

УДК 539.3.519.178:519.688

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ШТАМПА И МНОГОСЛОЙНОГО УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Спица О. Г., ст. преподаватель

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, Запорожье, 69000, Украина*

sog77@mail.ru

В статье описана программная реализация численного анализа контактного взаимодействия абсолютно жесткого штампа и многослойного упругого полупространства с использованием метода конечных элементов. Приведены алгоритмы поиска зон контакта и построения глобальной матрицы жесткости для всей системы взаимодействующих тел. Также рассмотрен пример расчета соответствующей задачи с помощью специально разработанной программы QFEM.

Ключевые слова: контактная задача, многослойное полупространство, метод конечных элементов, штамп, программная реализация.

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ШТАМПА І БАГАТОШАРОВОГО ПРУЖНОГО НАПІВПРОСТОРУ

Спица О. Г., ст. викладач

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, 69000, Україна*

sog77@mail.ru

У статті описана програмна реалізація чисельного аналізу контактної взаємодії абсолютно жорсткого штампа і багатошарового пружного напівпростору з використанням методу скінченних елементів. Наведено алгоритми пошуку зон контакту і побудови глобальної матриці жорсткості для всієї системи взаємодіючих тіл. Також розглянуто приклад розрахунку відповідної задачі за допомогою спеціально розробленої програми QFEM.

Ключові слова: контактна задача, багатошаровий напівпростір, метод скінченних елементів, штамп, програмна реалізація.

NUMERICAL ANALYSIS OF CONTACT INTERACTION STAMP AND MULTILAYER ELASTIC HALF-SPACE

Spitsa O. G., senior lecturer

*Zaporizhzhya National University,
Zhukovskogo str, 66, Zaporozhye, 69000, Ukraine*

sog77@mail.ru

The article describes a software implementation of a numerical analysis of contact interaction of a rigid stamp and multi-layered elastic half-space using the finite element method. Algorithms search contact zones and building the global stiffness matrix of the entire system of interacting bodies. It is also considered an example of the calculation of the corresponding task with the using of a specially developed program QFEM.

Key words: contact problem, multilayer half-space finite element method, a stamp, a software implementation.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема исследования напряженно-деформированного состояния контактно взаимодействующих тел является актуальной задачей современного машиностроения и строительства. Ее сложность обусловила разработку большого количества подходов и методов, используемых для аналитического и численного решения контактных задач. Именно контактными взаимодействиями в первую очередь определяются процессы износа различных машин, механизмов, дорожных покрытий и т.п. Величина контактных давлений является определяющим фактором, вызывающим разрушения конструкций в зоне контакта.

Таким образом, разработка новых моделей, методов и программного обеспечения для исследования напряженно-деформированного состояния контактно-взаимодействующих упругих тел является весьма актуальной задачей в наше время. К наиболее распространенным аналитическим способам решения контактных задач относятся методы вариационных неравенств, парных уравнений, ортогональных функций и т.п. Существенный вклад в развитие методов решения контактного взаимодействия внесли работы В.М. Александрова, Л.А. Галина, В.С. Гудрамовича, Р.Д. Миндлина, С.Г. Михлина, В.И. Моссаковского, А.К. Приварникова, В.Л. Рвачова, И.Я. Штаермана и других авторов [1].

Исследование напряженно-деформируемого состояния многослойных упругих сред имеет большое теоретическое и практическое значение. Модель многослойного основания хорошо отражает свойства довольно широко распространенных объектов: дорожных и аэродромных покрытий, гидротехнических сооружений, фундаментов электростанций и т.п. Поэтому, в машиностроении, строительстве и других смежных областях науки и техники часто возникает задача анализа напряженно-деформированного состояния механических систем, образованных контактно взаимодействующими упругими телами (или штампами) различной конфигурации с многослойными упругими основаниями.

