УДК 519.876.5: / 534:539.37

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТЕЛ

Снежкова Л. С., аспирант, Чопоров С. В., к. т. н., доцент

Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина

s.choporoff@ znu.edu.ua

В статье рассмотрены аналитические, численные, численно-аналитические методы для решения контактных задач в механике. Описан функциональный подход на базе теории R-функций. Выполнено описание простейших геометрических форм при помощи неявных функций. Рассмотрены примеры контакта геометрических тел, определение области контакта.
Ключевые слова: R-функция, контактные задачи, функциональное представление, контактное взаимодействие тел, функция области контакта.

ФУНКЦІОНАЛЬНЕ ПОДАННЯ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ТІЛ

Снежкова Л. С., аспірант, Чопоров С. В., к. т. н., доцент

Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна

s.choporoff@znu.edu.ua

У статті розглянуті аналітичні, чисельні, чисельно-аналітичні методи для розв’язку контактних задач у механіці. Описано функціональний підхід на базі теорії R-функцій. Виконано опис найпростіших геометричних форм за допомогою неявних функцій. Розглянуто приклади контакту геометричних тіл, визначення області контакту.
Ключові слова: R-функція, контактні задачі, функціональне представлення,контактна взаємодія тіл, функція області контакту.

FUNCTIONAL REPRESENTATION OF CONTACT INTERACTION BODIES

Sniezhkova L. S., postgraduate student, Choporov S. V., PhD in Engineering, Associate Professor

Zaporizhzhya National University, Ukraine
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, Ukraine, 69600

s.choporoff@znu.edu.ua

The paper is devoted to functional representation of contact interaction bodies.
Currently, contact interaction of various objects and structures play an important role in scientific practice. Contact interaction is used in the hinge, flanged joints, and strength calculations of elastic, viscoelastic and plastic bodies in static or dynamic contact. At various technological processing operations – stamping, cutting, drilling oil and gas wells, supporting bridge spans parts, gears, foundations for buildings and others. Therefore, it is current to develop techniques and methods of mathematical and computer modeling for problems.
The paper under consideration is called analytical, numerical, numerical-analytical method for solving contact problems in mechanics. Proposed approach is based on the functional approach and theory of V.L. Rvachev's R-functions.
Analytic of methods for solving contact problems in the mechanics are as follows: equations pair method, orthogonal functions method. Among the numerical methods for solving contact problems in mechanics can be identified discrete element method, finite difference, finite element, boundary element. By numerical-analytical methods include most of variational methods: of Ritz’s method, of Kantorovich-Vlasov method, of Trefts method and of Bubnov-Galerkin’s method.
Also in this paper were presented methods for description (representation) of mathematical models of geometric objects, among which the most common are the boundary representation of solid modeling, and functional one.
Special attention was paid to the functional approach based on the theory of V.L. Rvachev’s R-functions. With the help of the functional approach was built simple geometric shapes. They are defined by implicit functions: a domain bounded by a radius centered at the origin, a rectangle with center at the origin, a rectangle with rounded corners, a regular polygon inscribed in a circle. With the composition of functions corresponding to the primitives, have been built drawings functions – the plane of the strip on the wheel and space.

It is constructed the functions on determining the contact area for the following flat bodies: indentation in the half-round punch, punch indentation square into a rectangle with a central hole, in contact with the lower half-plane half-ring.
Based on the aforementioned it may be concluded that by using a functional approach geometries of various forms can be described using mathematical functions with using of logical operations on it. R-function method combines the compactness and versatility in terms of storage. In such case final representation is obtained as a single real function. Thus, the use of the R-functions device allows for relatively easy to describe geometric objects of arbitrary shape with subsequent discretization into finite elements.
Also, the functional approach is based on the theory of V.L. Rvachev's R-functions which is very flexible and versatile tool for mathematical modeling of geometric objects. In this approach, the body represents an implicit real functions that are greater than zero in the interior of the body, are zero on the boundary and less than zero in the outer points. With the help of the mathematical theory of R-functions can be described the model of arbitrary geometric object used in the art.
In this case, for the localization of the contact area can be used a special function that is based on functional models of the contacting bodies. The roots of this function will be points which at the same time belonging to both bodies. The root of the contact function is the minimum points, which makes them easier to find.
As a result, the purpose of the proposed work is to develop mathematical models for the contact interaction of bodies on the basis of the functional approach and R-functions theory.
Key words: R-function, contact problems, functional representation, contact interaction bodies, function of contact zone.

ВВЕДЕНИЕ

В современной инженерной и научной практике весьма часто исследователям приходится сталкиваться с задачами моделирования взаимодействия нескольких тел. Сложность многих современных объектов и конструкций делает физические эксперименты над ними трудными, дорогостоящими, а в некоторых случаях и невозможными. Следовательно, актуальным является разработка способов и методов математического и компьютерного моделирования таких задач.

Отдельным, важным с прикладной точки зрения направлением является исследование напряженно-деформированного состояния взаимодействующих тел. Исторически механика контактных взаимодействий берет свое начало с задачи Герца о контакте двух сферических упругих тел. Особенностью контактных задач в механике является наличие на части поверхности упругого тела контакта с другим телом (абсолютно жестким или упругим). Поверхностные силы представляют собой результат взаимодействия рассматриваемого тела с примыкающими к нему телами. Если взаимодействуют твердые тела, то точки соприкосновения (точки контакта) в области контакта перемещаются одинаково, или проскальзывают одна относительно другой.

