13. Yemets, O., Romanova, N. and Roskladka, O. (2002), "On properties of some problems in Euclidean combinatorial optimization on permutations and their solutions", *Visnyk L'viv.un.-tu. Ser. Pryklad. matematyka ta informatyka*, issue 5, pp. 13-15.
14. Yemets, O.O., Romanova, N.G. and Chilikina, N.V. (2003), "Optimization located on top of Euclidean combinatorial sets", *Matematychne modelyuvannya*, no. 2(10), pp. 39-41.
15. Yemets, O.O. and Romanova, N.G. (2004), "Combined method for solving linear combinatorial optimization problems are located on the top of Euclidean combinatorial sets", *Dinamicheskie sistemy*, issue 17, pp. 166-170.
16. Yermolev, U.M., Lyashko, I.I., Tyuptya, V.I. and Mikhalevich, V.C. (1979), *Matematicheskie metodyi issledovaniya operatsiy : Ucheb. posobie dlya vuzov* [Mathematical Methods of Operational Research: Textbook for high schools], Vyshcha shkola, Kiev.
17. Liashenko, I.I., Karagodova, E.A., Chernikova, N.V. and Chor, N.Z. (1975), *Lineynoe i nelineynoe programmirovanie* [Linear and Nonlinear Programming], Vyshcha shkola, Kiev.
18. Chilikina, T.V., Yemets, O.O., Yemets, E.M. and Parfionova, T.O. (2011), "Estimates of in the branch and bound method for the linear of conditional of combinatorial optimization problem on permutations", *Informatyka ta systemni nauky (ISN-2011): materialy Vseukrainskoi naukovo-praktychnoi konferentsii* [Science and Information System (CCI 2011): Proceedings of the Second All-Ukrainian. scientific-prac. conf.], Poltava, March 17-19, 2011, pp. 323-331.
19. Karmanov, V.G. (1980), *Matematicheskoe programmirovanie* [Mathematical Programming], Nauka, Moskow.
20. Sukharev, A.G., Timokhov, A.V. and Fedorov, V.V. (1986), *Kurs metodov optimizatsii* [The course of of optimization techniques], Nauka, Moskow.
21. Yudin, D.P. and Holstein, E.G. (1964), *Zadachi i metodyi nelineynogo programmirovaniya* [Problems and methods of nonlinear programming], Nauka, Moskow.
22. Papadimitriu, H. and Statyglits, K. (1985), *Kombinatornaya optimizatsiya. Algoritmyi i slozhnost* [Combinatorial optimization. Algorithms and Complexity], Mir, Moskow.

УДК 539.375

# РІВНОВАГА ПЛАСТИНИ З ПЕРІОДИЧНОЮ СИСТЕМОЮ ТРІЩИН, ЗАЛІКОВАНИХ БІЛЯ ВЕРШИН

Шацький І. П., д. ф.-м. н.

*Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Микитинецька, 3, м. Івано-Франківськ, 76002, Україна*

ipshatsky@gmail.com

Розвинуто модель частково залікованих тріщин у твердому тілі. В області відновлення суцільності поверхнева енергія вважається інакшою, ніж у непошкодженому середовищі. Пружні властивості матеріалу не змінюються. Визначено ефективність лікування пошкодженої пластини з періодичними системами колінеарних або паралельних наскрізних тріщин для випадків нормального відриву поперечного зсуву та згину. Враховується ефект закриття тріщини у зігнутій пластині. Досліджено взаємодію дефектів, залікованих поблизу вершин.
*Ключові слова: пластина, частково залікована тріщина, періодична задача, гранична рівновага.*

# РАВНОВЕСИЕ ПЛАСТИНЫ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ТРЕЩИН, ЗАЛЕЧЕННЫХ ВОЗЛЕ ВЕРШИН

Шацкий И. П., д. ф.-м. н.

*Ивано-Франковский отдел Института прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача НАН Украины, ул. Микитинецкая, 3, г. Ивано-Франковск, 76002, Украина*

ipshatsky@gmail.com

Развита модель частично залеченных трещин в твердом теле. В области восстановления сплошности поверхностная энергия отличается от таковой для неповрежденной среды. Упругие свойства материала не изменяются. Определена эффективность лечения поврежденной пластины с периодическими системами коллинеарных либо параллельных сквозных трещин для случаев нормального отрыва, поперечного сдвига и изгиба. Учитывается эффект закрытия трещины в изгибаемой пластине. Исследовано взаимодействие дефектов, залеченных вблизи вершин.