К наиболее распространенным моделям и методам решения такого класса задач относятся исследования интегральных уравнений различных типов, метод ортогональных многочленов, использование функций податливости и т.д. Однако, на практике при решении контактных задач применение численных методов в большинстве случаев, как правило, является более предпочтительным, т.к. они позволяют учесть сложность формы контактирующих объектов, первоначальный зазор между ними, проскальзывание и др. эффекты. Большинство современных численных методов построены на принципе линеаризации разрешающих уравнений и построения различных итерационных процессов их решения. К основным способам численного анализа контактных задач механики относятся методы конечных (МКЭ) и граничных (МГЭ) элементов, а также их различные модификации [2]. На сегодняшний день применение МКЭ для численного анализа контактных задач упругих тел (или штампов) сложной конфигурации с многослойным упругим полупространством изучено не полностью. Поэтому разработка эффективных средств и методов решения таких задач для разного количества слоев и наличия особенностей является актуальной научной проблемой. В данной статье описывается программная реализация МКЭ для решения широкого класса контактных задач с многослойным полупространством QFEM.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Решение задачи контактного взаимодействия системы упругих тел можно свести к минимизации функционала Лагранжа [3]:

$$\Pi = W - A, \quad (1)$$

где $A = \sum_{k=1}^N \left[\int_{\Omega_k} F_i^{\Omega_k} u_i^k d\Omega_k + \int_{S_k} F_i^{S_k} u_i^k dS_k \right]$ – работа объемных и поверхностных сил;

$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega_k$ – потенциальная энергия системы N взаимодействующих тел; σ_{ij} , ε_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций; $F_i^{\Omega_k}$, F_i^S – компоненты векторов заданных объемных и поверхностных сил; u_i – компоненты вектора перемещений; Ω_k – область, занимаемая k -м взаимодействующим телом; S_k – граница области Ω_k .

Возможные перемещения на части поверхности S_k должны удовлетворять кинематическим граничным условиям:

$$u_i^k(\rho) = g_i^k(\rho), \quad \rho \in S_k, \quad (2)$$

где $g_i^k(\rho)$ – заданная функция; ρ – радиус-вектор точек области Ω_k .

Исходя из физического смысла задачи, на поверхности контакта должны выполняться так называемые условия непроникновения, которые можно, например, записать в следующем виде:

$$R_k(\rho_l) \leq 0, \quad k \neq l, \quad \rho_l \in S_l, \quad (3)$$

где R_k – R-функция [4], описывающая k -ое тело; ρ_l – радиус-вектор точек l -го тела (с учетом деформирования).

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ МКЭ

Применение МКЭ сводит исходную задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). В случае решения контактной задачи такая система строится для каждого из взаимодействующих тел. Например, разрешающая система уравнений для тел $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ примет вид:

$$\begin{pmatrix} K_{cc}^{(1)} & K_{cr}^{(1)} \\ K_{rc}^{(1)} & K_{rr}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} v_c^{(1)} \\ v_r^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_c^{(1)} \\ F_r^{(1)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ q \end{Bmatrix}; \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} K_{cc}^{(2)} & K_{cr}^{(2)} \\ K_{rc}^{(2)} & K_{rr}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} v_c^{(2)} \\ v_r^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_c^{(2)} \\ F_r^{(2)} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ q \end{Bmatrix};$$

где $K^{(i)} = \begin{pmatrix} K_{cc}^{(i)} & K_{cr}^{(i)} \\ K_{rc}^{(i)} & K_{rr}^{(i)} \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов (жесткости) i -го тела ($i=1,2$); $\begin{Bmatrix} v_c^{(i)} \\ v_r^{(i)} \end{Bmatrix}$ – вектор узловых перемещений (компоненты $v_r^{(i)}$ – соответствуют точкам, принадлежащим зоне контакта $S = \Omega^{(1)} \cap \Omega^{(2)}$); $\begin{Bmatrix} F_c^{(i)} \\ F_r^{(i)} \end{Bmatrix}$ – вектор приведенной в узлы нагрузки; $\begin{Bmatrix} 0 \\ q \end{Bmatrix}$ – вектор контактных усилий.

Вектор первоначального зазора между взаимодействующими узлами тел $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ можно записать в виде:

$$\{\delta\}^T = \{\delta(a_1), \delta(a_2), \dots, \delta(a_N)\}, \quad (5)$$

где N – количество узлов конечно-элементного разбиения, принадлежащих зоне контакта S ; $\{\delta(a_j)\}^T = \{(x(a_k) - x(a_m)), (y(a_k) - y(a_m)), (z(a_k) - z(a_m))\}$; $k, m = 1, 2, \dots, N$; $a_k \in S^{(1)}$, $a_m \in S^{(2)}$.

