УДК 534

ПОСТРОЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ ШОУ-ПЬЕРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ШУРА

Перепелкин Н. В., к. ф.-м. н., ст. преп.

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», ул. Фрунзе, 21, Харьков, 61002, Украина

nickp_mail@mail.ru

В работе рассмотрено упрощение построения нелинейных нормальных форм колебаний Шоу-Пьера в форме степенных рядов за счет замены переменных в дифференциальных уравнениях движения исследуемой системы. Замена осуществляется с использованием канонического преобразования Шура с упорядочиванием. Рассмотрен подход, который избавляет от необходимости решения системы нелинейных алгебраических уравнений для нахождения части коэффициентов нормальной формы.
Ключевые слова: нелинейная нормальная форма колебаний, инвариантное многообразие, преобразование Шура.

ПОБУДОВА НЕЛІНІЙНИХ НОРМАЛЬНИХ ФОРМ КОЛИВАНЬ ШОУ-П'ЄРА З ВИКОРИСТАННЯМ ПЕРЕТВОРЕННЯ ШУРА

Перепелкін М. В., к. ф.-м. н., ст. викл.

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», вул. Фрунзе, 21, Харків, 61002, Україна

nickp_mail@mail.ru

У роботі розглянуто спрощення побудови нелінійних нормальних форм коливань Шоу-П'єра у формі степеневих рядів за рахунок заміни змінних у диференціальних рівняннях руху досліджуваної системи. Заміна здійснюється з використанням канонічного перетворення Шура з упорядкуванням. Розглянуто підхід, який позбавляє від необхідності розв'язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження частини коефіцієнтів нормальної форми.
Ключові слова: нелінійна нормальна форма коливань, інваріантний багатовид, перетворення Шура.

CONSTRUCTION OF NONLINEAR NORMAL MODES BY SHAW-PIERRE BY MEANS OF SCHUR TRANSFORM

Perepelkin N. V., PhD, assist. prof.

National Technical University «Kharkov Polytechnical Institute», Frunze str., 21, Kharkiv, 61002, Ukraine

nickp_mail@mail.ru

The present work is focused on construction of nonlinear normal modes (NNMs) by Shaw and Pierre for general class of nonlinear dissipative mechanical systems (smooth, without internal resonances). NNMs by Shaw-Pierre are invariant manifolds of such systems and each can be expressed as a set of analytical dependencies of form $\{q_i = q_i(q_m, s_m);\ s_i = s_i(q_m, s_m)$ where $q_i,\ s_i\ (i=\overline{1,N})$ – generalized displacements and velocities of the system. Construction of these dependencies is based on transform of the equations of motion from ordinary differential equations to partial differential equations where q_m and s_m become new independent variables. The solution (NNM) can be constructed as power series with respect to q_m and s_m. It is known that in general case the coefficients of linear terms of these power series are to be evaluated from nonlinear algebraic equations while calculation of all other coefficients require solution of recurrent linear ones. Therefore the initial step of calculation is most difficult.
As shown in the current work this problem can be avoided when a particular change of variables is applied to the equation of motion before the construction of the NNM. Suppose the equations of motion have matrix form $\dot{\bar{y}} = [A]\bar{y} + \bar{\Phi}(\bar{y})$. The necessary change of variables is $\bar{y} = [Q]\bar{z}$ where $[Q]^T [A][Q] = [T]$. This matrix transform is called Schur transform. Real matrix $[Q]$is orthogonal and real matrix $[T]$is upper quasi-triangular (block-echelon form). So the transformed equations of motion have upper quasi-triangular matrix corresponding to the linear parts of equations ($[T]$ instead of $[A]$). If the left topmost diagonal block of matrix $[T]$ corresponds to the pair of eigenvalues

$\{\lambda_k, \bar{\lambda}_k\}$ (so-called "Schur transform with reordering" must be performed) then one can construct the NNM corresponding to that eigenvalues. That NNM of the form $\{z_i = z_i(z_1, z_2)$, as shown, always has zero linear part so there is no need to solve nonlinear algebraic equations in order to determine it. This makes NNM construction simplier. On the othe hand one should note that Schur transform with reordering is rather computationally intensive procedure.
Key word: nonlinear normal mode shape, invariant manifold, Shura transformation.

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании поведения многомерных динамических систем весьма важным является вопрос снижения размерности – построения эквивалентной редуцированной модели системы. Для нелинейных механических систем такая возможность, в частности, предоставляется для режимов, близких к нормальным колебаниям, поскольку на таких режимах многомерная система может вести себя как одномерная.