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

В настоящие время для решения контактных задач в механике разработаны аналитические [1], численные [2] и численно-аналитические методы [3].

К аналитическим методам решения контактных задач в механике можно отнести следующие методы: метод парных уравнений, метод ортогональных функций. Аналитические методы, как правило, предлагают точное или асимптотическое решение контактных задач в механике. Тем не менее, их весьма трудно применять на практике для исследования контактного взаимодействия тел сложной формы.

Среди численных методов решения контактных задач в механике можно выделить методы дискретных элементов [4], конечных разностей [5], конечных элементов [6, 7], граничных элементов [8] и другие [9]. Использование таких методов весьма распространено, что обусловлено возможностью моделирования объектов и конструкций сложной формы, с использованием компьютерной техники.

К численно-аналитическим методам относятся методы, в которых решение может быть записано в аналитической форме, но неопределенные параметры или функции могут быть определены в результате реализации какого-либо численного алгоритма. К таким методам относится большинство вариационных методов: метод Ритца [10], метод Канторовича-Власова [11], метод Трефца [12], а также метод Бубнова-Галеркина [13].

При этом практическое применение методов решения контактных задач в механике требует наличия математического аппарата для описания геометрии взаимодействующих тел – геометрических объектов. Среди методов описания (представления) математических моделей геометрических объектов наиболее распространенными являются граничное представление [14], твердотельное моделирование [15], функциональное представление [16, 17].

Граничное представление основано на идее, что твердое тело описывается как замкнутая пространственная область, ограниченная набором элементарных тонких поверхностей с общими образующими контурами на границе поверхностей и признаком внешней или внутренней стороны поверхности. Универсальность используемых структур делают такой подход одним из наиболее применимых в компьютерной графике [18].

Твердотельное моделирование основано на идее использования моделей элементарных тел (примитивов) и теоретико-множественных операций над ними. Его преимуществом является простота и наглядность моделирования. Основным недостатком является относительная сложность построения моделей тел нестандартной формы.

Функциональный подход с применением R-функций В.Л. Рвачева [19] основан на идее использования неявных функций для формального математического описания формы исследуемой области и позволяет моделировать тела произвольной сложности. Применение такого подхода на практике требует разработки математического аппарата для определения площади контакта.

Таким образом, целью предложенной работы является разработка математических моделей для описания контактного взаимодействия тел на базе функционального подхода и теории R-функций.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ПОДХОД НА БАЗЕ ТЕОРИИ R-ФУНКЦИЙ

Пусть Ω – сплошное тело, геометрическую модель которого необходимо получить. Наиболее общим методом определения множества точек X, образующих объект Ω, является определение предиката A, который может быть вычислен для каждой точки p пространства:

$$X = \{p | A(p) = \text{true}\}.$$

Таким образом, X определено неявно и состоит из всех точек, удовлетворяющих условию, определенному предикатом A. Простейшей формой такого предиката является ограничение на знак некоторой действительной функции $f(p)$. Например, если $f(p) = Ax + By + Cz + D$, тогда, $f(p) = 0$, $f(p) \geq 0$ и $f(p) \leq 0$ определяют плоскость, закрытое полупространство и открытое полупространство, соответственно.

Развитием данного подхода является построение более сложных функций конструктивно, используя логические комбинации простых функций, которые эквивалентны стандартным операциям над множествами. Наиболее часто используемая на практике система функций имеет вид [20]:

$$\begin{gathered} \neg x \equiv -x, \\ x_1 \wedge x_2 \equiv x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, , \\ x_1 \vee x_2 \equiv x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \end{gathered} \tag{1}$$

где x, x_1 и x_2 – значения некоторых действительных функций.

Простейшие геометрические формы определяются неявными функциями. Например, функция

$$\mathrm{Circle}(x, y, r) = r^2 - x^2 - y^2 \tag{2}$$

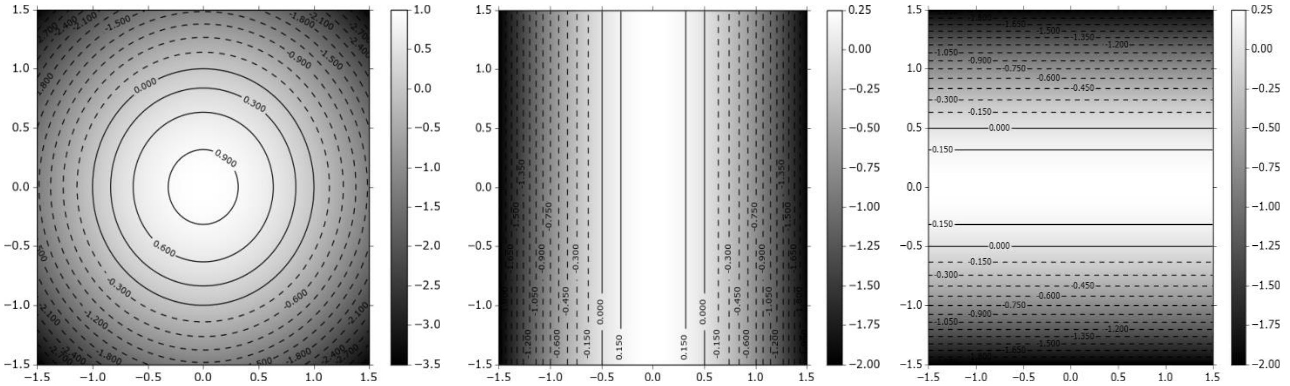
определяет область, ограниченную окружностью радиуса r с центром в начале координат (пример картины линий уровня представлен на рис. 1, а). Далее на картинах линий уровня сплошные линии соответствуют положительным значениям функции, а пунктирные – отрицательным.