Условие непроникновения на границе S в случае двустороннего контакта (при отсутствии зазоров между телами) имеет вид:

$$\{v_r^{(1)}\} - \{v_r^{(2)}\} - \{\delta\} = 0. \quad (6)$$

В случае, если между контактирующими телами в недеформированном состоянии присутствуют первоначальные зазоры, искомый вектор перемещений $\{v\}$ также должен удовлетворять условиям Куна-Таккера:

$$\begin{cases} [E]\{v\} - \{\delta\} \leq 0, \\ \{q\} \leq 0. \end{cases} \quad (7)$$

Непосредственно из (1), можно получить:

$$\begin{aligned} \{v_c^{(1)}\} &= [K_{cc}^{(1)}]^{-1} [F_c^{(1)}] - [K_{cc}^{(1)}]^{-1} [K_{cr}^{(1)}] \{v_r^{(1)}\}, \\ \left([K_{rr}^{(1)}] - [K_{rc}^{(1)}] [K_{cc}^{(1)}]^{-1} [K_{cr}^{(1)}] \right) \{v_r^{(1)}\} &= \{F_r^{(1)}\} - [K_{rc}^{(1)}] [K_{cc}^{(1)}]^{-1} \{F_c^{(1)}\} + \{q\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Если ввести следующие обозначения: $\bar{K}_{rr} = [K_{rr}] - [K_{rc}] [K_{cc}]^{-1} [K_{cr}]$ и $\bar{F}_r = \{F_r\} - [K_{rc}] [K_{cc}]^{-1} \{F_c\}$, то для $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ соответственно можно записать:

$$\begin{cases} [\bar{K}_{rr}^{(1)}] \{v_r^{(1)}\} = \{\bar{F}_r^{(1)}\} + \{q\}, \\ [\bar{K}_{rr}^{(2)}] \{v_r^{(2)}\} = \{\bar{F}_r^{(2)}\} - \{q\}, \\ \{v_r^{(1)}\} - \{v_r^{(2)}\} + \{\delta\} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

После преобразования (9), окончательно получается СЛАУ для нахождения перемещений в области контакта S :

$$\left([\bar{K}_{rr}^{(1)}] + [\bar{K}_{rr}^{(2)}] \right) \{v_r^{(1)}\} = \{\bar{F}_r^{(1)}\} + \{\bar{F}_r^{(2)}\} - [\bar{K}_{rr}^{(2)}] \{\delta\}. \quad (10)$$

Определив из (10) перемещения в области контакта, перемещения в других узлах можно найти из соотношения:

$$\{v_c^{(i)}\} = [K_{cc}^{(i)}]^{-1} [F_c^{(i)}] - [K_{cc}^{(i)}]^{-1} [K_{cr}^{(i)}] \{v_r^{(i)}\}, \quad i = 1, 2. \quad (11)$$

Очевидно, что порядок системы (10) значительно ниже порядка каждой из систем (4), так как она построена только для точек предполагаемой области контакта.

Учет условий (7) осуществляется в направленном переборе ограничений, выполняющихся со знаком строгого равенства, при неотрицательных контактных усилиях. Для этого строится итерационный процесс, на каждом шаге которого решается система уравнений (10) для площадки контакта, полученной на предыдущем шаге, и проверяется условие (7). В этом случае предполагаемая площадка контакта S делится на область сцепления S_r и область отставания S_c . На каждом шаге итерационного процесса, в зависимости от выполнения условия (7), происходит изменение S_r и S_c . Если в a_i -ом узле, принадлежащем S_r , не выполняется условие $q \leq 0$, то контакт в a_i -ом узле нарушается. При этом a_i -ый узел попадает в область S_c . И наоборот, если в a_i -ом узле, принадлежащем S_c , выполняется условие $v_i^{(1)} - v_i^{(2)} + \delta_i > 0$, то a_i -ый узел попадает в область S_r . Итерационный процесс считается законченным, если условие (7) выполняется без изменения границ S_r и S_c , полученных на предыдущем шаге.

При расчете контактных задач с многослойными основаниями, как правило, полагается, что сцепление между слоями жесткое. Однако, применение вышеописанного алгоритма позволяет выполнять расчеты и для одностороннего контакта как между, например, штампом и полупространством, так и между отдельными слоями полупространства.