Аналитические зависимости, позволяющие описывать нормальные колебания в механических системах, могут быть получены при использовании двух основных концепций – Каудерера-Розенберга и Шоу-Пьера. В первом случае нелинейная нормальная форма колебаний (ННФ) консервативной (или весьма близкой к таковой) механической системы представляется, как некоторая траектория в конфигурационном пространстве системы [1]. Вторая концепция, пригодная для неконсервативных систем, была предложена и развита в работах С. Шоу (S. Shaw), К. Пьера (C.Pierre) и их соавторов [2-4]. Согласно Шоу и Пьеру, нелинейная нормальная форма колебаний автономной неконсервативной динамической системы может быть определена как ее инвариантное многообразие, а все переменные фазового пространства системы при движении на некоторой нормальной форме могут быть выражены однозначным образом через две из них – пару «обобщенное перемещение – соответствующая обобщенная скорость» [4]:

$$\left\{q_i = q_i\left(q_m, s_m\right);\ s_i = s_i\left(q_m, s_m\right);\quad \left(i = 1, \ldots m-1, m+1, \ldots N\right), \right. \tag{1}$$

где q_i, s_i $(i = \overline{1, N})$ – обобщенные перемещения и скорости системы. Движение системы в режиме нормальных колебаний представляется как движение изображающей точки по гиперповерхности (1).

Существует значительное число работ, посвященых практическому использованию теории нелинейных нормальных колебаний. Здесь можно выделить работы, связанные с вопросами виброгашения и перекачки энергии [5, 6]; работы, посвященные колебаниям стержневых элементов [7], пластин и оболочек [8, 9], подвески автомобиля [10], роторной динамики [11-13], пологих арок и др. Подробное рассмотроение концепций ННФ, их применения и соответствующую библиографию можно найти в [1, 14, 15].

В работе построение ННФ осуществляется с использованием канонического преобразования Шура [16, 17]. Преобразование Шура является преобразованием подобия матриц и позволяет привести квадратную матрицу к верхней треугольной форме (в комплексной постановке) или к верхней квазитреугольной (в вещественной постановке). Приведение произвольной матрицы к форме Шура есть одним из важных способов расчета спектра собственных значений несимметричных матриц [16]. Также оно используется для поиска инвариантных подпространств линейных операторов, при решении матричных уравнений Сильвестра и др.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Данная работа сосредоточена на процессе построения аппроксимаций ННФ Шоу-Пьера в форме степенных рядов, а именно, на преодолении необходимости решать системы нелинейных алгебраических уравнений для вычисления части коэффициентов этих рядов. Следуя работе [4], рассмотрим кратко процесс вычисления ННФ Шоу-Пьера в виде (1) в нелинейной неконсервативной системе, описываемой дифференциальными уравнениями (2).

$$\left\{\dot{q}_i = s_i;\ \dot{s}_i = f_i\left(\overline{q}, \overline{s}\right);\quad \left(i = \overline{1, N}\right). \right. \tag{2}$$

Функции $f_i\left(\overline{q},\overline{s}\right)$ будем считать аналитическими функциями своих аргументов в окрестности нуля – положения равновесия системы. Будем считать, что внутренние резонансы в системе отсутствуют.

Выясним сопутствующие технические сложности при расчете. (Подробнее процесс расчета также описан в [4, 14, 15]).

В качестве независимых переменных в искомых выражениях (1) произвольно выберем перемещение и скорость с индексами 1 (т.е. $m=1$), переобозначим $q_1=u,\ s_1=v$. Выполним замену независимой переменной в уравнениях (2):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\dot{q}_1\frac{\partial}{\partial q_1}+\dot{s}_1\frac{\partial}{\partial s_1}=v\frac{\partial}{\partial u}+f_1\left(u,q_2,...,v,s_2,...\right)\frac{\partial}{\partial v}. \tag{3}$$

Это позволяет трансформировать систему (2) в уравнения в частных производных:

$$\begin{cases} v\dfrac{\partial q_k}{\partial u}+f_1\left(u,q_2,...,v,s_2,...\right)\dfrac{\partial q_k}{\partial v}=s_k, \\ v\dfrac{\partial s_k}{\partial u}+f_1\left(u,q_2,...,v,s_2,...\right)\dfrac{\partial s_k}{\partial v}=f_k\left(u,q_2,...,v,s_2,...\right) \end{cases} \quad \left(k=\overline{2,N}\right). \tag{4}$$

Зависимости (1) являются решениями уравнений (4) и могут быть получены различными способами. Так, если интерес представляют движения с не очень большими амплитудами колебаний, решения (1) могут быть найдены в форме степенных рядов (5) методом неопределенных коэффициентов [3, 4]. (Альтернативой есть использование метода Галеркина [2]).

$$\begin{cases} q_n=\alpha_1^{(n)}u+\alpha_2^{(n)}v+\alpha_3^{(n)}u^2+\alpha_4^{(n)}uv+\alpha_5^{(n)}v^2+... \\ s_n=\beta_1^{(n)}u+\beta_2^{(n)}v+\beta_3^{(n)}u^2+\beta_4^{(n)}uv+\beta_5^{(n)}v^2+... \end{cases} \quad n=\overline{2,N}. \tag{5}$$

Подставив (5) в (4) и раскладывая $f_k\left(\overline{q},\overline{s}\right)$ в степенные ряды, получаем систему полиномиальных равенств относительно переменных u и v, что приводит к требованию о равенстве коэффициентов при одинаковых степенях u и v в их левых и правых частях. Выполнение этого требования приводит к появлению рекуррентной системы алгебраических уравнений относительно $a_k^{(n)},\ b_k^{(n)}$.

