

численного анализа напряженно-деформированного состояния различных систем упругих тел как в случае одностороннего, так и для двустороннего контакта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзикович С. М. Механика контактных взаимодействий / [С.М. Айзикович, В.М. Александров, И.И. Аргатов и др.]. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 672 с.
2. Толлок В. А. Метод конечных элементов: теория, алгоритмы, реализация / [В.А. Толлок, В.В. Киричевский, С.И. Гоменюк и др.]. – К. : Наук. думка, 2003. – 316 с.
3. Кравчук А. С. Вариационные методы решения контактных задач и их численная реализация / А.С. Кравчук // Изв. АН СССР. МТТ. – 1977. – № 5. – С. 241-247.
4. Моссаковский В. И. Контактные задачи теории оболочек и стержней / В.И. Моссаковский, В.С. Гудрамович, Е.М. Макеев. – М. : Машиностроение, 1978. – 248 с.

REFERENCES

1. Ayzikovich, S.M., Aleksandrov, V.M., Argatov, I.I. and other (2001), *Mehanika kontaktnykh vzaimodeystviy* [Mechanics of contact interaction], FIZMATLIT, Moscow.
2. Tolok, V.A., Kirichevskiy, V.V., Gomenyuk, S.I. and other (2003), *Metod konechnykh elementov: teoriya, algoritmy, realizatsiya* [Finite elements: theory, algorithms, implementation], Nauk. dumka, Kiev.
3. Kravchuk, A.S. (1977), "Variational methods of solution of contact problems and their numerical implementation", *Izv. AN SSSR. MTT*, no. 5, pp. 241-247.
4. Mossakovskiy, V.I., Gudramovich, V.S. and Makeev, E.M. (1978), *Kontaknyie zadachi teorii obolochek i sterzheney* [Contact problems in the theory of shells and rods], Mashinostroenie, Moscow.

УДК 539.3

ЗАДАЧА О КОНТАКТЕ УПРУГИХ ТЕЛ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

Стреляев Ю. М., старший преподаватель

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, Запорожье, 69600, Украина*

strelkiny@gmail.ru

Рассмотрена квазистатическая пространственная контактная задача о взаимодействии двух линейно-упругих тел с учетом кулонова трения. В постановке задачи были использованы граничные условия с модифицированным законом трения Кулона. Для решения дискретного аналога нелинейного операторного уравнения задачи построены сходящиеся итерационные процессы. Получено численное решение контактной задачи о взаимодействии упругого шара с упругим полупространством при последовательном действии на шар сжимающей и сдвигающих сил. Результаты были сопоставлены с известным численным решением этой задачи.
Ключевые слова: контактная задача, упругое тело, трение Кулона, история нагружения, операторное уравнение, итерационный метод.

ЗАДАЧА ПРО КОНТАКТ ПРУЖНИХ ТІЛ З УРАХУВАННЯМ ТЕРТЯ ПРИ СКЛАДНОМУ НАВАНТАЖУВАННІ

Стреляев Ю. М., старший викладач

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, 69600, Україна*

strelkiny@gmail.ru

Розглянуто квазистатичну просторову контактну задачу про взаємодію двох лінійно-пружних тіл з урахуванням тертя Кулона. У постановці задачі були використані межові умови з модифікованим законом тертя Кулона. Для розв'язання дискретного аналогу нелінійного операторного рівняння задачі побудовані збіжні ітераційні

процеси. Отримано чисельний розв'язок контактної задачі про взаємодію пружної кулі з пружним півпростором при послідовній дії на кулю стискаючої та зсуваючих сил. Результати були співставленні з відомим чисельним розв'язком цієї задачі.

Ключові слова: контактна задача, пружне тіло, тертя Кулона, історія навантажування, операторне рівняння, ітераційний метод.

THE PROBLEM OF ELASTIC BODIES FRICTIONAL CONTACT WITH COMPLEX LOADING

Streliaiev Y. M., senior lecturer

*Zaporizhzhya National University,
Zhukovskogo str, 66, Zaporozhye, 69600, Ukraine*

strelkiny@gmail.ru

The quasistatic three-dimensional contact problem of interaction of two linearly elastic non-conforming bodies taking into account Coulomb friction with complex loading is considered. In the problem statement it was supposed that geometrical surfaces of bodies in each point have a tangent plane, bodies allow approximation by elastic half-spaces and operators of influence of surface tractions on elastic surface displacements are known from Boussinesq-Cerruti's solution. Boundary conditions of contact interaction were expressed by system of equations and inequalities for points of some area of the bodies' common tangent plane containing area of contact unknown in advance. The numerical algorithm which distinctive feature is the modification of boundary conditions that allows using the iterative processes with the guaranteed convergence was used. This numerical algorithm allowed taking into account partial adhesion and slipping on contact surfaces and history of the external loading. The modified boundary conditions on each step of quasistatic process were obtained by introduction of contact pressure delay in Coulomb's friction law. The modification of boundary conditions allowed to reduce the problem to a series of the nonlinear second kind operator equations with contraction operators in the right parts. Convergent iterative processes, based on the simple iteration method and Seidel method, were constructed for approximate solution of these operator equations. The numerical solution of a contact problem of an elastic sphere and elastic half-space interaction under the step-by-step action of normal and tangential forces has been obtained. Distributions of normal and tangent contact tractions in points of contact area were obtained. The shape and size of sticking region and slip zone were found. The results were compared with the known numerical solution of this problem in non-modified statement.