Аналогично функции

$$\mathrm{Band}^{\,x}(x, w) = \left(\frac{w}{2}\right)^2 - x^2, \tag{3}$$

$$\mathrm{Band}^{\,y}(y, h) = \left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2 \tag{4}$$

соответственно определят полосы шириной w и h, направленные перпендикулярно оси абсцисс (рис. 1, б) или ординат (рис. 1, в).



(а):$\mathrm{Circle}(x, y, 1)$ (б): $\mathrm{Band}^{\,x}(x, 1)$ (в): $\mathrm{Band}^{\,y}(y, 1)$

Рис. 1. Примеры картин линий уровня функций (2), (3) и (4)

Конъюнкция функций (3) и (4) позволяет определить другую, распространенную на практике геометрическую форму, – прямоугольник с центром в начале координат и сторонами, параллельными координатным осям, шириной w и высотой h (рис. 2, а)

$$\mathrm{Rectangle}(x, y, w, h) = \mathrm{Band}^{\,x}(x, w) \wedge \mathrm{Band}^{\,y}(y, h) = \left[\left(\frac{w}{2}\right)^2 - x^2\right] \wedge \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right]. \tag{5}$$

Частным случаем формулы (5) будет функция, соответствующая квадрату со стороной a и центром в начале координат,

$$\mathrm{Square}(x, y, a) = \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - x^2\right] \wedge \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - y^2\right].$$

Также на базе функции (5) можно получить другой распространенный примитив – прямоугольник со скругленными углами:

$$\begin{gathered}\mathrm{Roundrect}(x, y, w, h, r) = \mathrm{Rectangle}(x, y, w - 2r, h) \vee \mathrm{Rectangle}(x, y, w, h - 2r) \vee \\ \vee \mathrm{Circle}(x - dx, y - dy, r) \vee \mathrm{Circle}(x + dx, y - dy) \vee \mathrm{Circle}(x - dx, y + dy, r) \vee \\ \vee \mathrm{Circle}(x + dx, y + dx),\end{gathered} \tag{6}$$

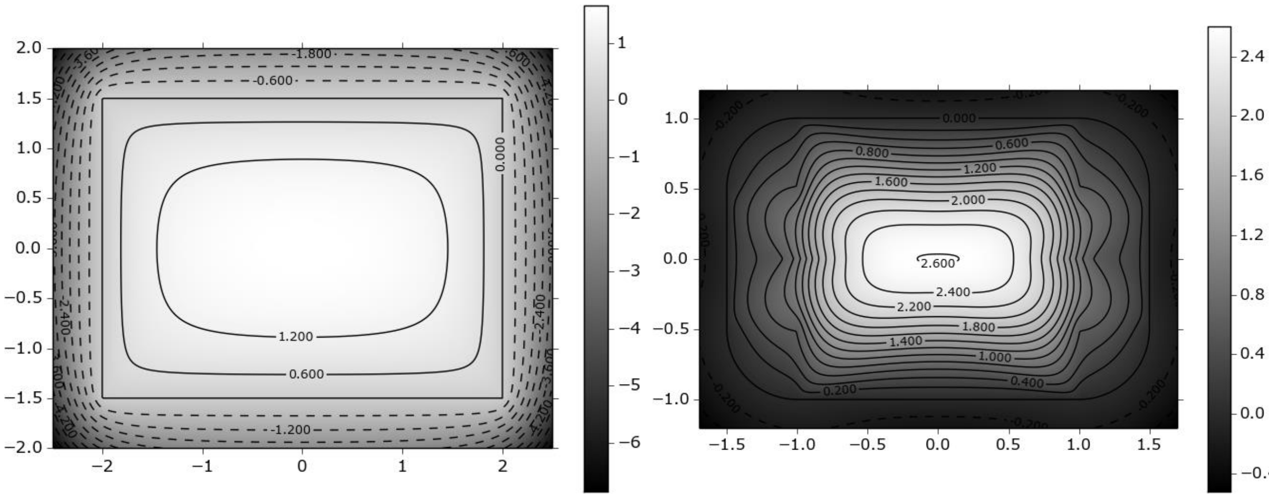
где r – радиус скругления; $dx = \frac{w}{2} - r$ и $dy = \frac{h}{2} - r$ – смещения центров окружности (пример картины линий уровня приведен на рис. 2, б.)