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ

Для решения контактных задач с многослойными упругими основаниями с использованием МКЭ на языке программирования C++ была разработана программа QFEM, вычислительное ядро которой реализует все этапы решения контактной задачи – от поиска первоначальной зоны контакта между заданной совокупностью двух- или трехмерных объектов, до решения СЛАУ и визуализации полученных численных результатов. В QFEM реализован алгоритм построения списка связей контактирующих узлов для произвольного количества участвующих в расчете контактно взаимодействующих тел. Данный алгоритм базируется на построении графа, вершинами которого является все контактно взаимодействующие тела, а ребрами – наличие зон контакта между ними (рис. 1).

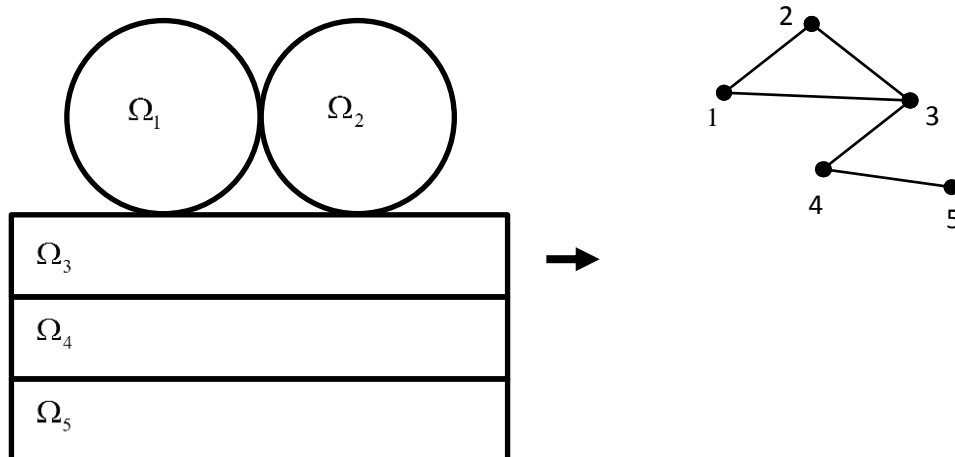


Рис. 1

Алгоритм последовательно перебирает все участвующие в контактном взаимодействии тела, и для каждого из них осуществляется поиск наличия первоначальной площадки контакта со всеми другими объектами. Очевидно, что объекты участвуют в контактном взаимодействии, если у них есть совпадающие участки поверхности или границы (узлы с одинаковыми координатами в конечно-элементном разбиении). При этом учитывается наличие возможного первоначального зазора между контактирующими участками границы объектов.

Для иллюстрации предложенных алгоритмов и их программной реализации рассматривался ряд контактных задач о вдавливании штампа в упругое многослойное полупространство. На рис. 2 приведена визуализация распределения вертикальной составляющей вектора перемещений (v) по системе контактно взаимодействующих тел, состоящей из абсолютно жесткого штампа и трехслойного основания, содержащего шестиугольное отверстие под зоной контакта. Задача решалась в плоской постановке. Визуализация выполнена в режиме усиления перемещений для наглядности анализа результатов.