Key words: contact problem, elastic body, Coulomb friction, loading history, operator equation, iterative method.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование на прочность сложных механических систем часто связано с необходимостью решать задачу определения нормальных и касательных составляющих удельной контактной нагрузки, возникающей во взаимодействующих элементах этих систем [1]. При решении контактных задач о взаимодействии упругих тел с учетом трения обычно используется закон трения Кулона или его модификации. Подобные задачи можно рассматривать в статической и квазистатической постановке. Статическая постановка задачи позволяет учитывать трение только при существенных ограничениях, связанных с необходимостью формулировать закон Кулона в перемещениях, без учета скоростей взаимного проскальзывания тел. Такая формулировка закона Кулона часто приводит к значительным искажениям решений. В квазистатической постановке задачи учитываются скорости взаимного проскальзывания тел, что позволяет получать более точные результаты в большинстве задач данного типа. Основные сложности, встречающиеся в контактных задачах с учетом трения, связаны с тем, что возникающие в результате взаимодействия тел поверхность контакта, зоны сцепления и проскальзывания заранее не известны. Эти обстоятельства существенно затрудняют поиск аналитических решений таких задач, что приводит к попыткам использовать для их решения различные численные методы.

Наиболее эффективными численными методами, применяемыми в настоящее время для приближенного решения контактных задач теории упругости с учётом трения, являются методы, основанные на вариационной постановке задачи [2-6] и на её сведении к различным операторным уравнениям [7-12]. Основная трудность реализации вариационных методов связана с необходимостью решения сложных задач нелинейного программирования [4-6]. Использование операторных уравнений для моделирования контактного взаимодействия упругих тел, устраняет эту трудность и позволяет использовать современные достижения нелинейного функционального анализа и теории операторов для разработки эффективных

итерационных процедур [11, 12] отыскания приближённых решений соответствующих контактных задач. В большинстве случаев использования нелинейных граничных интегральных уравнений в контактной механике [7-10] рассматриваются контактные задачи без учёта трения [7, 8], либо задачи, в которых учёт трения осуществляется при упрощённых граничных условиях, соответствующих полному проскальзыванию тел [9, 10]. Метод нелинейных граничных интегральных уравнений, предложенный в работе [11], позволяет учитывать частичное сцепление и проскальзывание на поверхности контакта, а также историю приложения внешней нагрузки. Однако при использовании таких уравнений трудно доказать сходимость итерационных процессов, используемых для нахождения приближенного решения дискретного аналога этих уравнений. Для устранения этой трудности, в работе [12] предложен алгоритм, основанный на упрощении традиционной постановки контактной задачи, в результате чего удается свести эту задачу к решению серии операторных уравнений второго рода со сжимающими операторами в правых частях. Такое свойство полученных уравнений позволяет обосновать сходимость последовательных приближений к их решениям и способствует получению численного решения рассматриваемой контактной задачи с достаточной точностью. Целью данной работы является применение алгоритма, предложенного в работе [12], к решению контактной задачи при условиях сложного нагружения с учетом трения и истории приложения внешней нагрузки.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим пространственную задачу о контактном взаимодействии двух линейно упругих тел в квазистатической постановке [11, 12]. Будем предполагать, что для взаимодействующих тел выполняются следующие условия:

- 1) тела линейно-упругие, изотропные;
- 2) геометрическая поверхность каждого тела такова, что любая точка этой поверхности, расположенная в зоне возможного контакта, является регулярной (в этой точке существует единственная касательная плоскость к поверхности);
- 3) упругие перемещения взаимодействующих тел малы по сравнению с размерами поверхности контакта;
- 4) тела допускают аппроксимацию упругими полупространствами;
- 5) известны операторы влияния поверхностных напряжений на упругие поверхностные перемещения;
- 6) процесс взаимодействия тел сопровождается поверхностным трением, подчиняющимся закону трения Кулона.

Квазистатическая постановка задачи предполагает, что процесс нагружения тел происходит медленно и может быть представлен последовательностью равновесных состояний тел на различных шагах нагружения [11]. Инерционные и волновые эффекты при этом не учитываются. Граничные условия взаимодействия тел на каждом i -ом шаге нагружения задаются следующей системой соотношений [11]:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{1i}(s) \geq 0; \quad F_1(p_i, \Delta_{1i})_s \geq 0; \quad p_{1i}(s) \cdot F_1(p_i, \Delta_{1i})_s = 0; \\ \sqrt{p_{2i}^2(s) + p_{3i}^2(s)} \leq \mu \cdot p_{1i}(s); \\ \sqrt{F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s} \cdot p_{2i}(s) + \mu \cdot p_{1i}(s) \cdot F_2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s = 0; \\ \sqrt{F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s} \cdot p_{3i}(s) + \mu \cdot p_{1i}(s) \cdot F_3(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s = 0; \\ s \in \Omega; \quad i = \overline{1, n}; \end{array} \right. \quad (1)$$

где Ω – ограниченная плоская область, содержащая в себе неизвестную заранее площадку контакта; $p_i(s) = (p_{1i}(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s))$ – неизвестная вектор-функция, отыскиваемая в

пространстве $L_2^3(\Omega)$ [11] и задающая распределение удельных нормальной и касательных контактных нагрузок, передаваемых от нижнего тела к верхнему телу через точки области Ω на i -ом шаге нагружения; Δ_{1i} , Δ_{2i} , Δ_{3i} – компоненты вектора жесткого смещения верхнего тела относительно нижнего на i -ом шаге нагружения; положительная константа μ – коэффициент трения. Здесь и далее индексы 1, 2 и 3 соответствуют направлениям осей z , x и y прямоугольной системы координат zxy , начало которой совпадает с точкой первоначального касания тел, а ось z направлена внутрь верхнего тела (оси x и y расположены в общей для тел касательной плоскости). Выражения $F_1(p_i, \Delta_{1i})$, $F_2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})$, $F_3(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})$ в системе (1) определяются следующими соотношениями [11]:

$$\begin{cases} F_1(p_i, \Delta_{1i})_s = \sum_{j=1}^3 A_{1j}(p_{ji})_s + \delta_0(s) + \Delta_{1i}; \\ F_2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s = \sum_{j=1}^3 A_{2j}(p_{ji})_s + \tilde{\Delta}_{2i}(s); \\ F_3(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s = \sum_{j=1}^3 A_{3j}(p_{ji})_s + \tilde{\Delta}_{3i}(s); \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{где } \tilde{\Delta}_{2i}(s) = \Delta_{2i} - \sum_{j=1}^3 A_{2j}(p_{ji-1})_s - \Delta_{2i-1}, \quad \tilde{\Delta}_{3i}(s) = \Delta_{3i} - \sum_{j=1}^3 A_{3j}(p_{ji-1})_s - \Delta_{3i-1}.$$