Правильный n-угольник, вписанный в окружность радиуса r, может быть представлен формулой

$$\begin{gathered}\mathrm{Regular}(x, y, r, n) = [(y - y_1)(x_2 - x_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1)] \wedge \\ \wedge [(y - y_2)(x_3 - x_2) - (x - x_2)(y_3 - y_2)] \wedge \ldots \wedge\end{gathered} \tag{7}$$

$$\wedge [(y - y_n)(x_0 - x_n) - (x - x_n)(y_0 - y_n)],$$

где $x_i = r\cos\alpha_i$ и $y_i = r\sin\alpha_i$ – координаты вершин в порядке обхода против часовой стрелки; $\alpha_i = \frac{2\pi}{n}(i-1)$ – угол поворота радиуса в i-й вершине. Пример картины линий уровня представлен на рис. 3.



(а): Rectangle$(x, y, 4, 3)$ (б): Roundrect$(x, y, 3, 2, 0{,}5)$

Рис. 2. Примеры картин линий уровня функций (5) и (6)

Необходимо отметить, что формула (7) может использоваться для представления произвольного выпуклого многоугольника в предположении, что (x_i, y_i) – последовательность координат вершин в порядке их обхода против часовой стрелки.

Аналогичным образом, строя композиции функций, соответствующих примитивам, можно строить функции чертежей. Например, планка (чертеж представлен на рис. 4, а) может быть представлена формулой

$$\mathrm{Planka}(x, y, w, h, r) = \left[\mathrm{Rect}(x, y, w, h) \vee \mathrm{Circle}\left(x - \frac{w}{2}, y, \frac{h}{2}\right)\right] \wedge [\neg\,\mathrm{Circle}(x, y, r)].$$

При этом начало координат будет соответствовать центру отверстия. Пример картины линий уровня приведен на рис.4, б.

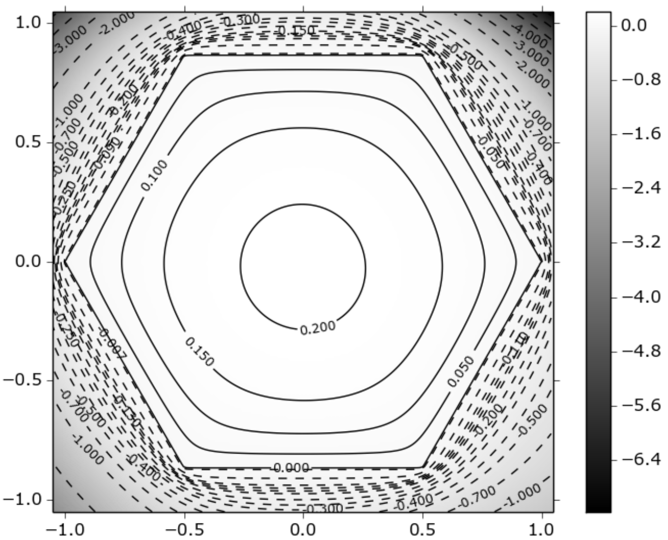


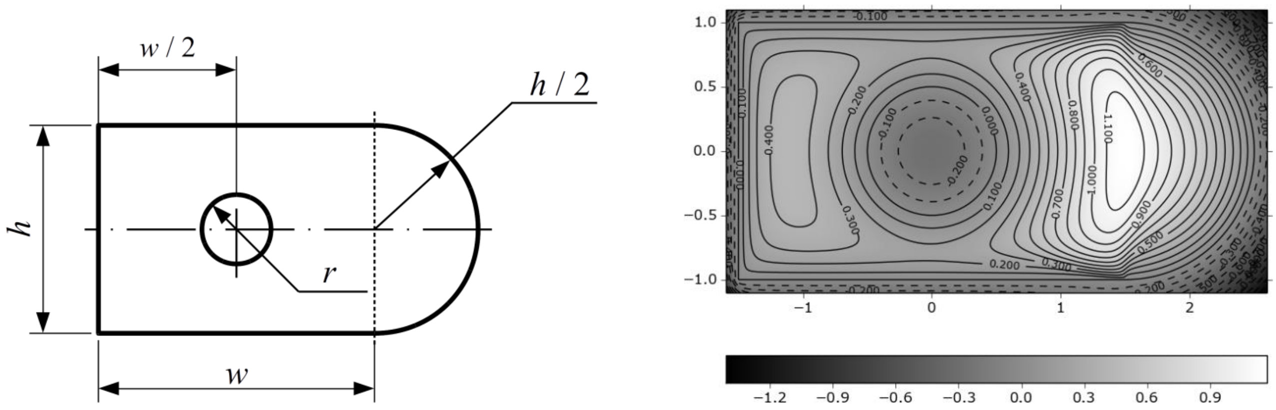
Рис. 3. Картина линий уровня функции (7) при $r = 1, n = 6$

Простейшими трехмерными формами являются области, такие, как шар, цилиндр, тор и другие. Например, функция

$$\mathrm{Cylindre}^z(x,y,z,r,l) = (r^2 - x^2 - y^2) \wedge \left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 - z^2\right]$$

представляет цилиндр радиуса r и высотой l с образующей, совпадающей с осью аппликат. Тор, полученный вращением образующей окружности радиуса r на расстоянии от центра образующей окружности до оси вращения представляется известной формулой

$$\mathrm{Tor}^z\,(x,y,z,r,R) = 4R^2(x^2+y^2) - (x^2+y^2+z^2+R^2-r^2)^2.$$



(а) (б)

Рис. 4. Чертеж и картина линий уровня функции $\mathrm{Planka}(x,y,w,h,r)$ при $w = 3, h = 2, r = 0{,}5$

Аналогично формуле (5) можно представить область, ограниченную прямоугольным параллелепипедом, функцией

$$\mathrm{Box}(x,y,z,w,h,d) = \left[\left(\frac{w}{2}\right)^2 - x^2\right] \wedge \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right] \wedge \left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 - z^2\right],$$

где w – ширина параллелепипеда, h – длина, d – толщина.

