

УДК 539.374.1

МОДЕЛИРОВАНИЕ УЧАСТКОВ ПЕРЕХОДА ПРИ ПЛАСТИЧЕСКОМ ФОРМОИЗМЕНЕНИИ В УСЛОВИЯХ ОБЪЕМНОГО НАГРУЖЕНИЯ

Чигиринский В. В., Ленок А. А.

*Запорожский национальный технический университет,
ул. Жуковского, 64, г. Запорожье, Украина*

valerij@zntu.edu.ua

Рассмотрены и смоделированы переходные участки смежных зон пластического формоизменения в условиях объемного напряженного состояния. Показаны возможности и условия плоских функций и их комбинаций в определении полей напряжений и скоростей деформаций. Произведена оценка полученного результата и принятых допущений с использованием системы уравнений теории пластичности и физического моделирования процесса пластического течения среды в переходных зонах.

Ключевые слова: переходные зоны, объемное нагружение, гармонические функции.

МОДЕЛЮВАННЯ ДІЛЯНОК ПЕРЕХОДУ ПРИ ПЛАСТИЧНІЙ ФОРМОЗМІНІ В УМОВАХ ОБ'ЄМНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Чигиринський В. В., Ленок А. А.

*Запорізький національний технічний університет,
вул. Жуковського, 64, м. Запоріжжя, Україна*

valerij@zntu.edu.ua

Розглянуті та змодельовані перехідні ділянки суміжних зон пластичної формозміни в умовах об'ємного напруженого стану. Показано можливості та умови плоских функцій та їх комбінацій у визначенні полів напруг і швидкостей деформацій. Зроблена оцінка отриманого результату і прийнятих припущень з використанням системи рівнянь теорії пластичності та фізичного моделювання процесу пластичної течії середовища в перехідних зонах.

Ключові слова: перехідні зони, об'ємне навантаження, гармонійні функції.

MODELING THE TRANSITION AREAS AT PLASTIC FORMING IN VOLUMETRIC LOADING

Chigirinsky V. V., Lenok A. A.

*Zaporozhye National Technical University,
Zhukovsky str., 64, Zaporozhye, Ukraine*

valerij@zntu.edu.ua

It was considered a plane and volumetric problems of plasticity theory as applied to the study of the transition areas adjacent zones plastic deformation. In the production part of the problem was suggested to model the plastic transition zones using generalized equilibrium equations and differential equations of continuity of deformation rates.

The latter equations are partial differential equations of hyperbolic type and can be solved with the use of harmonic functions under the transform of Laplace. It were defined simplifies circuits, which were used in the system. Ultimately, they allow us to reduce the volumetric problem to the features flat and thus obtain to desire the end result.

Also it were shown the options for the use of flat functions and their combinations for volumetric problems in the theory of plasticity. It was produced assessment of the result and the assumptions wich were made using a system of equations of the theory of plasticity and physical modeling of plastic flow of the medium in the transition areas of adjacent zones.

Key words: transition zones, volume loading, harmonic functions.

ВВЕДЕНИЕ

Физическое и математическое моделирование иногда требуют значительных упрощений в постановке и решении задачи с целью получения практического результата. Например, правильное представление участков перехода между зонами пластического течения во многом определяют взаимодействие этих зон, от которого зависит величина и характер

распределения напряжений и скоростей в очаге деформации. При этом необходимо оценивать представленные упрощения, как с точки зрения корректности, так и – достоверности решения. Также нужно применить допущения, где устраняются противоречия в некоторых положениях задачи, их выбор должен быть оценен с точки зрения возможности удовлетворения системы уравнений теории пластичности и физической модели процесса.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

С учетом последних замечаний рассматривается следующая постановка замкнутой объемной задачи теории пластичности, включающая следующие уравнения [1, с.11]:

1. Уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \quad (1)$$

2. Обобщенные уравнения равновесия

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} 2k_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_{xy}}{k_1}\right)^2}, \quad \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} 2k_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_{yz}}{k_2}\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} 2k_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_{zx}}{k_1}\right)^2}. \quad (2)$$

3. Условие пластичности Мизеса

$$T_i = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = k. \quad (3)$$

4. Уравнения связи

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{\xi_x - \xi_y}{\dot{\gamma}_{xy}} = F_1, \quad \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2\tau_{yz}} = \frac{\xi_y - \xi_z}{\dot{\gamma}_{yz}} = F_2, \quad \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2\tau_{zx}} = \frac{\xi_z - \xi_x}{\dot{\gamma}_{zx}} = F_3. \quad (4)$$

5. Уравнения совместности скоростей деформаций

$$\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \gamma_{xy}, \quad \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \gamma_{yz}, \quad \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \gamma_{zx}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \cdot \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \cdot \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \cdot \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial z \partial x}.$$

6. Граничные условия

$$\tau_{n1} = k_1 \cdot \sin(A\Phi_1 - 2\alpha_1), \quad \tau_{n2} = k_2 \cdot \sin(A_2\Phi_2 - 2\alpha_2), \quad (6)$$

$$\gamma_{n1} = 2 \cdot \beta_1 \cdot \sin(B_1\Phi_1 - 2\alpha_1), \quad \gamma_{n2} = 2 \cdot \beta_2 \cdot \sin(B_2\Phi_2 - 2\alpha_2).$$

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЯ

Использование плоских функций или сочетаний плоских функций в решении определяется стремлением упростить пространственную задачу и в полной мере удовлетворить систему уравнений теории пластичности (1)...(6). Обобщенные уравнения равновесия (2), описывающие участки перехода между зонами пластического течения, используются для

решения плоских задач. Однако существуют варианты, при которых их применение себя оправдывает и при решении пространственных задач теории пластичности.