В соотношениях (2) функция $\delta_0(s)$ является элементом пространства $L_2(\Omega)$ [13] и задает начальный зазор между телами, а линейные операторы $A_{kj}: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ являются операторами влияния удельных поверхностных нагрузок на поверхностные перемещения. Отметим, что в равенствах (2) выражение $F_1(p_i, \Delta_{1i})$ определяет нормальные перемещения точек поверхности верхнего тела относительно противоположных поверхностных точек нижнего тела, а $F_2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})$, $F_3(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})$ задают приращения, полученные относительными касательными перемещениями тех же точек при переходе от $(i-1)$ -го к i -ому шагу нагружения.

В работе [12] было предложено вместо системы соотношений (1) на i -ом шаге нагружения использовать следующий упрощенный аналог этой системы:

$$\begin{cases} p_{1i}(s) \geq 0; F_1(p_i, \Delta_{1i})_s \geq 0; p_{1i}(s) \cdot F_1(p_i, \Delta_{1i})_s = 0; \\ \sqrt{p_{2i}^2(s) + p_{3i}^2(s)} \leq \mu \cdot p_{1i-1}(s); \\ \sqrt{F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s} \cdot p_{2i}(s) + \mu \cdot p_{1i-1}(s) \cdot F_2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s = 0; \\ \sqrt{F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s} \cdot p_{3i}(s) + \mu \cdot p_{1i-1}(s) \cdot F_3(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s = 0; \\ s \in \Omega; i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (3)$$

Условия (3) получены из системы (1) путем замены функции $p_{1i}(s)$ в последних трех её соотношениях на функцию $p_{1i-1}(s)$. Такая замена означает введение запаздывания в контактных давлениях, ограничивающих модуль удельной касательной контактной нагрузки [12]. Таким образом, рассматриваемая контактная задача на i -ом шаге нагружения сводится к определению неизвестных функций $p_{1i}(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s) \in L_2(\Omega)$, которые почти всюду на Ω удовлетворяют соотношениям (3). При этом предполагается, что входящие в (3) выражения $F_1(p_i, \Delta_{1i})$, $F_2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})$, $F_3(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})$ определяются в соответствии с равенствами (2). Отметим, что на i -ом шаге нагружения давление $p_{1i-1}(s)$ является известной функцией, которая найдена из решения системы соотношений, аналогичной (3), на $(i-1)$ -ом шаге

нагружения. Окончательным решением рассматриваемой квазистатической контактной задачи являются функции $p_{1n}(s)$, $p_{2n}(s)$, $p_{3n}(s)$, найденные на последнем n -ом шаге нагружения. После получения этого решения можно пятно контакта Ω_0 , а также зоны сцепления Ω_C и проскальзывания Ω_{Π} , определить из следующих соотношений:

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= \left\{ s \in \Omega \mid F_1(p_n, \Delta_{1n})_s = 0 \right\}, \\ \Omega_C &= \left\{ s \in \Omega_0 \mid F_2^2(p_n, \tilde{\Delta}_{2n})_s + F_3^2(p_n, \tilde{\Delta}_{3n})_s = 0 \right\}, \\ \Omega_{\Pi} &= \left\{ s \in \Omega_0 \mid F_2^2(p_n, \tilde{\Delta}_{2n})_s + F_3^2(p_n, \tilde{\Delta}_{3n})_s > 0 \right\}.\end{aligned}$$

2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

Запишем систему соотношений (3) в виде операторного уравнения [12]

$$p_i = G_{\mu p_{i-1}}(p_i - E \cdot (A(p_i) - \tilde{f}_i)), \quad (4)$$

в котором $\tilde{f}_i = (-\delta_0(s) - \Delta_{1i}, -\tilde{\Delta}_{2i}(s), -\tilde{\Delta}_{3i}(s))$, E – произвольная положительная константа, μ – коэффициент трения, а неотрицательная функция $\mu \cdot p_{i-1}(s)$ является известной.

Непрерывный нелинейный оператор $G_{\mu p_i} : L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$, задается равенствами

$$\begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in L_2^3(\Omega); y = G_{\mu p_i}(x), \\ y_1(s) = h(x_1(s)), \\ y_2(s) = q(x_2(s), x_3(s), \mu p_1(s)), \\ y_3(s) = q(x_3(s), x_2(s), \mu p_1(s)), \quad s \in \Omega; \end{cases}$$

в которых $p_1(s) \in L_2(\Omega)$ есть заданная, почти всюду на Ω неотрицательная функция, а функции $h(x)$ и $q(x, y, z)$ определяются соотношениями:

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ 0, & \text{если } x < 0; \end{cases} \quad q(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{если } \sqrt{x^2 + y^2} \leq z; \\ x \cdot \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{если } \sqrt{x^2 + y^2} > z. \end{cases}$$

Линейный ограниченный оператор влияния $A : L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$ задается системой равенств

$$\begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in L_2^3(\Omega); \\ y = A(x), y_k = \sum_{j=1}^3 A_{kj}(x_j) \quad \forall k = \overline{1,3}. \end{cases} \quad (5)$$