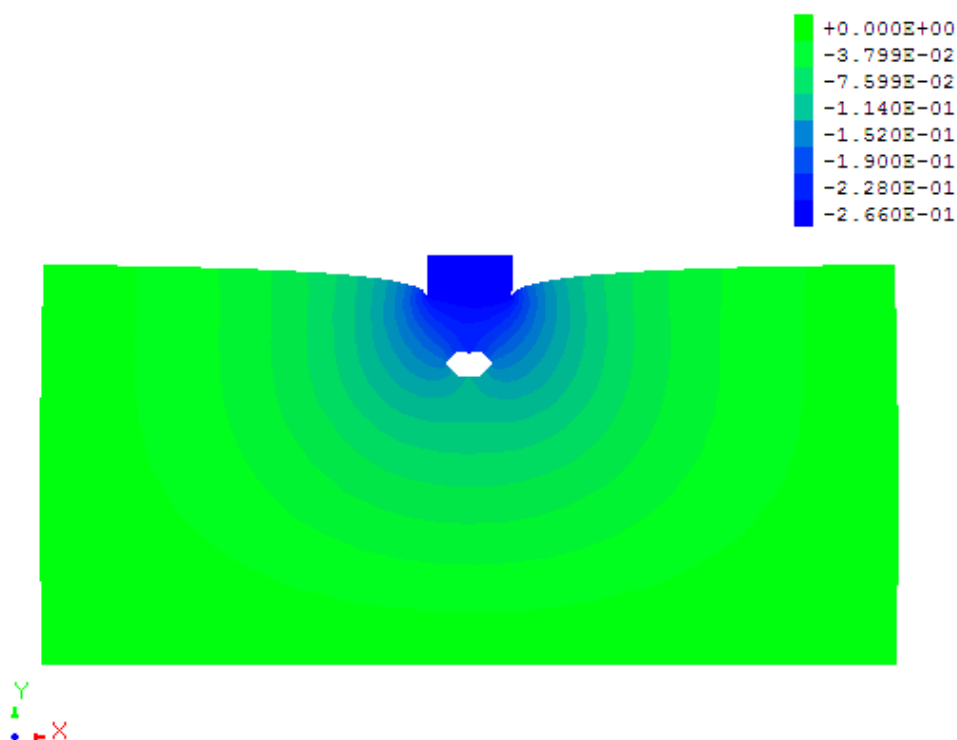


Рис. 2

На рис. 3 приведена визуализация вертикальной составляющей вектора перемещений (w) в задаче о вдавливании штампа с прямоугольным вырезом в упругое пятислойное полупространство. На рисунке хорошо видно площадку контакта, форма которой соответствует физическому смыслу задачи.

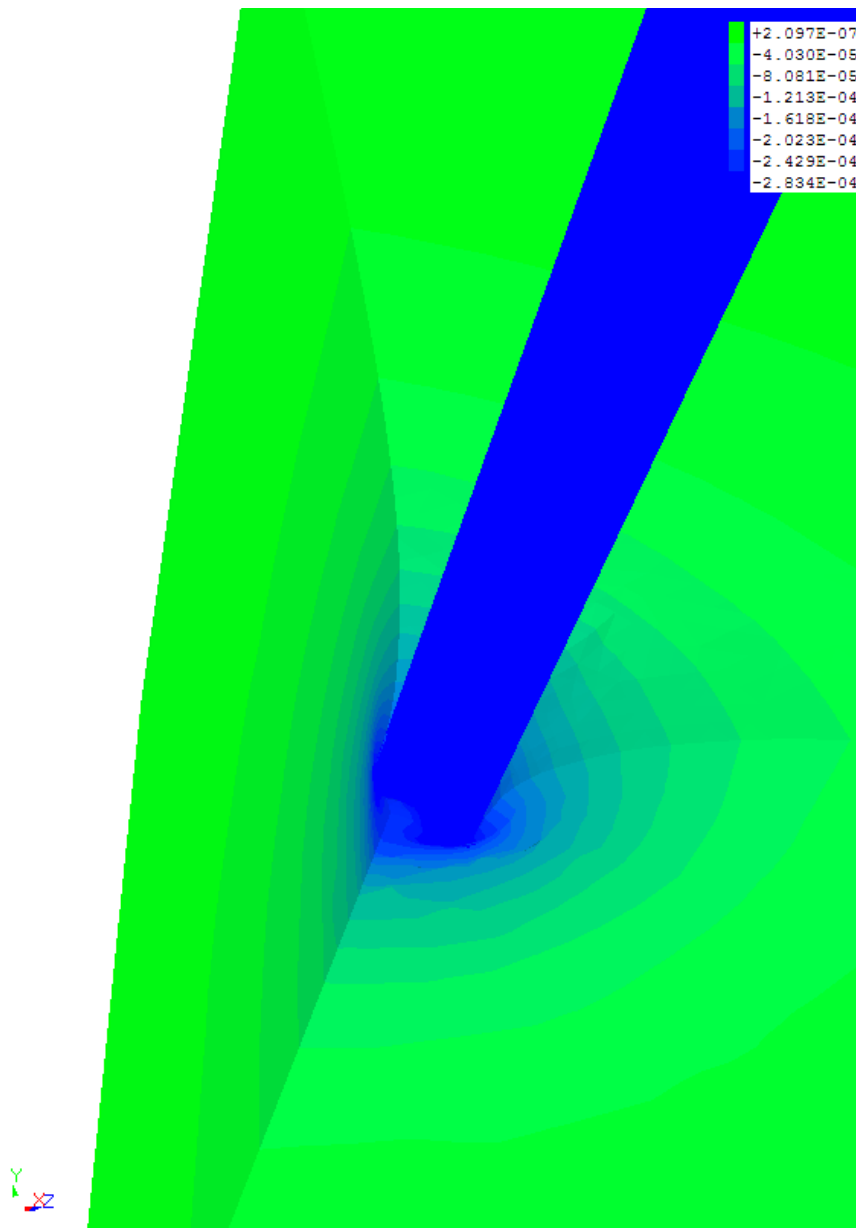


Рис. 3

ВЫВОДЫ

В статье предложена методика численного решения задач контактного взаимодействия штампа и многослойного упругого полупространства с использованием метода конечных элементов, а также описана ее программная реализация, используя которые можно решать широкий класс задач об анализе контактного взаимодействия штампов различной формы и многослойных упругих оснований.