Если разбить совокупность $a_k^{(n)},\ b_k^{(n)}$ на группы – коэффициенты при первых, вторых, третьих степенях u и v и т.д. – то можно увидеть, что в задаче выделяется замкнутая подсистема алгебраических уравнений относительно неизвестных первой группы ($\alpha_1^{(n)},\alpha_2^{(n)},\beta_1^{(n)},\beta_2^{(n)}$ $n=\overline{2,N}$) – в общем случае нелинейная. Также выделяется подсистема уравнений относительно неизвестных второй группы – линейная относительно ($\alpha_3^{(n)}$, $\alpha_4^{(n)}$, $\alpha_5^{(n)}$, $\alpha_3^{(n)}$, $\alpha_4^{(n)}$, $\alpha_5^{(n)}$ $(n=\overline{2,N})$), но ее коэффициенты зависят от ранее найденных – неизвестных первой группы. Это же справедливо и для поиска неизвестных из остальных групп. *Таким образом, при расчете ННФ в виде (5) сложность представляет начальный этап рекурсии – определение коэффициентов при линейных членах (5) из нелинейных алгебраических уравнений, для чего нужно подходящее начальное приближение для расчета, которое не всегда известно.*

Отчасти эта проблема может быть снята дополнительными требованиями. Например, можно искать такое многообразие (1), при движении на котором фазовые переменные q_m, s_m имеют существенно большие амплитуды (активные переменные), нежели все остальные. В этом случае в рядах (5) коэффициенты искомой ННФ $\alpha_1^{(n)}$, $\alpha_2^{(n)}$, $\beta_1^{(n)}$, $\beta_2^{(n)}$ должны быть невелики.

Это позволяет использовать нулевое начальное приближение для них. Найти различные ННФ таким способом можно за счет выбора новой пары q_m, s_m. Этот способ применялся автором в работах [11, 13] и др.

Далее будет показано, что с помощью замены переменных с использованием канонического преобразования Шура уравнения движения (2) могут быть приведены к такой форме, когда коэффициенты ННФ $\alpha_1^{(n)}$, $\alpha_2^{(n)}$, $\beta_1^{(n)}$, $\beta_2^{(n)}$ будут тождественно равны нулю, т.е. необходимость их вычисления отпадет.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ШУРА И ЕГО МОДИФИКАЦИИ

▲ **Теорема** ***(вещественная форма преобразования Шура).*** [16, 17] *Для произвольной квадратной вещественной матрицы* $[A]$ *существует ортогональная матрица* $[Q]$ *такая, что* $[Q]^T[A][Q]=[T]$, *причем верхняя квазитреугольная матрица* $[T]$ *имеет структуру*

$$[T]=\begin{bmatrix} T_1 & * & * & * \\ & T_2 & * & * \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & T_m \end{bmatrix},$$

где блочные подматрицы T_i *представляют собой блоки размером 1×1 или 2×2, соответствующие действительным собственным числам и парам комплексно-сопряженных собственных чисел матрицы* $[A]$ *соответственно. Матрица* $[T]$ *может быть найдена с точностью до порядка следования диагональных блоков.*

Под соответствием диагональных блоков спектру матрицы подразумевается, что в блоках 1×1 стоят действительные собственные числа матрицы $[A]$, а пары комплексно-сопряженных собственных значений каждого отдельно взятого блока 2×2 входят в спектр матрицы $[A]$.

Поскольку построение матрицы $[T]$ выполняется итеративным образом при помощи QR-алгоритма [16], то контролировать порядок блоков $T_1, T_2, \ldots$ на ее главной диагонали не представляется возможным. В связи с этим, рядом исследователей была поставлена и решена задача о *перестроении* полученной однажды матрицы Шура таким образом, чтобы на ее диагонали вначале шли блоки, соответствуюшие некоторому наперед заданному подмножеству собственных значений [18-20]. Решение данной задачи востребовано при построении инвариантных подпространств линейного оператора $[A]$, соответствующих выбранным собственным числам, и выборе базиса в этих подпространствах.

Следует отметить, что на момент написания статьи построение матрицы Шура с упорядочиванием уже доступно в качестве стандартной функции в некоторых популярных компьютерных математических пакетах, и здесь не обсуждается. Среди указанных пакетов можно назвать Matlab, Scilab (open source), LAPACK.

Также нужно отметить, что упорядочивание не всегда может быть осуществлено из-за вырожденности матричных преобразований, если собственные значения перемещаемых блоков слишком близки [18].

ПОСТРОЕНИЕ ИНВАРИАНТНОГО МНОГООБРАЗИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим уравнения движения квазилинейной диссипативной механической системы с N степенями свободы в нормальной форме (6).

Вектор $\bar{y} = \left\{ x_1, ..., x_N, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_N \right\}^T$ состоит из обобщенных перемещений и скоростей системы, вектор $\bar{\Phi}$ содержит нелинейные аналитические функции (ограничимся классом полиномов степени выше 1):

$$\dot{\bar{y}} = \left[A \right] \bar{y} + \bar{\Phi}\left(\bar{y} \right). \tag{6}$$

Предположим, что демпфирование в системе невелико и матрица $\left[A \right]$ имеет N пар комплексно-сопряженных собственных чисел (не кратных), каждой из которых можно поставить в соответствие инвариантное многообразие, представляемое в виде ННФ Шоу-Пьера.