В большинстве важных для практики случаев, входящие в соотношения (5) линейные ограниченные операторы $A_{kj} : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$, допускают интегральное представление

$$A_{kj}(x)_s = \int_{\Omega} K_{kj}(s, s') \cdot x(s') ds', \quad (k, j = \overline{1,3}).$$

Метод численного решения операторного уравнения (4), детально изложенный в работе [12], состоит в дискретизации этого уравнения и использовании итерационных процессов для получения решения его дискретного аналога. Зададим область Ω в виде открытого квадрата со сторонами, параллельными осям x, y . Разобьем эту область на l одинаковых квадратов $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l$, ориентированных подобно квадрату Ω . Будем считать, что при каждом фиксированном значении i на каждом квадрате ω_k неизвестные функции

$p_{1i}(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s)$ принимают постоянные значения $x_{3k-2i}, x_{3k-1i}, x_{3ki}$. Тогда дискретный аналог операторного уравнения (4) можно получить в виде системы $3l$ нелинейных уравнений с $3l$ неизвестными числовыми параметрами $x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{3li}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{3k-2i} = h \left(x_{3k-2i} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3l} a_{3k-2j} \cdot x_{ji} - b_{3k-2i} \right) \right); \\ x_{3k-1i} = q \left(x_{3k-1i} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3l} a_{3k-1j} \cdot x_{ji} - b_{3k-1i} \right), \right. \\ \quad \left. x_{3ki} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3l} a_{3kj} \cdot x_{ji} - b_{3ki} \right), c_{ki} \right); \\ x_{3ki} = q \left(x_{3ki} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3l} a_{3kj} \cdot x_{ji} - b_{3ki} \right), \right. \\ \quad \left. x_{3k-1i} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3l} a_{3k-1j} \cdot x_{ji} - b_{3k-1i} \right), c_{ki} \right); k = \overline{1, l}. \end{array} \right. \quad (6)$$

В этой системе числовые параметры a_{kj} являются элементами матрицы податливости системы взаимодействующих тел, а b_{ki} определяют условия нагружения и конфигурацию взаимодействующих тел на i -ом шаге нагружения [11,12]. В уравнениях (6) неотрицательные постоянные c_{ki} задаются равенствами $c_{ki} = \mu \cdot x_{3k-2i-1}$, в которых μ – коэффициент трения, а значения $x_{3k-2i-1}$ контактных давлений на $(i-1)$ -ом шаге нагружения считаются известными. Аппроксимируя взаимодействующие тела упругими полупространствами [1], будем полагать, что матрица податливости $A_0 = \{a_{kj}\}$, $k, j = \overline{1, 3l}$ является симметрической и положительно определённой [14]. Это обстоятельство позволяет использовать для приближенного решения системы уравнений (6) на i -ом шаге нагружения сходящийся итерационный процесс, основанный на методе простой итерации:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_{1i}^{(0)}, x_{2i}^{(0)}, \dots, x_{3li}^{(0)}) \in R^{3l}, \quad k = \overline{1, l}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \\ x_{3k-2i}^{(m+1)} = h \left(x_{3k-2i}^{(m)} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3l} a_{3k-2j} x_{ji}^{(m)} - b_{3k-2i} \right) \right); \\ x_{3k-1i}^{(m+1)} = q \left(x_{3k-1i}^{(m)} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3l} a_{3k-1j} x_{ji}^{(m)} - b_{3k-1i} \right), x_{3ki}^{(m)} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3l} a_{3kj} x_{ji}^{(m)} - b_{3ki} \right), c_{ki} \right); \\ x_{3ki}^{(m+1)} = q \left(x_{3ki}^{(m)} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3l} a_{3kj} x_{ji}^{(m)} - b_{3ki} \right), x_{3k-1i}^{(m)} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3l} a_{3k-1j} x_{ji}^{(m)} - b_{3k-1i} \right), c_{ki} \right). \end{array} \right. \quad (7)$$

В работе [12] доказано, что сходимость итерационного процесса (7) имеет место независимо от выбора начального приближения $(x_{1i}^{(0)}, x_{2i}^{(0)}, \dots, x_{3li}^{(0)})$ в $3l$ -мерном евклидовом пространстве R^{3l} [13] при условии, что матрица A_0 является симметрической и положительно определённой, а входящая в соотношения (7) положительная константа E удовлетворяет неравенству

$$E < \frac{1}{\max_{1 \leq k \leq 3l} \left(\sum_{j=1}^{3l} |a_{kj}| \right)}.$$

Для приближенного решения системы уравнений (6) можно также использовать итерационный процесс, построенный по аналогии с процессом Зейделя для решения системы линейных алгебраических уравнений. Для построения такого итерационного процесса положим в каждом k -ом уравнении системы (6) значение входящей в него положительной константы E , равным E_k , и зададим все значения E_k следующим образом:

$$E_{3k-2} = \frac{1}{a_{3k-2 \ 3k-2}}, \quad E_{3k-1} = \frac{1}{a_{3k-1 \ 3k-1}}, \quad E_{3k} = \frac{1}{a_{3k \ 3k}} \quad \forall k = \overline{1, l}.$$

Тогда в правой части каждого k -ого уравнения системы (6) будет отсутствовать неизвестное x_k и для решения этой системы можно предложить итерационный процесс

$$\begin{cases} (x_{1i}^{(0)}, x_{2i}^{(0)}, \dots, x_{3li}^{(0)}) \in R^{3l}, \\ x_{3k-2i}^{(m+1)} = h(\gamma_{ki}^{(m)}), \\ x_{3k-1i}^{(m+1)} = q(\alpha_{ki}^{(m)}, \beta_{ki}^{(m)}, c_{ki}), \\ x_{3ki}^{(m+1)} = q(\beta_{ki}^{(m)}, \alpha_{ki}^{(m)}, c_{ki}), \quad k = \overline{1, l}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (8)$$