В работе [2, с.568] предложено аналитическое решение плоской задачи теории пластичности с использованием гармонических функций. В приведенных публикациях показано, что участки перехода смежных зон хорошо математически описываются обобщенными уравнениями равновесия (2). Эти уравнения известны в литературе [3, с.85; 4, с.276; 5, с.198] и позволяют получить реальные поля касательных напряжений в зонах, в которых касательные напряжения изменяют свой знак.

Следует отметить, что более точными в системе уравнений (2) являются дифференциальные уравнения вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial z \partial y} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_x - \sigma_y), \\ \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\sigma_y - \sigma_z), \\ \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial z \partial y} &= \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} (\sigma_z - \sigma_x). \end{aligned} \quad (7)$$

Однако при такой постановке и решении задачи в аналитическом виде возникают непреодолимые сложности, которые не оправдывают затраченных усилий. Систему (7) можно упростить, если принять равными нулю смешанные производные от касательных напряжений. Для удовлетворения граничных условий в напряжениях и принятия возможных упрощений, имеем

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = f(x, y) = k_1 \cdot \text{Sin}(A_1 \Phi_1), \quad \tau_{yz} = f(y, z) = k_2 \cdot \text{Sin}(A_2 \Phi_2), \\ \tau_{zx} = f(z, x) = k_3 \cdot \text{Sin}(A_3 \Phi_3). \end{aligned} \quad (8)$$

Соотношения между нормальными и касательными напряжениями из (4) будут

$$\sigma_x - \sigma_y = 2\tau_{xy} \cdot F_1, \quad \sigma_y - \sigma_z = 2\tau_{yz} \cdot F_2, \quad \sigma_z - \sigma_x = 2\tau_{zx} \cdot F_2, \quad (9)$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x \partial y} 2 \cdot \tau_{xy} F_1, \quad \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} 2 \cdot \tau_{yz} F_2, \\ \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} 2 \cdot \tau_{zx} F_3. \end{aligned} \quad (10)$$

В этом случае рассматривается задача в плоскостях XY , YZ , ZX . Отсюда система (10) эквивалентна системе (2). Однако связь нормальных напряжений и касательных не соответствует соотношениям (9), эта связь сложнее, что видно при элементарном анализе решений уравнений равновесия с учетом (8). Возникает вопрос, при каких условиях возможно использование дифференциальных уравнений (2) или (10) в решении пространственной задачи.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

1. Определение составляющих тензора напряжений

Особенностью данного решения является принятие плоских функций для касательных напряжений. Такое допущение может себя оправдать при условии, когда решение

удовлетворяет всей системе уравнений теории пластичности в виде (1)...(6), качественно и количественно верно опишет участки перехода пластических зон полосы в различных процессах обработки металлов давлением.

Используем тригонометрические и фундаментальные подстановки вида [2, с.568]:

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= k_1 \cdot \sin(A_1 \Phi_1), & \tau_{yz} &= k_2 \cdot \sin(A_2 \Phi_2), & \tau_{zx} &= k_3 \cdot \sin(A_3 \Phi_3), \\ k_1 &= C_{\sigma_1} \cdot \exp(\theta_1), & k_2 &= C_{\sigma_2} \cdot \exp(\theta_2), & k_3 &= C_{\sigma_3} \cdot \exp(\theta_3),\end{aligned}\quad (11)$$

где $A_i \Phi_i$ – аргументы тригонометрических функций, зависящие от координат X, Y, Z , определяемые решением задачи; θ_i – показатели экспонент, зависящие от координат X, Y, Z , определяемые решением задачи. Система уравнений (2) или (10) принимает вид:

$$\begin{aligned}- \text{ первое уравнение} & \quad \theta_{1xx} + (\theta_{1x} + A_1 \Phi_{1y})^2 - \theta_{1yy} - (\theta_{1y} - A_1 \Phi_{1x})^2 = -2 \cdot A_1 \Phi_{1xy}, \\ & \quad 2 \cdot (\theta_{1x} + A_1 \Phi_{1y}) \cdot (A_1 \Phi_{1x} - \theta_{1y}) + A_1 \Phi_{1xx} - A_1 \Phi_{1yy} = 2 \cdot \theta_{1xy}; \\ - \text{ второе уравнение} & \quad \theta_{2yy} + (\theta_{2y} + A_2 \Phi_{2z})^2 - \theta_{2zz} - (\theta_{2z} - A_2 \Phi_{2y})^2 = -2 \cdot A_2 \Phi_{2yz}, \\ & \quad 2 \cdot (\theta_{2y} + A_2 \Phi_{2z}) \cdot (A_2 \Phi_{2y} - \theta_{2z}) + A_2 \Phi_{2yy} - A_2 \Phi_{2zz} = 2 \cdot \theta_{2yz}; \\ - \text{ третье уравнение} & \quad \theta_{3zz} + (\theta_{3z} + A_3 \Phi_{3x})^2 - \theta_{3xx} - (\theta_{3x} - A_3 \Phi_{3z})^2 = -2 \cdot A_3 \Phi_{3zx}, \\ & \quad 2 \cdot (\theta_{3z} + A_3 \Phi_{3x}) \cdot (A_3 \Phi_{3z} - \theta_{3x}) + A_3 \Phi_{3zz} - A_3 \Phi_{3xx} = 2 \cdot \theta_{3zx}.\end{aligned}\quad (12)$$