Проведены численные исследования, которые показали эффективность предложенной методики и ее программной реализации. Рассмотрен ряд тестовых задач, решение которых хорошо согласовывается с известными аналитическими решениями, полученными с использованием функций податливости.

Можно утверждать, что описанная в статье методика может применяться не только для решения задач о контактном взаимодействии штампов и упругих оснований, но и для

численного анализа напряженно-деформированного состояния различных систем упругих тел как в случае одностороннего, так и для двустороннего контакта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзикович С. М. Механика контактных взаимодействий / [С.М. Айзикович, В.М. Александров, И.И. Аргатов и др.]. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 672 с.
2. Толок В. А. Метод конечных элементов: теория, алгоритмы, реализация / [В.А. Толок, В.В. Киричевский, С.И. Гоменюк и др.]. – К. : Наук. думка, 2003. – 316 с.
3. Кравчук А. С. Вариационные методы решения контактных задач и их численная реализация / А.С. Кравчук // Изв. АН СССР. МТТ. – 1977. – № 5. – С. 241-247.
4. Моссаковский В. И. Контактные задачи теории оболочек и стержней / В.И. Моссаковский, В.С. Гудрамович, Е.М. Макеев. – М. : Машиностроение, 1978. – 248 с.

REFERENCES

1. Ayzikovich, S.M., Aleksandrov, V.M., Argatov, I.I. and other (2001), *Mehanika kontaktnykh vzaimodeystviy* [Mechanics of contact interaction], FIZMATLIT, Moscow.
2. Tolok, V.A., Kirichevskiy, V.V., Gomenyuk, S.I. and other (2003), *Metod konechnykh elementov: teoriya, algoritmy, realizatsiya* [Finite elements: theory, algorithms, implementation], Nauk. dumka, Kiev.
3. Kravchuk, A.S. (1977), "Variational methods of solution of contact problems and their numerical implementation", *Izv. AN SSSR. MTT*, no. 5, pp. 241-247.
4. Mossakovskiy, V.I., Gudramovich, V.S. and Makeev, E.M. (1978), *Kontaknyie zadachi teorii obolochek i sterzhney* [Contact problems in the theory of shells and rods], Mashinostroenie, Moscow.

УДК 539.3

ЗАДАЧА О КОНТАКТЕ УПРУГИХ ТЕЛ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

Стреляев Ю. М., старший преподаватель

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, Запорожье, 69600, Украина*

strelkiny@gmail.ru

Рассмотрена квазистатическая пространственная контактная задача о взаимодействии двух линейно-упругих тел с учетом кулонова трения. В постановке задачи были использованы граничные условия с модифицированным законом трения Кулона. Для решения дискретного аналога нелинейного операторного уравнения задачи построены сходящиеся итерационные процессы. Получено численное решение контактной задачи о взаимодействии упругого шара с упругим полупространством при последовательном действии на шар сжимающей и сдвигающих сил. Результаты были сопоставлены с известным численным решением этой задачи.
Ключевые слова: контактная задача, упругое тело, трение Кулона, история нагружения, операторное уравнение, итерационный метод.

ЗАДАЧА ПРО КОНТАКТ ПРУЖНИХ ТІЛ З УРАХУВАННЯМ ТЕРТЯ ПРИ СКЛАДНОМУ НАВАНТАЖУВАННІ

Стреляев Ю. М., старший викладач

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, 69600, Україна*

strelkiny@gmail.ru

Розглянуто квазистатичну просторову контактну задачу про взаємодію двох лінійно-пружних тіл з урахуванням тертя Кулона. У постановці задачі були використані межові умови з модифікованим законом тертя Кулона. Для розв'язання дискретного аналогу нелінійного операторного рівняння задачі побудовані збіжні ітераційні