где $(x_{1i}^{(0)}, x_{2i}^{(0)}, \dots, x_{3li}^{(0)})$ – начальный вектор, а величины $\gamma_{ki}^{(m)}, \alpha_{ki}^{(m)}, \beta_{ki}^{(m)}$ определяются равенствами:

$$\begin{cases} \gamma_{ki}^{(m)} = E_{3k-2} \cdot \left(-\sum_{j=1}^{3k-3} a_{3k-2j} \cdot x_{ji}^{(m+1)} - \sum_{j=3k-1}^{3l} a_{3k-2j} \cdot x_{ji}^{(m)} + b_{3k-2i} \right), \\ \alpha_{ki}^{(m)} = E_{3k-1} \cdot \left(-\sum_{j=1}^{3k-2} a_{3k-1j} \cdot x_{ji}^{(m+1)} - \sum_{j=3k}^{3l} a_{3k-1j} \cdot x_{ji}^{(m)} + b_{3k-1i} \right), \\ \beta_{ki}^{(m)} = E_{3k} \cdot \left(-\sum_{j=1}^{3k-1} a_{3kj} \cdot x_{ji}^{(m+1)} - \sum_{j=3k+1}^{3l} a_{3kj} \cdot x_{ji}^{(m)} + b_{3ki} \right). \end{cases} \quad (9)$$

Очевидно, что итерационный процесс (8)-(9) может сходиться в пространстве R^{3l} лишь к такому вектору этого пространства, который является решением системы уравнений (6).

Следует отметить, что в качестве начального вектора $(x_{1i}^{(0)}, x_{2i}^{(0)}, \dots, x_{3li}^{(0)})$ в итерационных процессах (7) и (8)-(9) естественно выбирать приближённое решение системы (6), на $(i-1)$ -м шаге нагружения.

3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Предложенным методом было получено численное решение пространственной квазистатической контактной задачи о взаимодействии упругого шара радиуса 0,3м с упругим полупространством. Процесс нагружения тел был осуществлён за 240 шагов в соответствии со следующим характером изменения жёстких смещений $\Delta_{1i}, \Delta_{2i}, \Delta_{3i}$ шара, выраженных в метрах:

$$\Delta_{1i} = \begin{cases} 0, & \text{если } 1 \leq i \leq 80; \\ -\frac{0,000007 \cdot i}{8}, & \text{если } 81 \leq i \leq 160; \\ -0,00007, & \text{если } 161 \leq i \leq 240; \end{cases} \quad \Delta_{2i} = \begin{cases} 0, & \text{если } 1 \leq i \leq 80; \\ -\frac{0,0000007 \cdot (i-80)}{16}, & \text{если } 81 \leq i \leq 160; \\ -0,0000035, & \text{если } 161 \leq i \leq 240; \end{cases}$$

$$\Delta_{3i} = \begin{cases} 0, & \text{если } 1 \leq i \leq 160; \\ \frac{0,0000007 \cdot (i-160)}{16}, & \text{если } 161 \leq i \leq 240. \end{cases}$$

Такая история нагружения соответствует первоначальному нормальному внедрению шара на $0,00007\text{ м}$ в упругое полупространство ($1 \leq i \leq 80$) с последующими поочередными сдвигами на $0,0000035\text{ м}$, внедренного в полупространство шара, в направлении оси x ($81 \leq i \leq 160$) и оси y ($161 \leq i \leq 240$). Модули Юнга E_1 , E_2 и коэффициенты Пуассона ν_1 , ν_2 шара и полупространства задавались следующими значениями: $E_1 = 3 \cdot 10^5\text{ МПа}$, $E_2 = 10^5\text{ МПа}$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,2$. Коэффициент трения $\mu = 0,12375$.

Численные результаты были получены с использованием поверхностной сетки с шагом $0,00025\text{ м}$, содержащей $41 \times 41 = 1681$ квадратных граничных элементов одинаковой площади. Для вычисления элементов a_{kj} матрицы податливости использовались соотношения, приведенные в работе [11], в которых ядра интегральных операторов задавались при помощи формул Буссинеска-Черутти [1]. Распределение удельной контактной нагрузки по граничным элементам сетки было найдено при помощи итерационного процесса (8)-(9). Результаты численного решения контактной задачи на восьмидесятом, сто шестидесятом и двести сороковом шагах нагружения были сопоставлены с численными результатами, полученными при решении той же задачи в точной постановке [11] (использовались те же параметры сетки и та же история нагружения). На рис. 1 приведено распределение касательных напряжений τ_{zx} , действующих в точках поверхности шара, соприкасающихся с полупространством по оси x , соответствующие восьмидесятому (рис. 1, а)), сто шестидесятому (рис. 1, б)) и двести сороковому (рис. 1, в)) шагу нагружения (напряжения τ_{zx} в МПа; координата x в метрах). Здесь сплошная линия соответствует численному решению задачи в точной постановке [11], кружочки – численному решению задачи, полученному с помощью итерационного процесса (8)-(9) при модифицированных граничных условиях (3).