В каждом уравнении появляются операторы перед тригонометрическими функциями синус и косинус, которые представлены в виде систем. В каждом операторе появляются одинаковые скобки. При условии их равенства нулю можно избавиться от нелинейности и получить соотношения, которые превращают уравнения в тождество. Покажем это на примере первого уравнения системы (12), имеем

$$\theta'_{1x} = -A_1 \Phi_{1z}, \quad \theta'_{1z} = A_1 \Phi_{1x} \rightarrow \theta'_{1xx} = -A_1 \Phi_{1xz}, \quad \theta'_{1zz} = A_1 \Phi_{1xz}, \quad \theta'_{1xz} = A_1 \Phi_{1zz} = -A_1 \Phi_{1xx}. \quad (13)$$

Из соотношений (13) приходим к уравнениям Лапласа, которым удовлетворяют функции θ'_i и $A_i \Phi_i$, вводимые в рассмотрение функций – гармонические. Снимается неопределенность в их определении, т.е.

$$\theta'_{1xx} + \theta'_{1zz} = 0, \quad A_1 \Phi_{1xx} + A_1 \Phi_{1zz} = 0. \quad (14)$$

Нормальные напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ определяются по известным касательным напряжениям (8) из уравнений равновесия. Интегрируя уравнения системы (1), получим

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\int \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dx - \int \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx + f(y, z) + C, & \sigma_y &= -\int \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dy - \int \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dy + f(x, z) + C, \\ \sigma_z &= -\int \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dz - \int \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dz + f(x, y) + C.\end{aligned}$$

С учетом дивергентной составляющей, имеем

$$\begin{aligned}\sigma'_x &= k_1 \cdot \cos(A_1 \Phi_1) - k_3 \cdot \cos(A_3 \Phi_3) + \sigma_0 + f(y, z) + C, \\ \sigma'_y &= -k_1 \cdot \cos(A_1 \Phi_1) + k_2 \cdot \cos(A_2 \Phi_2) + \sigma_0 + f(x, z) + C,\end{aligned}\quad (15)$$

$$\sigma'_z = k_3 \cdot \text{Cos}(A_3\Phi_3) - k_2 \cdot \text{Cos}(A_2\Phi_2) + \sigma_0 + f(x, y) + C.$$

Для анализа сопоставим разности нормальных напряжений в уравнениях (10)

$$\begin{aligned}\sigma_x - \sigma_y &= 2 \cdot k_1 \cdot \text{Cos}(A_1\Phi_1) - k_2 \cdot \text{Cos}(A_2\Phi_2) - k_3 \cdot \text{Cos}(A_3\Phi_3), \\ \sigma_y - \sigma_z &= 2 \cdot k_2 \cdot \text{Cos}(A_2\Phi_2) - k_3 \cdot \text{Cos}(A_3\Phi_3) - k_1 \cdot \text{Cos}(A_1\Phi_1), \\ \sigma_z - \sigma_x &= 2 \cdot k_3 \cdot \text{Cos}(A_3\Phi_3) - k_1 \cdot \text{Cos}(A_1\Phi_1) - k_2 \cdot \text{Cos}(A_2\Phi_2).\end{aligned}\quad (16)$$

Анализируя разности (10) и (16), убеждаемся, что между ними общее – удвоенные произведения рассматриваемых функций. Последние выражения (16) сложнее, так как присутствуют еще два слагаемых. Однако смешанные производные от разностей одинаковые и, в конечном счете, решение для пространственной задачи реализуется упрощенным способом. Действительно, плоская задача

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x \partial y} 2 \cdot \tau_{xy} F_1 &= 2 \cdot \frac{\partial}{\partial x \partial y} k_1 \text{Cos} A_1 \Phi_1 = 2(k_{1xy} - k_1 \cdot A_1 \Phi_{1x} \cdot A_1 \Phi_{1y}) \cdot \text{Cos} A_1 \Phi_1 - \\ &- 2(k_1 A_1 \Phi_{1xy} + k_{1x} A \Phi_{1y} + k_{1y} A_1 \Phi_{1x}) \cdot \text{Sin} A_1 \Phi_1,\end{aligned}$$

пространственная задача

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x \partial y} (2 \cdot k_1 \cdot \text{Cos}(A_1\Phi_1) - k_2 \cdot \text{Cos}(A_2\Phi_2) - k_3 \cdot \text{Cos}(A_3\Phi_3)) &= 2(k_{1xy} - k_1 \cdot A_1 \Phi_{1x} \cdot A_1 \Phi_{1y}) \times \\ &\times \text{Cos} A_1 \Phi_1 - 2(k_1 A_1 \Phi_{1xy} + k_{1x} A \Phi_{1y} + k_{1y} A_1 \Phi_{1x}) \text{Sin} A_1 \Phi_1.\end{aligned}$$