Как и в плоском случае модели сложных тел строятся путем логической композиции функций, соответствующих трехмерным примитивам. Например, модель колеса (рис.5) может быть представлена формулой

$$\mathrm{Wheel}(x,y,z,r,R,w) = \mathrm{Tor}^z\,(x,y,z,r,R) \vee \mathrm{Cylindre}^z(x,y,z,r,r) \vee$$
$$\vee\, \mathrm{Box}(x,y,z,2*R-r,w,w) \vee \mathrm{Box}(x,y,z,2*R-r,w,w),$$

где R – радиус образующей окружности обода колеса, r – радиус центрального диска, w – ширина.

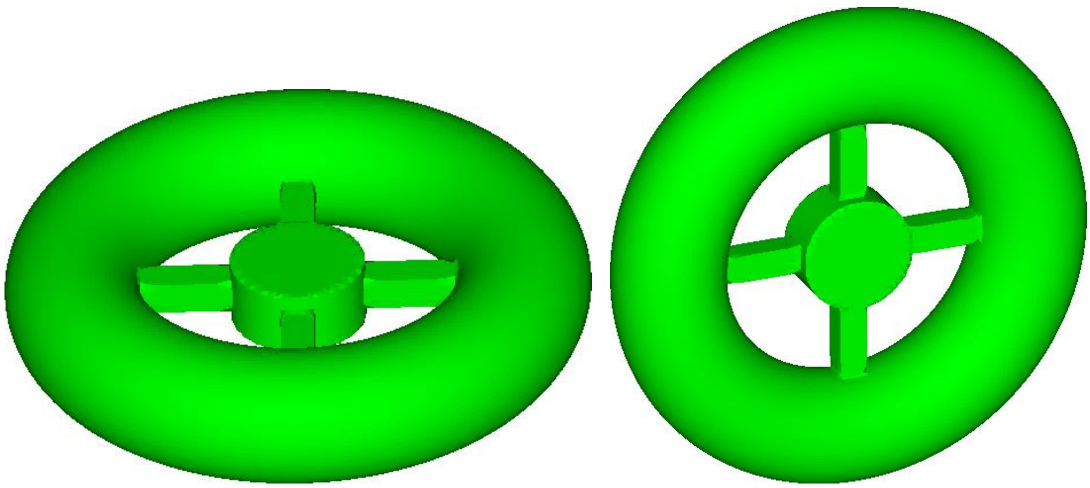


Рис. 5. Визуализация функции $\mathrm{Wheel}(x,y,z,r,R,w)$ при $R = 2, r = 0{,}6, w = 0{,}3$

Таким образом, при помощи функционального подхода геометрические объекты различных форм могут быть описаны математическими функциями с использованием логических операций над этими математическими функциями. Метод R-функций сочетает в себе универсальность и компактность с точки зрения хранения данных. При этом итоговое представление получается в виде единственной действительной функции. Использование аппарата R-функций дает возможность сравнительно легко описывать геометрические объекты произвольной формы с последующей их дискретизацией на конечные элементы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТИ КОНТАКТА

При численном решении контактных задач критическим является построение сетки в области контакта. При этом используются методы как на основе согласованных, так и на основе не согласованных сеток. В первом случае узлы и ребра (грани) элементов в области контакта совпадают, во втором не совпадают. В обоих случаях для повышения точности необходимо сгущать сетку в области контакта. Поэтому важным является наличие критерия для управления процессом сгущения сетки.

Рассмотрим функцию:

$$\kappa(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \tag{8}$$

Очевидно, что эта функция является неотрицательной во всей области определения и её корни являются ее точками минимума.

Предположим, что в контакте участвуют два тела, которые представляются функциями $w_1(p)$ и $w_2(p)$. Напомним, что $w_1(p) > 0$ во внутренних точках первого тела, $w_1(p) = 0$ на граничных точках первого тела и $w_1(p) < 0$ для внешних точек первого тела. При этом, аналогично $w_2(p) > 0$ во внутренних точках второго тела, $w_2(p) = 0$ на граничных точках второго тела и $w_2(p) < 0$ для внешних точек второго тела.

Тогда равенство

$$\sqrt{w_1^2(p) + w_2^2\,(p)} = 0$$

выполняется только в точках, принадлежащих одновременно границам и первого и второго тел. То есть точки, которые являются корнями этой функции (они же при этом точки минимума), соответствуют области контакта.