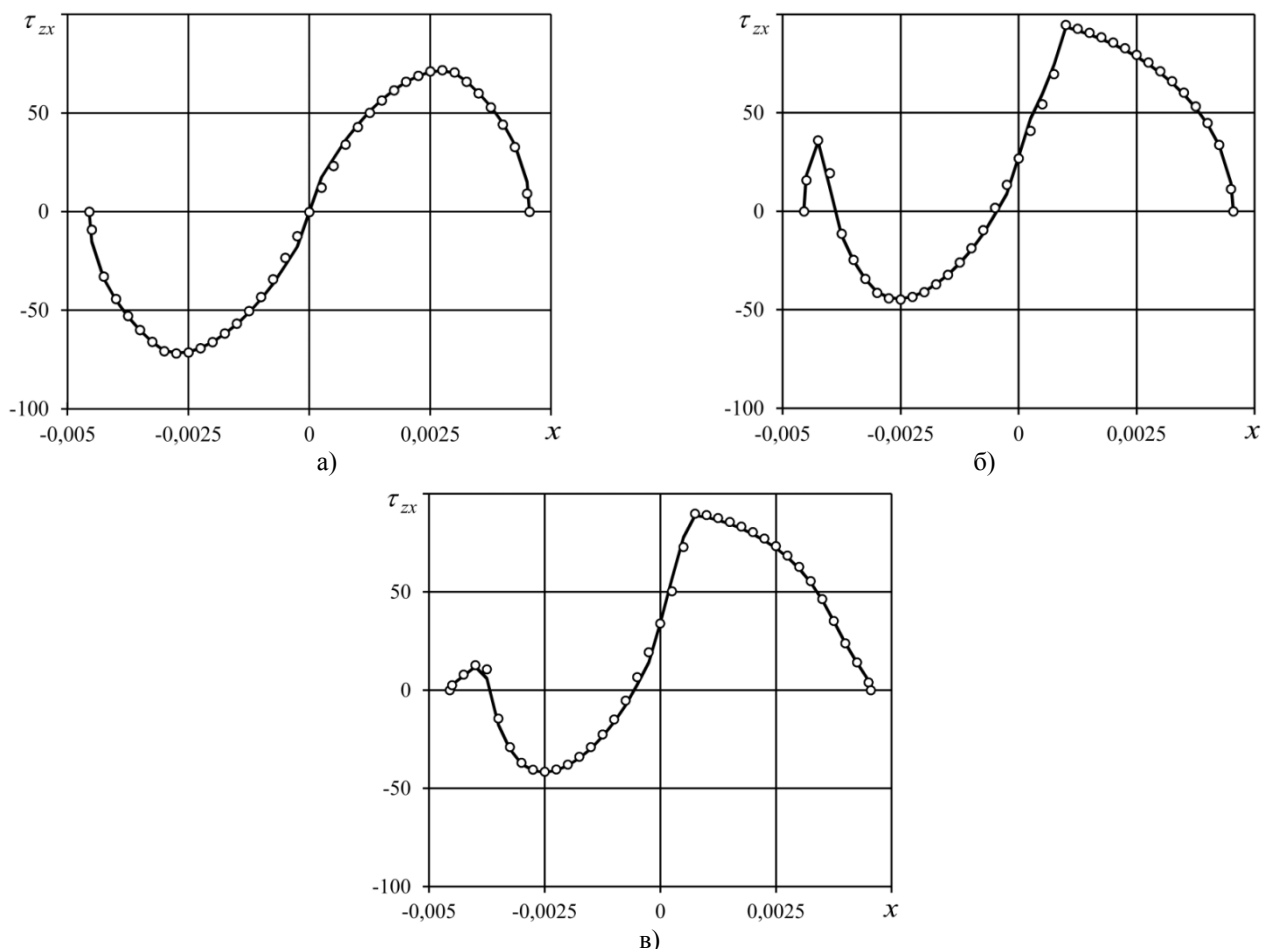


Рис. 1. Графики зависимости удельной касательной нагрузки τ_{zx} [МПа] от расстояния x [м]:
(а) – нормальное внедрение шара, (б) – сдвиг вдоль оси x , (в) – сдвиг вдоль оси y

Результаты, приведенные на рисунке 1, свидетельствуют о том, что полученные численные решения контактной задачи в точной и модифицированной постановках отличаются незначительно. В абсолютном большинстве узлов (центров граничных элементов) поверхностной сетки относительное расхождение полученных решений не превосходило 2% по отношению к наибольшим значениям модулей τ_{zx} , найденных согласно [11]. Максимальная относительная погрешность, достигающая 8%, имела место в отдельных узлах сетки, расположенных в центральной части контактного пятна (рис. 1, а-в)) и вблизи его границы (рис. 1, а)). Такое увеличение погрешности, по-видимому, можно объяснить, во-первых, высоким значением градиента распределения касательных напряжений на краях контактного пятна, во-вторых, очень высокой скоростью возрастания площади контактного пятна в начальной фазе процесса нагружения, по сравнению с последующими фазами.

На рисунках 2, а), 2, б) и 2, в) показаны конфигурации контактных пятен и зон сцепления в моменты времени, соответствующие рисункам 1, а), 1, б) и 1, в). Здесь сплошная линия соответствует решению задачи в точной постановке [11], а пунктирная линия с кружочками – полученному численному решению. Большой из двух контуров на рисунках 2, а)-2, в) изображает границу контактного пятна, а меньший – границу зоны сцепления (сама зона сцепления является внутренностью меньшего контура).