Рассмотрим поиск инвариантного многообразия, соответствующего паре собственных чисел $\left\{ \lambda_k, \bar{\lambda}_k \right\}$. Вначале выполним разложение Шура с упорядочиванием для матрицы системы (6): $\left[A \right] = \left[Q \right]\left[T \right]\left[Q \right]^T$. Критерием упорядочивания является появление в начале диагонали матрицы $\left[T \right]$ клетки T_1, имеющей собственные значения $\left\{ \lambda_k, \bar{\lambda}_k \right\}$.

Выполним в уравнениях (6) замену переменных $\bar{y} = \left[Q \right] \bar{z}$. Домножая полученные равенства слева на $\left[Q \right]^{-1} = \left[Q \right]^T$ и обозначая $\left[Q \right]^T \bar{\Phi}\left(\left[Q \right] \bar{z} \right) = \bar{F}\left(\bar{z} \right)$, получаем:

$$\dot{\bar{z}} = \left[T \right] \bar{z} + \bar{F}\left(\bar{z} \right). \tag{7}$$

Введем следующие обозначения: $z_1 = u$, $z_2 = v$; $\bar{z}_* = \left\{ z_3, z_4, ..., z_{2N} \right\}^T$, $\bar{t}_{1*} = \left\{ t_{13}, t_{14}, ..., t_{1,2N} \right\}^T$, $\bar{t}_{2*} = \left\{ t_{23}, t_{24}, ..., t_{2,2N} \right\}^T$, $\left[t_{**} \right] = \left[t_{ij} \right]$ $\left(i, j = \overline{3, 2N} \right)$, $\bar{F}_* = \left\{ F_3, F_4, ..., F_{2N} \right\}^T$. В данных обозначениях уравнения (7) запишутся так:

$$\begin{cases} \dot{u} = t_{11} u + t_{12} v + \bar{t}_{1*}^T \bar{z}_* + F_1\left(u, v, \bar{z}_* \right), \\ \dot{v} = t_{21} u + t_{22} v + \bar{t}_{2*}^T \bar{z}_* + F_2\left(u, v, \bar{z}_* \right), \\ \dot{\bar{z}}_* = \left[t_{**} \right] \bar{z}_* + \bar{F}_*\left(u, v, \bar{z}_* \right). \end{cases} \tag{8}$$

Выполним в (8) замену переменных: $\dfrac{d}{dt} = \dot{u} \dfrac{\partial}{\partial u} + \dot{v} \dfrac{\partial}{\partial v}$. Введем ННФ Шоу-Пьера в виде степенного разложения

$$\bar{z}_* = \bar{\alpha}_{10} u + \bar{\alpha}_{01} v + \sum_{i+j \ge 2} \bar{\alpha}_{ij} u^i v^j, \tag{9}$$

где векторы $\bar{\alpha}_{mn}$ составлены из подлежащих определению коэффициентов.

Получим следующее матрично-векторное равенство:

$$\begin{gathered} \left(\underline{\underline{\left(t_{11} + \bar{t}_{1*}^T \bar{\alpha}_{10} \right) u + \left(t_{12} + \bar{t}_{1*}^T \bar{\alpha}_{01} \right) v}} + (...) \right) \left(\underline{\underline{\bar{\alpha}_{10}}} + \frac{\partial}{\partial u} \left(\sum_{i+j \ge 2} \bar{\alpha}_{ij} u^i v^j \right) \right) + \\ + \left(\underline{\underline{\left(t_{21} + \bar{t}_{2*}^T \bar{\alpha}_{10} \right) u + \left(t_{22} + \bar{t}_{2*}^T \bar{\alpha}_{01} \right) v}} + (...) \right) \left(\underline{\underline{\bar{\alpha}_{01}}} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\sum_{i+j \ge 2} \bar{\alpha}_{ij} u^i v^j \right) \right) = \\ = \underline{\underline{\left[t_{**} \right] \bar{\alpha}_{10} u + \left[t_{**} \right] \bar{\alpha}_{01} v}} + (...). \end{gathered} \tag{10}$$

Здесь $(...)$ означает слагаемые, степень которых относительно u и v выше 1.

Уравнения для поиска $\bar{\alpha}_{10}$ и $\bar{\alpha}_{01}$ можно получить, приравнивая коэффициенты при первых степенях u и v в левой и правой части векторного равенства (10) (задействованы подчеркнутые слагаемые):

$$\begin{aligned}&\left(t_{11}+\bar{t}_{1*}^{T}\bar{\alpha}_{10}\right)\bar{\alpha}_{10}+\left(t_{21}+\bar{t}_{2*}^{T}\bar{\alpha}_{10}\right)\bar{\alpha}_{01}=\left[t_{**}\right]\bar{\alpha}_{10},\\&\left(t_{12}+\bar{t}_{1*}^{T}\bar{\alpha}_{01}\right)\bar{\alpha}_{10}+\left(t_{22}+\bar{t}_{2*}^{T}\bar{\alpha}_{01}\right)\bar{\alpha}_{01}=\left[t_{**}\right]\bar{\alpha}_{01}.\end{aligned} \tag{11}$$