Например, рассмотрим двумерную задачу о вдавливании круглого штампа в полуплоскость (рис. 6, а). Функция

$$w_c(x, y) = Circle(x, y - r, r) \tag{9}$$

соответствует области, ограниченной окружностью радиуса r с центром в точке $(0; r)$. Функция

$$w_{py}(x, y) = -y$$

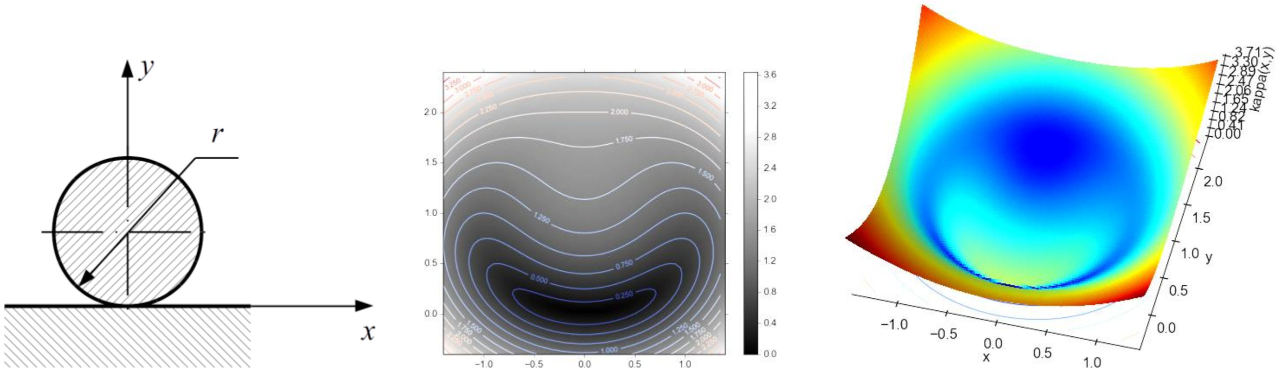
соответствует нижней полуплоскости. Тогда, функция

$$\kappa_{cpy}\left(w_c(x, y), w_{py}(x, y)\right) = \sqrt{w_c^2(x, y) + w_{py}^2(x, y)}$$

будет соответствовать геометрическому месту точек области контакта (в данном случае единственному корню), распределение значений этой функции представлено на рис. 6, б, в.

Аналогично задаче о вдавливании квадратного штампа со стороной a в прямоугольник шириной w и высотой h с центральным отверстием радиуса r (рис. 7, а) будут соответствовать функции

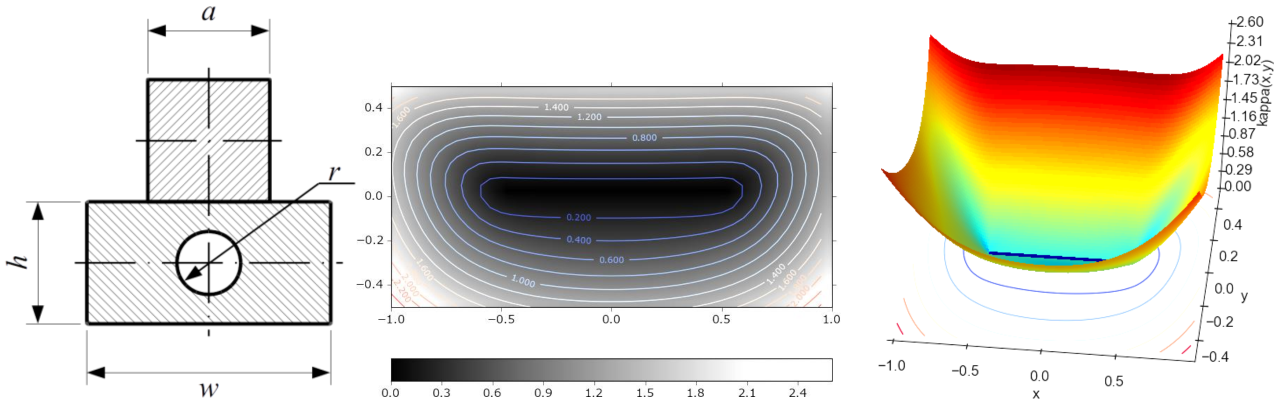
$$w_q(x,y) = \text{Rectangle}\left(x, y - \frac{a}{2}, a, a\right),$$
$$w_r(x,y) = \text{Rectangle}\left(x, y + \frac{h}{2}, w, h\right) \wedge \text{Circle}\left(x, y + \frac{h}{2}, r\right),$$
$$\kappa_{qr}(x,y) = \sqrt{w_q^2(x,y) + w_r^2(x,y)}. \tag{10}$$



(а) (б) (в)

Рис. 6. Чертеж и картина линий уровня функции (9) при $r = 1$

Областью контакта будет линия ширины a (рис. 7, б, в).