Показанная особенность является принципиальным фрагментом в представленном решении, т.к. она позволяет фактически плоское решение задачи использовать в пространственном. В итоге можно записать

$$\begin{aligned}\sigma'_x &= \pm C_{\sigma_1} \cdot \exp \theta'_1 \cdot \text{Cos}(A_1\Phi_1) \mp C_{\sigma_3} \cdot \exp \theta'_3 \cdot \text{Cos}(A_3\Phi_3) + \sigma_0 + C, \\ \sigma'_y &= \mp C_{\sigma_1} \cdot \exp \theta'_1 \cdot \text{Cos}(A_1\Phi_1) \pm C_{\sigma_2} \cdot \exp \theta'_2 \cdot \text{Cos}(A_2\Phi_2) + \sigma_0 + C, \\ \sigma'_z &= \pm C_{\sigma_3} \cdot \exp \theta'_3 \cdot \text{Cos}(A_3\Phi_3) \mp C_{\sigma_2} \cdot \exp \theta'_2 \cdot \text{Cos}(A_2\Phi_2) + \sigma_0 + C, \\ \tau_{xy} &= C_{\sigma_1} \cdot \exp \theta'_1 \cdot \text{Sin} A_1 \Phi_1, \quad \tau_{yz} = C_{\sigma_2} \cdot \exp \theta'_2 \cdot \text{Sin} A_2 \Phi_2, \quad \tau_{zx} = C_{\sigma_3} \cdot \exp \theta'_3 \cdot \text{Sin} A_3 \Phi_3,\end{aligned}\quad (17)$$

при условии

$$\begin{aligned}\theta'_{1x} &= \mp A_1 \Phi_{1y}, \quad \theta'_{1y} = \pm A_1 \Phi_{1x}; \quad \theta'_{2y} = \mp A_2 \Phi_{2z}, \quad \theta'_{2z} = \pm A_2 \Phi_{2y}; \\ \theta'_{3z} &= \mp A_3 \Phi_{3x}, \quad \theta'_{3x} = \pm A_3 \Phi_{3z}; \quad \theta'_{1xx} + \theta'_{1yy} = 0, \quad A_1 \Phi_{1xx} + A_1 \Phi_{1yy} = 0; \\ \theta'_{2yy} + \theta'_{2zz} &= 0, \quad A_2 \Phi_{2yy} + A_2 \Phi_{2zz} = 0; \quad \theta'_{3zz} + \theta'_{3xx} = 0, \quad A_3 \Phi_{3zz} + A_2 \Phi_{3xx} = 0.\end{aligned}$$

2. Определение составляющих тензора скоростей деформаций

Подходы к решению деформационной задачи аналогичны решению задачи в напряжениях. Как и для касательных напряжений принимаются сдвиговые скорости плоскими функциями. Для плоскодеформированного состояния имеем при

$$\begin{aligned}F_1 &= \text{ctg} B_1 \Phi_1, \quad F_2 = \text{ctg} B_2 \Phi_2, \quad F_3 = \text{ctg} B_3 \Phi_3, \\ \dot{\gamma}_{xy} &= 2 \cdot \xi_x \cdot \text{tg} B_1 \Phi_1, \quad \dot{\gamma}_{yz} = 2 \cdot \xi_y \cdot \text{tg} B_2 \Phi_2, \quad \dot{\gamma}_{zx} = 2 \cdot \xi_z \cdot \text{tg} B_3 \Phi_3.\end{aligned}\quad (18)$$

Подставляя (17) и (18) в первые три дифференциальные уравнения совместности (5), получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y^2} &= 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \cdot \xi_x \cdot \operatorname{tg} B_1 \Phi_1, & \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial y^2} &= 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \cdot \xi_y \cdot \operatorname{tg} B_2 \Phi_2, \\ \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial z^2} &= 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \cdot \xi_z \cdot \operatorname{tg} B_3 \Phi_3.\end{aligned}\quad (19)$$

Тип дифференциальных уравнений (17) такой же, как и (10). При подстановке соотношений

$$\xi_x = \beta_1 \cdot \operatorname{Cos} B_1 \Phi_1, \quad \xi_y = \beta_2 \cdot \operatorname{Cos} B_2 \Phi_2, \quad \xi_z = \beta_3 \cdot \operatorname{Cos} B_3 \Phi_3, \quad (20)$$

в правых частях уходит соответствующий тангенс, и задача становится идентичной. Так как уравнения в первой степени [4, с.236], вводятся фундаментальные функции

$$\beta_1 = C_{\xi_1} \cdot \exp \theta'_1, \quad \beta_2 = C_{\xi_2} \cdot \exp \theta'_2, \quad \beta_3 = C_{\xi_3} \cdot \exp \theta'_3. \quad (21)$$

Подставляя выражения (21) в (20), получим

– первое уравнение

$$\begin{aligned}& \left[-\theta''_{1xx} - (\theta''_{1x} + B_1 \Phi_{1y})^2 + \theta'_{1yy} + (\theta'_{1y} - B_1 \Phi_{1x})^2 \right] \cdot \operatorname{Cos} B_1 \Phi_1 + \left[2 \cdot (B_1 \Phi_{1x} - \theta''_{1y}) \times \right. \\ & \left. \times (\theta''_{1x} + B_1 \Phi_{1y}) + (B_1 \Phi_{1xx} - B \Phi_{1yy}) \right] \cdot \operatorname{Sin} B_1 \Phi_1 = 2 \cdot B_1 \Phi_{1xy} \cdot \operatorname{Cos} B_1 \Phi_1 + 2 \cdot \theta''_{1xy} \cdot \operatorname{Sin} B_1 \Phi_1,\end{aligned}$$