Как видно, система полиномиальных уравнений (11) – нелинейная, но ее решение, соответствующее искомому многообразию, очевидно: $\bar{\alpha}_{01}=\bar{\alpha}_{10}=0$. В самом деле, линейные части в выражениях инвариантных многообразий для полных и для линеаризованных уравнений движения (7) совпадают. Но, учитывая структуру матрицы $\left[T\right]$, инвариантное многообразие уравнений $\dot{\bar{z}}=\left[T\right]\bar{z}$, соответствующее $\left\{\lambda_k,\bar{\lambda}_k\right\}$, имеет вид $z_m=0$ $\left(m=\overline{3,2\mathrm{N}}\right)$, поэтому первые два слагаемых в (9), фактически, не нужны, а *решать уравнения (11) не требуется*. Прочие же коэффициенты ННФ находятся описанным ранее способом.

ПРИМЕР РАСЧЕТА

Рассмотрим нелинейную систему, изображенную на рис. 4. Уравнения движения данной системы имеют вид:

$$\begin{cases}m_1\ddot{x}_1+\beta\dot{x}_1+c_1x_1+c_2\left(x_1-x_2\right)+\gamma x_1^3=0,\\m_2\ddot{x}_2+\beta\dot{x}_2+c_2\left(x_2-x_1\right)+c_3\left(x_2-x_3\right)=0,\\m_3\ddot{x}_3+\beta\dot{x}_3+c_4x_3+c_3\left(x_3-x_2\right)=0.\end{cases} \tag{12}$$

Пусть параметры системы имеют следующие значения: $m_1=2$, $m_2=0.5$, $m_3=1$, $c_1=c_2=c_3=c_4=1$, $\gamma=0.2$, $\beta=0.07$. Также в уравнениях (12) производится масштабирование времени $\tau=\omega_1 t$, $\dfrac{d}{dt}=\omega_1\dfrac{d}{d\tau}$, $\dfrac{d^2}{dt^2}=\omega_1^2\dfrac{d^2}{d\tau^2}$, причем $\bar{\omega}=\left\{0.726062,\ 1.239920,\ 2.221583\right\}$ – вектор собственных частот системы.

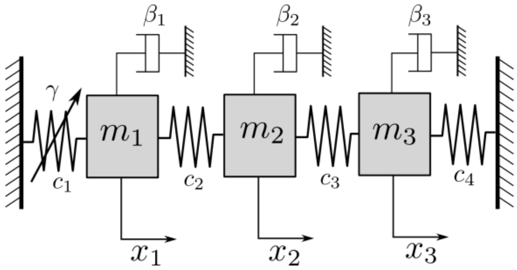

Рис. 4. Трехмассовая нелинейная система

С учетом этого уравнения движения можно записать в форме (6) так:

$$\begin{cases}\dot{y}_1=y_4;\quad \dot{y}_2=y_5;\quad \dot{y}_3=y_6;\\\dot{y}_4=-1.89693y_1+0.94846y_2-0.048205y_4-0.18969y_1^3;\\\dot{y}_5=3.7938y_1-7.5877y_2+3.7938y_3-0.19282y_5;\\\dot{y}_6=1.8969y_2-3.7938y_3-0.09641y_6.\end{cases} \tag{13}$$

Для проверки работоспособности изложенного подхода проделаем следующие действия. Проинтегрируем численно уравнения движения (13), взяв начальную точку на предварительно вычисленном инвариантном многообразии – форме Шоу-Пьера. Перенесем рассчитанную траекторию (координаты y) на пространство, в котором рассчитана ННФ (координаты z). Траектория движения изображающей точки в фазовом пространстве должна следовать по поверхности, представляющей ННФ.

Найдем собственные числа матрицы линеаризованных уравнений (13):

$$-0.0389079 \pm 0.9995934\,I,$$
$$-0.0456418 \pm 1.7067491\,I,$$
$$-0.0841687 \pm 3.0582103\,I.$$

Найдем, к примеру, инвариантное многообразие, соответствующее *первой* сопряженной паре собственных значений. Для того проделаем описанные ранее преобразования. Построение матрицы Шура с упорядочиванием требует, очевидно, перестановки в начало диагонали матрицы блока, собственные числа которого близки к $+I$ или $-I$. Это производилось с помощью пакета Scilab. Вид матрицы $[A]$ для уравнений (13) очевиден и здесь не приводится. Матрица $[Q]$ и преобразованные уравнения движения (13) в форме (7) имеют такой вид (значения коэффициентов округлены):

