}e\ln 5 - 5\ln 5, 6e^3\ln 5 - 15\ln 5, \ldots, \frac{3}{2}e\ln 5 - 5\ln 5, 6e^3\ln 5 - 15\ln 5, \ldots\right\},$$

для якого $Z_0(t_1 = 2) = \operatorname{diag}\{5, 5, \ldots, 5, 5, \ldots\}$.

ВИСНОВКИ

У роботі вперше знайдено умови керованості операторного рівняння Ляпунова в просторі Гільберта. Ця теорія працює як у критичному, так й у регулярному випадку [6, 7].

Запропонований підхід можна застосовувати до дослідження керованості операторно-диференціальних рівнянь загального типу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бойчук О. А. Критерій розв’язності матричних рівнянь типу Ляпунова / О.А. Бойчук, С.А. Кривошея // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, №8. – С. 1021-1026.
2. Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / М.Г. Крейн. – М. : Наука, 1970. – 534 с.
3. Чуйко С. М. О решении матричных уравнений Ляпунова / С.М. Чуйко // Вісник ХНУ імені В.Н. Каразіна, серія «Математика, прикладна математика і механіка». – 2014. – №1120. – С. 85-94.
4. Брайсон А. Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Ю-ши Хо. – М. : Мир, 1972. – 544 с.
5. Boichuk A. A. A critical periodic boundary-value problem for a matrix Riccati equation / A.A. Boichuk, S.A. Krivosheya // Differential Equations. – 2001. – Vol. 37, №4. – P. 464-471.
6. Бойчук А. А. Обобщённо-обратные операторы и нётеровы краевые задачи / А.А. Бойчук, В.Ф. Журавлёв, А.М. Самойленко. – К. : Институт математики НАНУ, 1995. – 320 с.
7. Boichuk A. A. Generalized inverse operators and fredholm boundary-value problems / A.A. Boichuk, A.M. Samoilenko. – VSP, Utrecht-Boston, 2004. – 317 p.

REFERENCES

1. Boichuk, A.A. and Krivosheya, S.A. (1998), “Criterion of the solvability of the matrix equations of Lyapunov type ”, *Ukrainskyy matematychnyy zhurnal*, vol. 50, no. 8, pp. 1021-1026.
2. Kreyn, M.G. (1970), *Ustoychivost resheny differentsialnykh uravneny v banakhovom prostranstve* [Stability of solutions of differential equations in a Banach space], Nauka, Moskow, USSR.
3. Chuyko, S.M. (2014), “About solutions of the matrix Lyapunov equations”, *Visnik HNU imeni V.N. Karazina*, *seriya “Matematika, prikladna matematika i mehanika”*, no. 1120, pp. 85-94.
4. Brayson, A. (1972), *Prikladnaya teoriya optimalnogo upravleniya* [Applied optimal control theory], Mir, Moskow, USSR.
5. Boichuk, A.A. and Krivosheya, S.A (2001), “A critical periodic boundary-value problem for a matrix Riccati equation”, *Differential Equations*, vol. 37, no. 4, pp. 464-471.
6. Boichuk, A.A., Zhuravlyev, V.F. and Samoilenko, A.M. (1995), *Obobshchyonno-obratnye operatory i nyoterovy krayevye zadachi* [Generalized-inverse operators and Fredholm boundary-value problems], Institut matematiki NANU, Kyiv, Ukraine.
7. Boichuk, A.A. and Samoilenko, A.M. (2004), “Generalized inverse operators and fredholm boundary-value problems”, VSP, Utrecht-Boston.