– второе уравнение

$$\begin{aligned}& \left[-\theta''_{2yy} - (\theta''_{2y} + B_2 \Phi_{2z})^2 + \theta'_{2zz} + (\theta'_{2z} - B_2 \Phi_{2y})^2 \right] \cdot \operatorname{Cos} B_2 \Phi_2 + \left[2 \cdot (B_2 \Phi_{2y} - \theta''_{2z}) \times \right. \\ & \left. \times (\theta''_{2y} + B_2 \Phi_{2z}) + (B_2 \Phi_{2yy} - B_2 \Phi_{2zz}) \right] \cdot \operatorname{Sin} B_2 \Phi_2 = 2 \cdot B_2 \Phi_{2yz} \cdot \operatorname{Cos} B_2 \Phi_2 + 2 \cdot \theta''_{2yz} \cdot \operatorname{Sin} B_2 \Phi_2,\end{aligned}\quad (22)$$

– третье уравнение

$$\begin{aligned}& \left[-\theta''_{3zz} - (\theta''_{3z} + B_3 \Phi_{3x})^2 + \theta'_{3xx} + (\theta'_{3x} - B_3 \Phi_{3z})^2 \right] \cdot \operatorname{Cos} B_3 \Phi_3 + \left[2 \cdot (B_3 \Phi_{3z} - \theta''_{3x}) \times \right. \\ & \left. \times (\theta''_{3z} + B_3 \Phi_{3x}) + (B_3 \Phi_{3zz} - B_3 \Phi_{3xx}) \right] \cdot \operatorname{Sin} B_3 \Phi_3 = 2 \cdot B_3 \Phi_{3zx} \cdot \operatorname{Cos} B_3 \Phi_3 + 2 \cdot \theta''_{3zx} \cdot \operatorname{Sin} B_3 \Phi_3.\end{aligned}$$

Как и в случае (12) система (22) может быть решена, если существует возможность избавиться от нелинейности. Принимая скобки в операторах равными нулю, получим

$$\theta'_{1x} = -B_1 \Phi_{1y}, \quad \theta'_{1y} = B_1 \Phi_{1x}; \quad \theta'_{2y} = -B_2 \Phi_{2z}, \quad \theta'_{2z} = B_2 \Phi_{2y}; \quad \theta'_{3z} = -B_3 \Phi_{3x}, \quad \theta'_{3x} = B_3 \Phi_{3z}. \quad (23)$$

Вводимые в рассмотрение функции θ''_i и $B_i \Phi_i$ являются гармоническими, как и функции для компонентов тензора напряжений.

Если следовать уравнениям связи для пространственной задачи, имеем уравнения (24), которые удовлетворяют условию несжимаемости.

$$\begin{aligned}\xi_x &= \beta_1 \cdot \operatorname{Cos}(B_1 \Phi_1) - \beta_3 \cdot \operatorname{Cos}(B_3 \Phi_3), \\ \xi_y &= \beta_2 \cdot \operatorname{Cos}(B_2 \Phi_2) - \beta_1 \cdot \operatorname{Cos}(B_1 \Phi_1), \\ \xi_z &= \beta_3 \cdot \operatorname{Cos}(B_3 \Phi_3) - \beta_2 \cdot \operatorname{Cos}(B_2 \Phi_2).\end{aligned}\quad (24)$$

Как и для напряжений (16) составим разности линейных деформаций с учетом (24)

$$\begin{aligned}
\xi_x - \xi_y &= 2 \cdot \beta_1 \cdot \text{Cos}(B_1 \Phi_1) - \beta_2 \cdot \text{Cos}(B_2 \Phi_2) - \beta_3 \cdot \text{Cos}(B_3 \Phi_3), \\
\xi_y - \xi_z &= 2 \cdot \beta_2 \cdot \text{Cos}(B_2 \Phi_2) - \beta_3 \cdot \text{Cos}(B_3 \Phi_3) - \beta_1 \cdot \text{Cos}(B_1 \Phi_1), \\
\xi_z - \xi_x &= 2 \cdot \beta_3 \cdot \text{Cos}(B_3 \Phi_3) - \beta_1 \cdot \text{Cos}(B_1 \Phi_1) - \beta_2 \cdot \text{Cos}(B_2 \Phi_2).
\end{aligned} \tag{25}$$

Сравнивая (25) с (16), (8) и (18), можно отметить соответствие между нормальными напряжениями и линейными скоростями деформаций, между касательными напряжениями и сдвиговыми скоростями деформаций. С точки зрения решения задачи теории пластичности, в первые дифференциальные уравнения неразрывности (5) вместо γ_i подставляются плоские функции (18), вместо ξ_i – пространственные функции (24). После преобразований уравнения неразрывности сводятся к виду

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \beta_1 \cdot \text{Cos}(A_1 \Phi_1)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \beta_1 \text{Cos}(A_1 \Phi_1)}{\partial x^2} &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \beta_1 \cdot \text{Sin}(A_1 \Phi_1)}{\partial y \partial x}, \\
\frac{\partial^2 \beta_2 \cdot \text{Cos}(A_2 \Phi_2)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \beta_2 \cdot \text{Cos}(A_2 \Phi_2)}{\partial y^2} &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \beta_2 \cdot \text{Sin}(A_2 \Phi_2)}{\partial z \partial y}, \\
\frac{\partial^2 \beta_3 \cdot \text{Cos}(A_3 \Phi_3)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \beta_3 \cdot \text{Cos}(A_3 \Phi_3)}{\partial z^2} &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \beta_3 \cdot \text{Sin}(A_3 \Phi_3)}{\partial x \partial z}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Сопоставляя (26) с (19) и (22), видно, что пространственная задача фактически свелась к плоской при выполнении постановочной части (4)..(6). В итоге можно записать