$$[Q]=\begin{bmatrix} 0.4768 & -0.4541 & -0.3910 & -0.0072 & -0.0091 & -0.6429 \\ 0.4364 & -0.4440 & 0.7631 & -0.0085 & 0.0061 & 0.1733 \\ 0.2944 & -0.3035 & -0.5139 & 0.0070 & -0.0328 & 0.7456 \\ 0.4534 & 0.4761 & 0.0179 & -0.3916 & -0.6434 & 0.0026 \\ 0.4444 & 0.4369 & 0.0056 & 0.7628 & 0.1724 & 0.0066 \\ 0.3040 & 0.2948 & -0.0194 & -0.5145 & 0.7450 & 0.0242 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \dot z_1 \\ \dot z_2 \\ \dot z_3 \\ \dot z_4 \\ \dot z_5 \\ \dot z_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -0.0389 & 0.9615 \\ -1.0392 & -0.0389 \end{matrix}} & \begin{matrix} -2.3971 & -0.0292 & -0.0742 & -0.5337 \\ -2.3351 & -0.0275 & -0.0700 & -0.4951 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 \end{matrix} & \begin{matrix} -0.0842 & 0.9994 & -0.0013 & 0.0599 \\ -9.3584 & -0.0842 & -0.2276 & 0.0391 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.0456 & -2.9153 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.9992 & -0.0456 \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0860y_1^3 \\ -0.0903y_1^3 \\ -0.0034y_1^3 \\ 0.0743y_1^3 \\ 0.1221y_1^3 \\ -0.0005y_1^3 \end{bmatrix};$$

$$y_1 = 0.4768z_1 - 0.4541z_2 - 0.3910z_3 - 0.0072z_4 - 0.0091z_5 - 0.6429z_6.$$

Легко проверить, что собственные числа обведенного рамкой блока имеют интересующие значения: $-0.0389079 \pm 0.9995934\,I$.

Далее вводится ННФ в виде (9), причем $z_1 = u$, $z_2 = v$. После выполнения замены $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \dot u \frac{\partial}{\partial u} + \dot v \frac{\partial}{\partial v}$ проделывается описанный ранее процесс вычисления коэффициентов ННФ, причем коэффициенты при линейных членах, как было показано, тождественно равны нулю.

Вычисленная аппроксимация искомого многообразия имеет вид:

$$\begin{aligned} z_3 &= 0.01007z_2^3 + 0.01142z_1z_2^2 - 0.03938z_1^2z_2 - 0.00243z_1^3; \\ z_4 &= 0.01091z_2^3 - 0.10694z_1z_2^2 - 0.03016z_1^2z_2 + 0.04069z_1^3; \\ z_5 &= 0.00726z_2^3 + 0.01662z_1z_2^2 + 0.02064z_1^2z_2 + 0.00558z_1^3; \\ z_6 &= -0.00923z_2^3 + 0.00691z_1z_2^2 - 0.00614z_1^2z_2 + 0.01203z_1^3. \end{aligned} \tag{14}$$

На рис. 5 показано движение изображающей точки системы по поверхности, задающей ННФ Таким образом зависимости (14) действительно задают аппроксимации инвариантного многообразия.

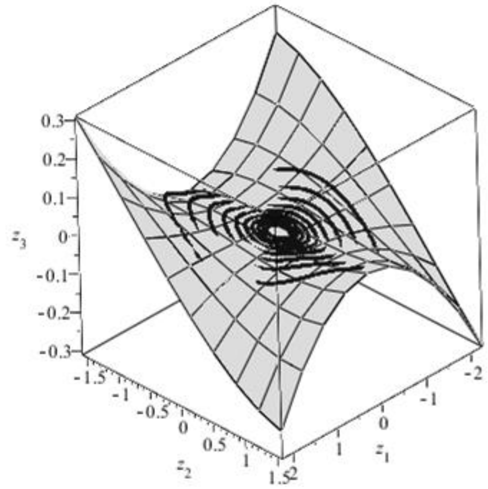

Рис. 5. Движение изображающей точки на инварантном многообразии

ВЫВОДЫ

В данной работе рассмотрено применение канонического матричного преобразования Шура к построению ННФ Шоу-Пьера – частного случая инвариантных многообразий динамических систем (в форме степенных рядов). Этот подход позволяет получать более простые выражения ННФ за счет устранения необходимости рассчитывать линейную часть ННФ с использованием нелинейных алгебраических уравнений. Ценой этого является необходимость вычислительных преобразований по упорядочиванию матрицы Шура и перестроение уравнений движения. Представляется возможным такое развитие данного подхода, которое не требовало бы полного перестроения исследуемых уравнений движения.

Также полученные результаты расширяют парадигму Шоу и Пьера: в качестве независимых переменных для построения ННФ могут быть выбраны фазовые переменные, не обязательно имеющие смысл «перемещение – скорость».