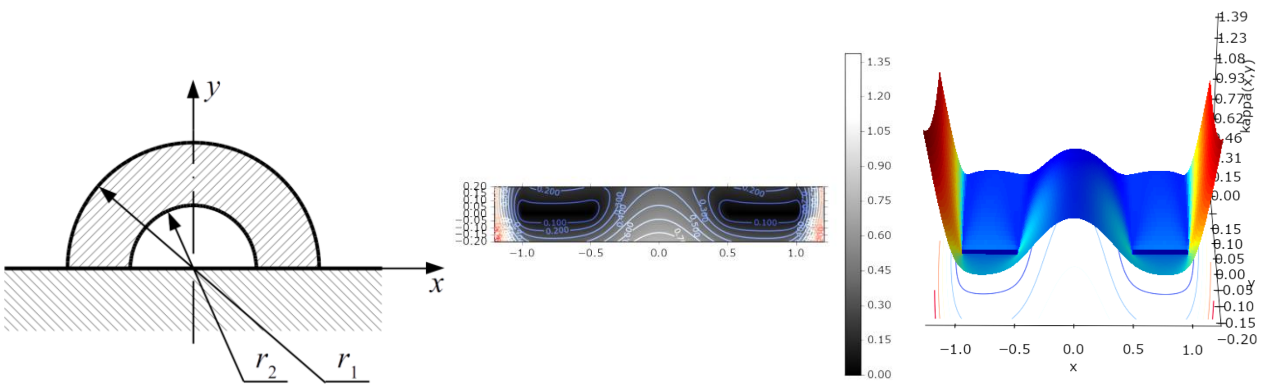


(а) (б) (в)

Рис. 7. Чертеж и картина линий уровня функции (10) при $\mathrm{a} = 1, w = 4, h = 2, r = 0.5$

Если рассмотреть задачу о контакте полукольца, у которого внешний радиус r_1 и внутренний радиус r_2, с нижней полуплоскостью (рис. 8,а), то область контакта представляется двумя отрезками (рис. 8, б, в), а контактирующие объекты функциями:

$$w_r(x,y) = \text{Circle}(x, y, r_1) \wedge \neg\text{Circle}(x, y, r_2) \wedge \mathrm{y}, \tag{11}$$
$$\kappa_{rpy}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \sqrt{w_r^2(x,y) + w_{py}^2(x,y)}. \tag{12}$$



(а) (б) (в)

Рис. 8 Чертеж и картина линий уровня функции (12) при $r_1 = 1, r_2 = 0.5$

Необходимо отметить, что без потери общности можно использовать функцию (8) для определения геометрического места точек контакта трехмерных тел.

Также неравенство

$$\kappa(x_1, x_2) < \varepsilon$$

может быть использовано для сгущения сеток конечных элементов путем добавления новых узлов и элементов в точках, для которых выполняется это неравенство.

ВЫВОДЫ

Таким образом, функциональный подход на базе теории R-функций В.Л. Рвачева является весьма гибким и универсальным инструментом для математического моделирования геометрических объектов. При таком подходе тела представляются неявными действительными функциями, которые больше нуля во внутренних точках тела, равны нулю на границе и меньше нуля во внешних точках. С помощью математической теории R-функций можно описать модель произвольного геометрического объекта, используемого в технике.

При этом для локализации области контакта может быть использована специальная функция, построенная на базе функциональных моделей контактирующих тел. Корнями этой функции будут точки, одновременно принадлежащие обоим телам. Корни функции контакта являются точками минимума, что упрощает их поиск.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М. Аналитические методы в контактных задачах теории упругости / В.М. Александров, М.И. Чебаков. – М. : Физматлит, 2004. – 304 с.
2. Баженов В. А. Численные методы в механике / В.А. Баженов, А.Ф. Дащенко. – Одесса : Стандартъ, 2005. – 563 с.
3. Крагельский И. В. Основы расчетов на трение и износ / И.В. Крагельский, М.Н. Добычин, В.С. Комбалов. – М. : Машиностроение, 1977. – 526 с.
4. Popov V. L. Contact Mechanics and Friction Physical Principles and Appliations / Valentin L. Popov. – Springer-Verlag, 2010. – P. 301-321
5. Боголюбов А. Н. Метод конечных разностей для решения задач синтеза волноведущих систем [Электронный ресурс] / А.Н. Боголюбов, А.В. Красильникова, Д.В. Минаев, А.Г. Свешников // Математическое моделирование. – М. : РАН, 2000. – Т. 12, № 1 – С. 13-24.
6. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике : Пер. с англ. / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1976. – 545 с.
7. Розин Л. А. Задачи теории упругости и численные методы их решения / Л.А. Розин. – СПб. : СПбГТУ, 1998. – 532 с.
8. Алейников С. М. Метод граничных элементов в контактных задачах для упругих пространственно неоднородных оснований / С.М. Алейников. – М. : АСВ, 2000. – 754 с.
9. Чебаков М. И. Асимпотические и численно-аналитические методы в контактных задачах теории упругости : автореф. дис. на соискание учен. степ. к-та физ.-мат. наук : спец. 01.02.04 «механика деформируемого твердого тела» / М.И. Чебаков. – Ростов н/Д, 2002. – 34 с.
10. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – М. : Наука, 1970. – 512 с.
11. Абовский Н. П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек / Н.П. Абовский, Н.П. Андреев, А.П. Деруга. – М. : Наука, 1978. – 288 с.
12. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. – М. : Мир, 1987. – 542 с.
13. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н. Работнов – М. : Наука, 1988. – 752 с.
14. Farin G. Handbook of computer-aided geometric design / G. Farin, J. Hoschek, M.-S. Kim. – Amsterdam : Elsevier Science B. V., 2002. – 848 p.
15. Agoston M. K. Computer graphics and geometric modeling: implementation and algorithms / Max K. Agoston. – London : Springer-Verlag, 2005. – 959 p.

16. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев. – К. : Наукова думка, 1982. – 552 с.

17. Рвачёв В. Л. Геометрические приложения алгебры логики / В.Л. Рвачёв. – К : Техніка, 1967. – 213 с.

18. Лисняк А. А. Методика визуализации геометрических объектов, описанных с помощью R-функций / А.А. Лисняк, С.И. Гоменюк, С.В. Чопоров // Вісник Запорізького національного університету : Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2010. – № 1. – С. 88-97.

19. Рвачев В. Л. Введение в теорию R-функций / В.Л. Рвачев, Т.И. Шейко // Проблемы машиностроения. – 2001. – Т. 4, №1-2. – С. 46-58.

20. Рвачев В. Л. Исследования ученых Украины в области контактных задач теории упругости // Прикладная механика. – 1967. – Вып. 5. – С. 109-116.

REFERENCES

1. Aleksandrov, V.M. and Chebakov, M.I. (2004), *Analiticheskie metody v kontaktnykh zadachakh teorii uprugosti* [Analytical methods in contact problems of elasticity theory], Fizmatlit, Moskow, Russia.

2. Bazhenov, V.A. and Dashchenko, A.F. (2005), *Chislennye metody v mekhanike* [Numerical Methods in Mechanics], Standart, Odessa, Ukraine.

3. Kragel'skiy, I.V., Dobychin, M.N. and Kombalov, B.C. (1977), *Osnovy raschetov na trenie i iznos* [Basis of calculations on the friction and wear], Mashinostroenie, Moskow, Russia.

4. Popov, V.L., (2010), “Contact Mechanics and Friction Physical Principles and Appliations”, Springer-Verlag.

5. Bogolyubov, A.N., Krasil'nikova, A.V., Minaev D.V. and Sveshnikov A.G. (2000), “The finite difference method for waveguiding systems design problems”, *Matematicheskoe modelirovanie*, RAN, Moscow, vol. 12, no. 1, pp. 13-24.

6. Zenkevich, O.K., (1976), *Metod konechnykh elementov v tekhnike* [The finite element method in engineering science], Translated by Pobedri B.E., Mir, Moskow, Russia.

7. Rozin, L.A. (1998), *Zadachi teorii uprugosti i chislennye metody ikh resheniya* [Problem of elasticity theory and numerical methods for their solution], SPbGTU, St Petersburg, Russia.

8. Aleynikov, S.M. (2000), *Metod granichnykh elementov v kontaktnykh zadachakh dlya uprugikh prostranstvenno neodnorodnykh osnovaniy* [Boundary element method in contact problems for elastic spatially inhomogeneous bases], ASV, Moskow, Russia.

9. Chebakov, M.I. (2002), “Asimptotic and numerical-analytical methods in contact problems of elasticity theory” Spetsial'nost', Thesis abstract for Cand.Sc. (Engineering.), 01.02.04, Rostov. gos. un-t. Nauch.-issled. in-t mekhaniki i priklad. matematiki, Rostov n/D, Russia.

10. Mikhlin, S.G. (1970), *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike* [Variational methods in mathematical physics], Nauka, Moskow, USSR.

11. Abovskiy, N.P., Andreev, N.P. and Deruga, A.P. (1978), *Variatsionnye printsipy teorii uprugosti i teorii obolochek* [Variational principles of elasticity theory and the theory of shells], Nauka, Moskow, Russia.

12. Vasidzu, K. (1987), *Variatsionnye metody v teorii uprugosti i plastichnosti* [Variational methods in the theory of elasticity and plasticity], Mir, Moskow, Russia.

13. Rabotnov, Yu.N. (1988), *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of deformable solids], Nauka, Moskow, Russia.

14. Farin, G., Hoschek J. and Kim M.-S. (2002), “Handbook of computer-aided geometric design”, Elsevier Science B. V., Amsterdam.

15. Agoston, M.K. (2005), “Computer graphics and geometric modeling: implementation and algorithms”, Springer-Verlag, London.

16. Rvachev, V.L. (1982), *Teoriya R-funktsiy i nekotorye ee prilozheniya* [Theory of R-functions and its some applications], Naukova dumka, Kiev, USSR.

17. Rvachev, V.L. (1967), *Geometricheskie prilozheniya algebry logiki* [Geometric applications of Boolean],Tekhnika, Kiev, USSR.

18. Lisnyak, A.A. (2010), “Techniques visualization geometric objects, described by the R-functions”, *Visnik Zaporiz'kogo natsional'nogo universitetu: Zbirnik naukovikh statey. Fiziko-matematichni nauki*, no. 1, pp. 88-97.

19. Rvachev, V.L. and Sheyko, T.I. (2001), “Introduction to R-functions”, *Problemy mashinostroeniya*, vol. 4, no. 1-2, pp. 46-58.

20. Rvachev, V.L. (1967), “Research scientists of Ukraine in the field of contact problems of elasticity theory”, *Prikladnaya mekhanika*, vol. 5, pp. 109-116.