$$\begin{aligned}
\xi_x &= \pm C_{\xi_1} \cdot \exp \theta_1'' \cdot \text{Cos}(B_1 \Phi_1) \mp C_{\xi_3} \cdot \exp \theta_3'' \cdot \text{Cos}(B_3 \Phi_3), \\
\xi_y &= \pm C_{\xi_2} \cdot \exp \theta_2'' \cdot \text{Cos}(B_2 \Phi_2) \mp C_{\xi_1} \cdot \exp \theta_1'' \cdot \text{Cos}(B_1 \Phi_1), \\
\xi_z &= \pm C_{\xi_3} \cdot \exp \theta_3'' \cdot \text{Cos}(B_3 \Phi_3) \mp C_{\xi_2} \cdot \exp \theta_2'' \cdot \text{Cos}(B_2 \Phi_2), \\
\dot{\gamma}_{xy} &= 2 \cdot C_{\xi_1} \cdot \exp \theta_1'' \cdot \text{Sin} B_1 \Phi_1, \quad \dot{\gamma}_{yz} = 2 \cdot C_{\xi_2} \cdot \exp \theta_2'' \cdot \text{Sin} B_2 \Phi_2, \\
\dot{\gamma}_{zx} &= 2 \cdot C_{\xi_3} \cdot \exp \theta_3'' \cdot \text{Sin} B_3 \Phi_3
\end{aligned} \tag{27}$$

при условии

$$\begin{aligned}
\theta_{1x}'' &= \mp B_1 \Phi_{1y}, \quad \theta_{1y}'' = \pm B_1 \Phi_{1x}; \quad \theta_{2y}'' = \mp B_2 \Phi_{2z}, \quad \theta_{2z}'' = \pm B_2 \Phi_{2y}; \quad \theta_{3z}'' = \mp B_3 \Phi_{3x}, \quad \theta_{3x}'' = \pm B_3 \Phi_{3z}; \\
\theta_{1xx}'' + \theta_{1yy}'' &= 0, \quad B_1 \Phi_{1xx} + B_1 \Phi_{1yy} = 0; \quad \theta_{2yy}'' + \theta_{2zz}'' = 0, \quad B_2 \Phi_{2yy} + B_2 \Phi_{2zz} = 0; \\
\theta_{3zz}'' + \theta_{3xx}'' &= 0, \quad B_3 \Phi_{3zz} + B_2 \Phi_{3xx} = 0.
\end{aligned}$$

Полученные решения пространственной задачи в аналитическом виде (17) и (27) представляют собой гармонические функции, удовлетворяют систему уравнений теории пластичности в постановочной части (1)..(6). Важным обстоятельством в решении является вопрос, в какой степени результат может обеспечить выполнение физических условий задачи.

ФИЗИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ

Полученные решения должны соответствовать общепринятым физическим данным и не противоречить установленным понятиям в прикладной теории пластичности. Имеем осадку прямоугольной полосы параллельными шероховатыми бойками. Приводя выражения (17) к виду, которые предусматривают нормальные напряжения одного знака, за счет среднего напряжения σ_0 , и приоритет пластического течения вдоль оси Z , запишем

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= -2 \cdot C_{\sigma_1} \cdot \exp \theta'_1 \cdot \text{Cos} A_1 \Phi_1 - 2 \cdot C_{\sigma_2} \cdot \exp \theta'_2 \cdot \text{Cos} A_2 \Phi_2 - 2 \cdot C_{\sigma_3} \cdot \exp \theta'_3 \cdot \text{Cos} A_3 \Phi_3, \\ \sigma'_x &= -C_{\sigma_1} \cdot \exp \theta'_1 \cdot \text{Cos}(A_1 \Phi_1) + C_{\sigma_3} \cdot \exp \theta'_3 \cdot \text{Cos}(A_3 \Phi_3) + \sigma_0 + C, \\ \sigma'_y &= +C_{\sigma_1} \cdot \exp \theta'_1 \cdot \text{Cos}(A_1 \Phi_1) + C_{\sigma_2} \cdot \exp \theta'_2 \cdot \text{Cos}(A_2 \Phi_2) + \sigma_0 + C, \\ \sigma'_z &= -C_{\sigma_3} \cdot \exp \theta'_3 \cdot \text{Cos}(A_3 \Phi_3) - C_{\sigma_2} \cdot \exp \theta'_2 \cdot \text{Cos}(A_2 \Phi_2) + \sigma_0 + C.\end{aligned}$$

При подстановке σ_0 , имеем

$$\begin{aligned}\sigma'_x &= -3C_{\sigma_1} \cdot \exp \theta'_1 \cdot \text{Cos} A_1 \Phi_1 - 2 \cdot C_{\sigma_2} \cdot \exp \theta'_2 \cdot \text{Cos} A_2 \Phi_2 - C_{\sigma_3} \cdot \exp \theta'_3 \cdot \text{Cos} A_3 \Phi_3 + C, \\ \sigma'_y &= -C_{\sigma_2} \cdot \exp \theta'_2 \cdot \text{Cos} A_2 \Phi_2 - C_{\sigma_1} \cdot \exp \theta'_1 \cdot \text{Cos} A_1 \Phi_1 - 2 \cdot C_{\sigma_3} \cdot \exp \theta'_3 \cdot \text{Cos} A_3 \Phi_3 + C, \quad (28) \\ \sigma'_z &= -2 \cdot C_{\sigma_1} \cdot \exp \theta'_1 \cdot \text{Cos} A_1 \Phi_1 - 3 \cdot C_{\sigma_2} \cdot \exp \theta'_2 \cdot \text{Cos} A_2 \Phi_2 - 3 \cdot C_{\sigma_3} \cdot \exp \theta'_3 \cdot \text{Cos} A_3 \Phi_3 + C.\end{aligned}$$