Работоспособность предложенного подхода подтверждается практически.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маневич Л. И. Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем / Л.И. Маневич, Ю.В. Михлин, В.Н. Пилипчук. – М. : Наука, 1989. – 216 с.
2. Pesheck E. A new Galerkin – based approach for accurate non-linear normal modes through invariant manifolds / E. Pesheck, C. Pierre, S.W. Shaw // Journal of Sound and Vibration. – 2002. – Vol. 249, No 5. – P. 971-993.
3. Pesheck E. Nonlinear modal analysis of structural systems using multi-mode invariant manifolds / E. Pesheck, C. Pierre, S.W. Shaw, N. Boivin // Nonlinear Dynamics. – 2001. – Vol.25. – P. 183-205.
4. Shaw S. W. Normal modes for nonlinear vibratory systems / S.W. Shaw, C. Pierre // Journal of Sounds and Vibration. – 1993. – Vol. 164. – P. 85-124.
5. Avramov K. V. Snap-through truss as a vibration absorber / K.V. Avramov, Yu.V. Mikhlin // Journal of Vibration and Control. – 2004. – V. 10. – P. 291-308.
6. Gendelman O. V. Transition of energy to a nonlinear localized mode in a highly asymmetric system of two oscillators / O.V. Gendelman // Nonl. Dyn. – 2001. – Vol. 25. – P. 237-253.
7. Avramov K. V. Flexural-flexural-torsional nonlinear vibrations of pre-twisted rotating beams with asymmetric cross section / K.V. Avramov, C. Pierre, N. Shyriaieva // Journal of Vibrations and Control. – 2007. – Vol. 13, No 4. – P. 329-364.
8. Avramov K. V. Asymptotic analysis of nonlinear dynamics of smply supported cylindrical shells / K.V. Avramov, Yu.V. Mikhlin, E. Kurilov // Nonlinear Dynamics. – 2007. – Vol. 47. – P. 331-352.
9. Курилов Е. А. О нелинейных колебаниях цилиндрических оболочек в сверхзвуковом потоке с учетом начальных неправильностей / Е.А. Курилов, Ю.В. Михлин // Прикладная Механика. – 2007. – № 43(9). – С. 63-73.
10. Михлин Ю. В. Нелинейные колебательные процессы в колесных экипажах / Ю.В. Михлин, С.Г. Митрохин // Прикладная механика. – 2010. – №11. – С. 115-123.

11. Перепелкин Н. В. Анализ вынужденных форм колебаний однодискового ротора на нелинейно-упругих опорах / Н.В. Перепелкин, Ю.В. Михлин // Механика твердого тела. – 2010. – №40. – С. 221-232.
12. Филипковский С. В. Колебания роторов на нелинейных опорах / С.В. Филипковский, К.В. Аврамов // Вестник двигателестроения. – 2009. – №3. – С. 127-132.
13. Perepelkin N. V. Non-linear normal forced vibration modes in systems with internal resonance / N.V. Perepelkin, Yu.V. Mikhlin, C. Pierre // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2013 – Vol. 57. – P. 102-115.
14. Аврамов К. В. Нелинейная динамика упругих систем : т. 1 / К.В. Аврамов, Ю.В. Михлин. – М.-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. – 704 с.
15. Mikhlin Yu. V. Nonlinears Normal Modes for Vibrating Mechanical Systems. Review of Theoretical Developments / Yu. Mikhlin, K.V. Avramov // Applied Mechanics Reviews. – 2010. – Vol. 63(6). – P. 060802.
16. Уоткинс Д. С. Основы матричных вычислений / Д.С. Уоткинс. – М. : Бином. Лаборатория знаний, 2006. – 664 с.
17. Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М. : Мир, 1989. – 655 с.
18. Bai Z. On swapping diagonal blocks in real Schur form / Z. Bai, J.W. Demmel // Linear Algebra and Appl. – 1993. – Vol. 186. – P. 73-95.
19. Brandts J. H. Matlab code for sorting real Schur forms / J.H. Brandts // Numer. Linear Algebra Appl. 9. – 2002. – P. 249-261.
20. Granat R. Parallel eigenvalue reordering in real Schur forms / R. Granat, B. Kågström, D. Kressner // Concurrency Computat. : Pract. Exper. – 2009. – 21. – P. 1225-1250.