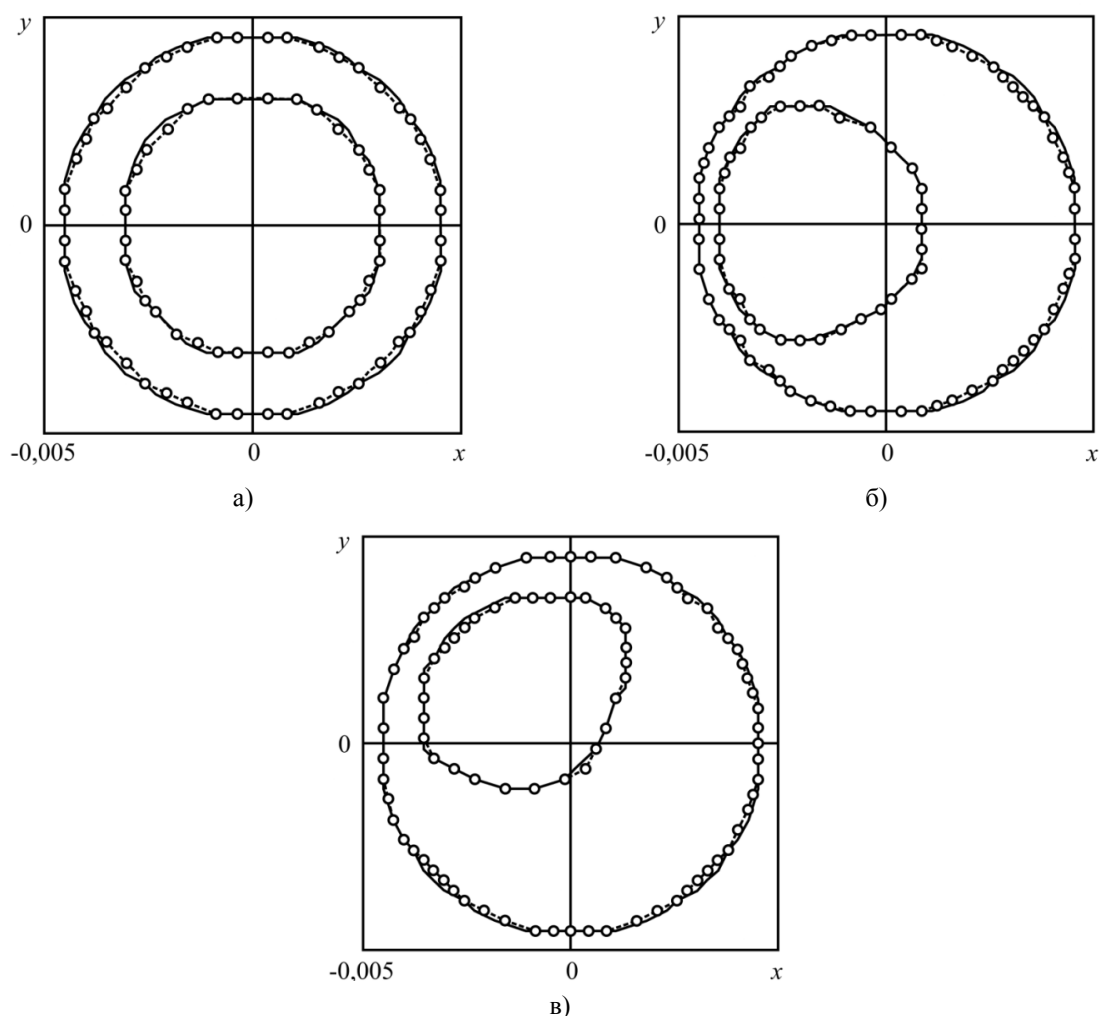


Рис. 2. Границы областей контакта и зон сцепления:
(а) – нормальное внедрение шара, (б) – сдвиг вдоль оси x , (в) – сдвиг вдоль оси y

Представленные на рис.2 результаты свидетельствуют о том, что за весь период действия на шар сдвигающих сил пятно контакта практически не изменяется в процессе нагружения и имеет форму, близкую к круговой. Кроме того, при действии на шар сдвигающих сил зона сцепления, уменьшаясь по площади, теряет свою симметрию и приближается к границе контактного пятна. Также следует отметить, что введение упрощений в постановке рассматриваемой контактной задачи не изменяет размеры и конфигурацию областей контакта и зон сцепления.

ВЫВОДЫ

В настоящей статье получено численное решение квазистатической контактной задачи о взаимодействии упругого шара с упругим полупространством с учетом кулонова трения при сложном нагружении. Для решения задачи был использован алгоритм, предложенный в работе [12]. Отличительной особенностью данного алгоритма является модификация граничных условий, позволяющая использовать для приближенного решения задачи итерационные процессы, обладающие гарантированной сходимостью. Полученные данные свидетельствуют о том, что предложенная модификация граничных условий рассматриваемой контактной задачи практически не искажает её решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон : Пер. с англ. В. Э. Наумова, А. А. Спектора под ред. Р. В. Гольдштейна. – М. : Мир, – 1989. – 510 с.
2. Kalker J. J. A survey of the mechanics of contact between solid bodies / J.J. Kalker // ZAMM. – 1977. – В. 57, Н. 5. – Р. Т3-Т17.
3. Тэлега Ю. И. Вариационные методы в контактных задачах механики / Ю.И. Тэлега // Успехи механики. – 1987. – Т. 10. – Вып. 2. – С. 3-95.
4. Кравчук А. С. Развитие метода решения контактных задач с учетом трения при сложном нагружении / А.С. Кравчук // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. – 2007. – № 3. – С. 22-32.
5. Кравчук А. С. Вариационный метод в контактных задачах. Состояние проблемы, направления развития / А.С. Кравчук // Прикл. математ. и механика. – 2009. – Вып. 73, № 3. – С. 492-502.
6. Reina S. A quadratic programming formulation for the solution of layered elastic contact problems: Example applications and experimental validation / S. Reina, D. Dini, D.A.Hills, Y. Lida // European Journal of Mechanics – A/Solids. – 2011. – Vol. 30, Issue 3. – P. 236-247.
7. Галанов Б. А. Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта / Б.А. Галанов // Прикл. математ. и механика. – 1985. – Т. 4. – Вып. 5. – С. 827-835.
8. Александров В. М. Пространственная контактная задача для двухслойного упругого основания с заранее неизвестной областью контакта / В.М. Александров, J.J. Kalker, Д.А. Пожарский // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. – 1999. – № 4. – С. 51-55.
9. Александров В. М. Трёхмерные контактные задачи при учёте трения и нелинейной шероховатости / В.М. Александров, Д.А. Пожарский // Прикл. математ. и механика. – 2004. – Т. 68. – Вып. 3. – С. 516-527.
10. Чебаков М. И. Трёхмерная контактная задача для слоя с учётом сил трения в области контакта / М.И. Чебаков // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. – 2002. – № 6. – С. 59-68.
11. Александров А. И. Метод нелинейных граничных интегральных уравнений для контактных задач теории упругости / А.И. Александров, Ю.М. Стреляев // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2014. – № 3(7). – С. 36-40.
12. Стреляев Ю. М. Решение квазистатической контактной задачи теории упругости с учетом трения / Ю.М. Стреляев // Вісник ЗНУ. Фізико-математичні науки. – 2014. – № 2. – С. 161-172.
13. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М. : Наука, 1984. – 752 с.
14. Ланкастер П. Теория матриц / П. Ланкастер. – М. : Наука, 1978. – 280 с.