Определяя C_{σ_2} , C_{σ_3} и C из граничных условий, запишем

$$\begin{aligned}\sigma'_x &= -\frac{4}{3} \cdot \frac{k_0}{\exp \theta'_{20} \cdot \text{Cos} A_2 \Phi_{20}} \cdot \exp \theta'_2 \cdot \text{Cos} A_2 \Phi_2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{k_0}{\exp \theta'_{30} \cdot \text{Cos} A_3 \Phi_{30}} \cdot \exp \theta'_3 \cdot \text{Cos} A_3 \Phi_3 + 2 \cdot k_0, \\ \sigma'_y &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{k_0}{\exp \theta'_{20} \cdot \text{Cos} A_2 \Phi_{20}} \cdot \exp \theta'_2 \cdot \text{Cos} A_2 \Phi_2 - \frac{4}{3} \cdot \frac{k_0}{\exp \theta'_{30} \cdot \text{Cos} A_3 \Phi_{30}} \cdot \exp \theta'_3 \cdot \text{Cos} A_3 \Phi_3 + 2 \cdot k_0, \\ \sigma'_z &= -\frac{2 \cdot k_0}{\exp \theta'_{30} \cdot \text{Cos} A_3 \Phi_{30}} \cdot \exp \theta'_3 \cdot \text{Cos} A_3 \Phi_3 - \frac{2 \cdot k_0}{\exp \theta'_{20} \cdot \text{Cos} A_2 \Phi_{20}} \cdot \exp \theta'_2 \cdot \text{Cos} A_2 \Phi_2 + 2k_0, \quad (29)\end{aligned}$$

где k_0 – сопротивление пластическому сдвигу в угловой части очага деформации на контакте. Простейший вариант решения уравнения Лапласа и соотношений является

$$A_3 \Phi_3 = A_3 A_6 \cdot x \cdot z, \quad A_2 \Phi_2 = A_2 A_7 \cdot y \cdot z, \quad \theta'_3 = -\frac{1}{2} \cdot A_3 A_6 \cdot (x^2 - z^2), \quad \theta'_2 = -\frac{1}{2} \cdot A_2 A_7 \cdot (y^2 - z^2).$$

На рис.1...4 представлены результаты расчетов контактного напряжения σ_z , (29), на разном удалении от нейтральных осей X и Y . Напряжения σ_z распределены по выпуклой кривой, что определяется касательными контактными напряжениями τ_{xz} и τ_{yz} в зонах перехода. В угловых зонах они имеют минимальное значение, в осевых – максимальное.

На рис. 3, 4 показано влияние ширины на контактные напряжения.

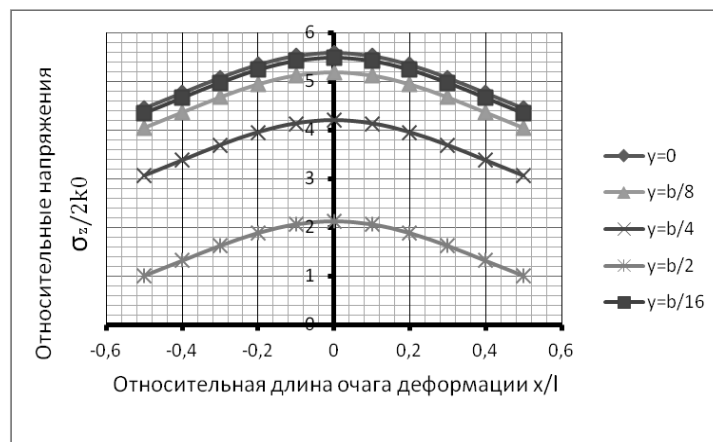


Рис. 1. Распределение нормальных напряжений на контактной поверхности, вдоль оси X ,

$$h = 10 \text{ мм}, \quad b = 140 \text{ мм}, \quad f = 0.3, \quad l = 70 \text{ мм}, \quad \text{при } y = 0; \frac{b}{16}; \frac{b}{8}; \frac{b}{4}; \frac{b}{2}$$



Рис. 2. Распределение нормальных напряжений на контактной поверхности, вдоль оси Y, $h = 10$ мм, $b = 140$

$$\text{мм, } f = 0.3, l = 70 \text{ мм, } x = 0; \frac{l}{16}; \frac{l}{8}; \frac{l}{4}; \frac{l}{2}$$

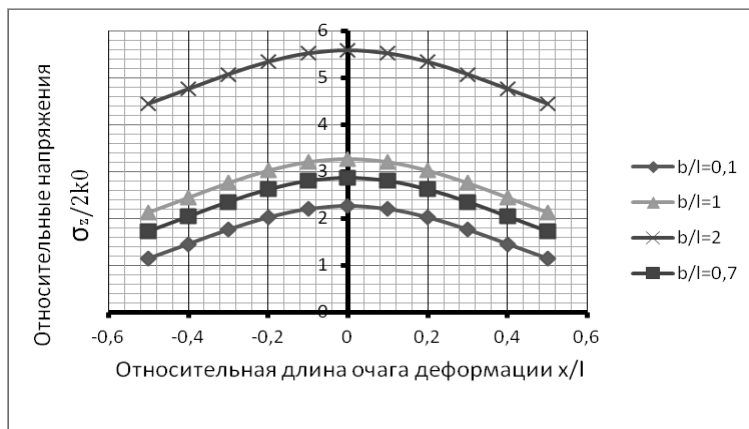


Рис. 3. Влияние ширины полосы на удельное давление, $h = 10$ мм, $l = 70$ мм, $\left(\frac{l}{h} = 7\right)$, $f = 0.3$,