REFERENCES

1. Manevich, L.I., Mikhlin, Yu.V. and Pilipchuk, V.N. (1989), *Metod normalnyih kolebaniy dlya suschestvenno nelineynyih sistem* [Method of normal oscillations for essentially nonlinear systems], Nauka, Moscow.
2. Pesheck, E., Pierre, C. and Shaw, S.W. (2002), “A new Galerkin – based approach for accurate non-linear normal modes through invariant manifolds”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 249, no. 5, pp. 971-993.
3. Pesheck, E., Pierre, C., Shaw, S.W. and Boivin, N. (2002), “Nonlinear modal analysis of structural systems using multi-mode invariant manifolds”, *Nonlinear Dynamics*, vol. 25, pp. 183-205.
4. Shaw, S.W.and Pierre, C. (1993), “Normal modes for nonlinear vibratory systems”, *Journal of Sounds and Vibration*, vol. 164, pp. 85-124.
5. Avramov, K.V. and Mikhlin, Yu.V. (2004), “Snap-through truss as a vibration absorber”, *Journal of Vibration and Control*, vol. 10, pp. 291-308.
6. Gendelman, O.V. (2001), “Transition of energy to a nonlinear localized mode in a highly asymmetric system of two oscillators”, *Nonl. Dyn.*, vol. 25, pp. 237-253.
7. Avramov, K.V., Pierre, C. and Shyriaieva, N. (2007), “Flexural-flexural-torsional nonlinear vibrations of pre-twisted rotating beams with asymmetric cross section”, *Journal of Vibrations and Control*, vol. 13, no.4, pp. 329-364.
8. Avramov, K.V., Mikhlin, Yu.V. and Kurilov, E.(2007), “Asymptotic analysis of nonlinear dynamics of smply supported cylindrical shells”, *Nonlinear Dynamics*, vol. 47, pp. 331-352.
9. Kurilov, E.A. and Mikhlin, Yu.V. (2007), “On nonlinear oscillations of cylindrical shells under supersonic flow taking into account initial imperfections”, *Prikladnaya Mehanika*, no. 43(9), pp. 63-73.
10. Mikhlin, Yu.V. and Mitrokhin, S.G. (2010), “Nonlinear oscillations of wheeled vehicles”, *Prikladnaya mehanika*, no. 11, pp. 115-123.
11. Perepelkin, N.V. and Mikhlin, Yu.V. (2010), “Analysis of forced oscillation modes of single-disk rotor mounted on nonlinear supports”, *Mehanika tverdogo tela*, no. 40, pp. 221-232.
12. Filipkovskiy, S.V. and Avramov, K.V. (2009), “Oscillations of rotors mounted on nonlinear supports”, *Vestnik dvigatelestroeniya*, no. 3, pp. 127-132.
13. Perepelkin, N.V., Mikhlin, Yu.V. and Pierre, C. (2013), “Non-linear normal forced vibration modes in systems with internal resonance”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 57, p. 102-115.
14. Avramov, K.V. and Mikhlin, Yu.V. (2010), *Nelineynaya dinamika uprugih sistem* [Nonlinear dynamics of elastic systems] (part.1), «Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika», Moscow-Izhevsk, Russia.
15. Mikhlinn, Yu.V. and Avramov, K.V. (2010), “Nonlinears Normal Modes for Vibrating Mechanical Systems. Review of Theoretical Developments”, *Applied Mechanics Reviews*, vol. 63(6), p.060802.
16. Watkins, D.S. (2010), “Fundamentals of Matrix Computations”, 3rd Ed., Wiley.

17. Horn, R. and Johnson, C. (1985), “Matrix Analysis”, Cambridge Univ. Press.
18. Bai, Z. and Demmel, J.W. (1993), “On swapping diagonal blocks in real Schur”, *Linear Algebra and Appl.*, vol. 186, pp. 73-95.
19. Brandts, J.H. (2002), “Matlab code for sorting real Schur forms”, *Numer. Linear Algebra Appl. 9*, pp. 249-261.
20. Granat, R., Kågström, B. and Kressner, D. (2009), “Parallel eigenvalue reordering in real Schur forms”, *Concurrency Computat.: Pract. Exper.*, 21, pp. 1225-1250.

УДК 539.3: 534.1

ДО МЕТОДУ ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ ПОВЕРХНІ ЗА ЇЇ КОМБІНОВАНИМИ ГОЛОГРАФІЧНИМИ ІНТЕРФЕРОГРАМАМИ

Селіванов Ю. М., д. т. н., с. н. с.

Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара, просп. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49010, Україна

selivanov-dnu@i.ua

Отримані формули освітленості поверхні на комбінованих голографічних інтерферограмах для випадків її сталих і нестаціонарних коливань, чисельно досліджено вплив параметрів коливань та умов експерименту на діапазон вимірюваних зміщень і чутливість методу в цих випадках.
Ключові слова: сталі й нестаціонарні коливання, комбіновані голографічні інтерферограми, вплив параметрів коливань та умов експерименту.

К МЕТОДУ ИССЛЕДОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПОВЕРХНОСТИ ПО ЕЁ КОМБИНИРОВАННЫМ ГОЛОГРАФИЧЕСКИМ ИНТЕРФЕРОГРАМАМ

Селиванов Ю. М., д. т. н., с. н. с.

Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара, просп. Гагарина, 72, г. Днепропетровск, 49010, Украина

selivanov-dnu@i.ua

Получены формулы освещенности поверхности на комбинированных голографических интерферограммах для случаев ее установившихся и нестационарных колебаний, численно исследовано влияние параметров колебаний и условий эксперимента на диапазон измеряемых смещений и чувствительность метода в этих случаях.
Ключевые слова: постоянные и нестационарные колебания, комбинированные голографические интерферограмы, влияние параметров колебаний и условий эксперимента.

ON METHOD FOR INVESTIGATION OF SURFACE OSCILLATIONS WITH THE USE OF COMBINED HOLOGRAPHIC INTERFEROGRAMS

Selivanov Yu. M., Dr. Sci. (Tech.)

Dnipropetrovsk National University named Oles Honchar, Gagarin Avenue, 72, Dnepropetrovsk, 49010, Ukraine

selivanov-dnu@i.ua

The formulas for illuminance of surface on the combined interferograms were obtained for steady-state and non-stationary oscillations. By means of simulation, influence of oscillation parameters and experimental conditions on measurable shift range and method sensitivity was studied for the cases in question.
Important and extraordinary complicated problems of non-stationary dynamics of non-homogeneous thin-walled structures [1-3], first of all, demand experimental investigations with new quality level and, consequently, a development of measurement methodology [1-7].