REFERENCES

1. Johnson, K. (1989), *Mekhanika kontaktного vzaimodeistviya* [Contact Mechanics], Mir, Moscow, USSR.
2. Kalker, J.J. (1977), “A survey of the mechanics of contact between solid bodies”, *ZAMM*, b. 57, h. 5, pp. T3-T17.
3. Telega, J.J. (1987), “Variational methods in contact problems of mechanics”, *Uspekhi Mekhaniki*, vol. 10, issue 2, pp. 3-95.
4. Kravchuk, A.S. (2007), “Development of method for solving contact problems with given friction under complex loading”, *Izv. RAN. Mekh. tverd. tela*, no. 3, pp. 22-32.
5. Kravchuk, A.S. (2009). “Variational method in contact problems. State of problem, directions of development”, *Prikladnaia matematika i mekhanika*, issue 73, no. 3, pp. 492-502.

6. Reina, S., Dini, D., Hills, D.A. and Lida, Y. (2011), "A quadratic programming formulation for the solution of layered elastic contact problems: Example applications and experimental validation", *European Journal of Mechanics – A/Solids*, vol. 30, issue 3, pp. 236-247.
7. Galanov, B.A. (1985), "Method of boundary equations of Hammerstein kind for contact problems of linear elasticity in case unknown contact areas", *Prikladnaia matematika i mekhanika*, vol. 4, issue 5, pp. 827-835.
8. Aleksandrov, V.M., Kalker, J.J. and Pozharskii, D.A. (1999), "Three-dimensional contact problem for a two-layered elastic base with an unknown contact area", *Izvestiya RAN. Mekhanika Tverdogo Tela*, no. 4, pp. 51-55.
9. Aleksandrov, V.M. and Pozharskii, D.A. (2004), "Three-dimensional contact problems with friction and non-linear roughness taken into account", *Prikladnaia matematika i mekhanika*, vol. 68, issue 3, pp. 516-527.
10. Chebakov, M.I. (2002), "Three-dimensional contact problem for a layer with allowance for friction in a contact area", *Izvestiya RAN. Mekhanika Tverdogo Tela*, no. 6, pp. 59-68.
11. Alexandrov, A.I. and Streliaiev, Y.M. (2014), "Nonlinear boundary integral equation's method for elastic contact problems", *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, no. 3(7), pp. 36-40.
12. Streliaiev, Y.M. (2014), "Solution of the quasistatic contact problem of elasticity with friction", *Visnik ZNU. Fiziko-matematichni nauki*, no. 2, pp. 161-172.
13. Kantorovich, L.V., and Akilov, G.P. (1984), *Funktsionalnyi analiz* [Functional analysis], Nauka, Moscow.
14. Lancaster, P. (1978), *Teoriya matrits* [The theory of matrices], Nauka, Moscow.

УДК 538.945

АНОМАЛЬНЫЙ (НЕТЕПЛОВОЙ) ГИСТЕРЕЗИС НА ВОЛЬТ-АМПЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ГРАНУЛИРОВАННЫХ ПЛЕНОК ВАНАДИЯ В МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Турутанов О. Г., к. ф.-м.н.

*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАНУ,
просп. Ленина, 47, г. Харьков, 61103, Украина*

turutanov@ilt.kharkov.ua

На вольт-амперных характеристиках (ВАХ) гранулированных сверхпроводящих пленок ванадия, помещенных в магнитное поле $\sim 0,05$ Тл, наблюдается аномальный гистерезис, обратный по знаку тепловому, вызываемому джоулевым саморазогревом. Показано, что этот эффект может быть объяснен с использованием модели динамики магнитного потока в двумерной сверхпроводящей сети со слабыми джозефсоновскими связями, обладающей большим числом близких по энергии метастабильных состояний (фрустрационный потенциал). Проведена аналогия с магнитными и транспортными свойствами неоднородных ВТСП материалов.

Ключевые слова: гранулированная пленка, вольт-амперные характеристики, аномальный гистерезис, пространственно-неоднородные сверхпроводники, фрустрационный потенциал, метастабильные токовые состояния, сверхпроводящая перколяционная сеть.

АНОМАЛЬНИЙ (НЕТЕПЛОВИЙ) ГІСТЕРЕЗИС НА ВОЛЬТ-АМПЕРНИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ГРАНУЛЬОВАНИХ ПЛІВОК ВАНАДІЮ В МАГНІТНИХ ПОЛЯХ

Турутанов О. Г., к. ф.-м. н.

*Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Веркіна НАНУ,
просп. Леніна, 47, м. Харків, 61103, Україна*

turutanov@ilt.kharkov.ua

На вольт-амперних характеристиках (ВАХ) гранульованих надпровідних плівок ванадію, які поміщені у магнітне поле $\sim 0,05$ Тл, спостерігається аномальний гистерезис, зворотний за знаком до теплового, що викликається джоулевым саморозігрівом. Показано, що цей ефект може бути пояснений з використанням