$$b = 10, 50, 70, 140 \text{ мм, } y = 0$$

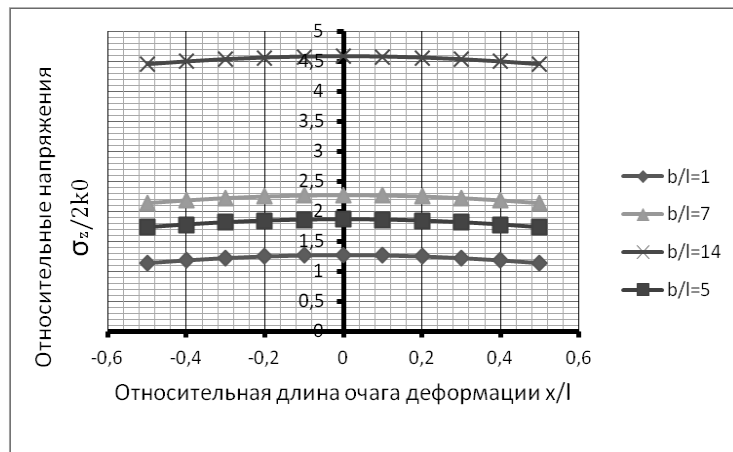


Рис. 4. Влияние ширины полосы на удельное давление, $h = 10$ мм, $l = 10$ мм, $\left(\frac{l}{h} = 1\right)$, $f = 0.3$,

$$b = 10, 50, 70, 140 \text{ мм, } y = 0$$

На рис. 5 представлена объемная эпюра распределения удельного давления при прокатке, согласно экспериментальных данных В. Луега.

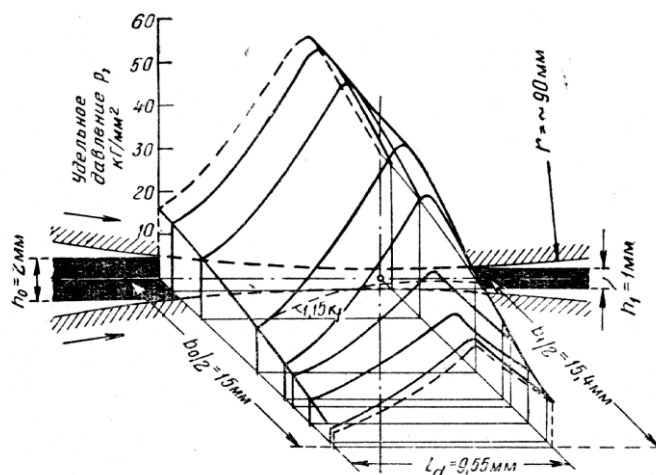


Рис. 5. Пространственная эпюра удельного давления для случая холодной прокатки алюминия, при $h_0 = 2 \text{ мм}$, $\Delta h = 1 \text{ мм}$, $b_0 = 30 \text{ мм}$, $D = 180 \text{ мм}$

В угловых частях заготовки удельные давления имеют минимальное значение с увеличением к осевым линиям раздела течения металла. При прокатке имеет место смещение максимума эпюры контактного давления в сторону выхода металла из валков. В нашем случае такого смещения нет, так как осадка является симметричным процессом, линии раздела течения металла находятся на оси симметрии. В качественном отношении распределение контактных давлений является идентичным, что позволяет утверждать о сопоставимости результата.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены решения (17), (27), которые удовлетворяют систему уравнений пространственной задачи теории пластичности (1)...(6). Расчеты контактных напряжений (29) показали качественную и количественную сходимость с экспериментальными данными других авторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чигиринский В. В. Метод решения задач теории пластичности с использованием гармонических функций / В.В. Чигиринский // Изв вузов. Черная металлургия. – 2009. – №5. – С. 11-16.
2. Чигиринский В. В. Некоторые особенности теории пластичности применительно к процессам ОМД / В.В. Чигиринский // Тр.науч.-техн. конф. «Теория и технология процессов пластической деформации-96». – М. : МИСиС, 1997. – С. 568-572.
3. Prantl L. Z.A.M.M. / L. Prantl. – 1923. – P. 401.
4. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел / А.Надаи. – М. : Из-во Иностранной литературы, 1954. – 647 с.
5. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести / Н.И. Безухов. – М. : Высшая школа, 1968. – 498 с.

REFERENCES

1. Chigirinskiy, V.V. (2009), "Method for solving the problems of the theory of plasticity using harmonic functions", *Izv universities. Black metallurgy*, no. 5, pp. 11-16.
2. Chigirinskiy, V.V. (1997), "Some features of the theory of plasticity applied to metal forming processes", *Tr.nauch.-tehn. conf. "Theory and technology of plastic deformation-96"*, MISA, Moscow, pp. 568-572.
3. Prantl, L. (1923), Z.A.M.M., p.401.
4. Nadai, A. (1954), *Plastichnost' i razrushenie tverdykh tel* [Plasticity and fracture of solids], Iz-vo Inostrannoy literatury, Moscow.
5. Bezukhov, N.I. (1968), *Osnovyi teorii uprugosti, plastichnosti i polzuchesti* [Fundamentals of the theory of elasticity, plasticity, and creep], Vysshaya shkola, Moscow.