*Ключевые слова: пластина, частично залеченная трещина, периодическая задача, предельное равновесие.*

## EQUILIBRIUM OF PLATE WITH PERIODICAL SYSTEM OF CRACKS HEALED NEAR TIPS

Shatskyi I. P., Dr. Phys. & Math. Sc.

*Ivano-Frankivsk Branch of Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine,*
*Mykytynetska str., 3, Ivano-Frankivsk, 76002, Ukraine*

ipshatsky@gmail.com

The model of partially healed crack in solid is developed. On the recovered area of the crack the continuity takes place while surface energy differs from that in undamaged body. The elastic properties of material are invariable. The effectiveness of healing of damage plate with periodical systems of collinear or parallel through crack is determined for cases of opening mode, transversal shear and bending. The crack closure effect in plate under bending is considered. The interaction of defects healed near tips is investigated.

*Key words: plate, partially healed crack, periodical problem, limited equilibrium.*

## ВСТУП

Проблема подовження ресурсу виробів, споруд та біологічних об’єктів залишається актуальною для сучасного матеріалознавства. Одним із продуктивних засобів реновації пошкоджених конструкцій є ін’єкційні технології заліковування дефектів [1]. Заповнення тріщиноподібної порожнини іншим матеріалом може суттєво розвантажити її вершини. Однак, для частково залікованих тріщин не усувається помітна концентрація напружень на з’єднаних берегах, тому в таких випадках потрібний докладний аналіз міцності конструкцій.

Рівновагу тіл із заповненими податливим матеріалом тріщинами часто розглядають в рамках моделі прошарку Вінклера і зводять задачу до розв’язання інтегродиференціальних рівнянь відносно стрибків переміщень на розрізах [1]. У працях [2, 3] запропоновано експрес-методику оцінки міцності пластини з частково залікованою тріщиною. Уважається, що на залікованій ділянці суцільність пластини у якийсь спосіб відновлено. Нехтуючи подробицями реології з’єднувального шару, сформульовано задачу механіки руйнування для розрізу в однорідній за пружними властивостями та неоднорідній за тріщиностійкістю пластині. Спрощена розрахункова схема придатна, зокрема, для моделювання заповнення щілини неконтрастним матеріалом і дозволяє будувати оцінки міцності, використовуючи відомі розв’язки задач механіки руйнування для колінеарних розрізів (у тому числі з урахуванням контакту берегів), минаючи процедуру розв’язування інтегродиференціальних рівнянь для вінклерівського прошарку.

Мета цього повідомлення – розвинути експрес-методику оцінки міцності пластин з частково залікованими тріщинами на випадок систем періодично розташованих дефектів.

## МОДЕЛЬ ЧАСТКОВО ЗАЛІКОВАНИХ ТРІЩИН ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядаємо пружну ізотропну пластину $(x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \times [-h, h]$, послаблену $d$-періодичним рядом прямолінійних наскрізних тріщин завдовжки $2l_0$, центри яких розташовані або на осі абсцис (колінеарні дефекти), або на осі ординат (паралельні дефекти). Нехай поблизу вершин кожної з тріщин суцільність пластини є відновленою, а при середині розрізів є можливим розрив переміщень. У результаті такої операції, однакової для кожного дефекту, дістаємо пластину із періодичною системою укорочених тріщин завдовжки $2l$, при цьому віддаль $d$ між центрами дефектів (період) не змінюється. Для спрощення приймаємо, що пружні властивості тіла із частково залікованими тріщинами зберігаються, у той же час питома поверхнева енергія $\gamma_h$ роз'єднання поверхонь на залікованих ділянках є інакшою, ніж $\gamma_0$ у суцільному тілі. Отже, приходимо до періодичної задачі механіки тріщини в однорідній за пружними властивостями та неоднорідній за тріщиностійкістю пластині.

Ступінь заліковування тріщин опишемо двома параметрами: $\eta = \sqrt{\gamma_h/\gamma_0}$ – відношення тріщиностійкостей залікованої і неушкодженої ділянок, що характеризує якість заліковування, $\psi = (2l - 2l_0)/(2l_0) = 1 - l/l_0 \in [0,1]$ – відношення довжин (площ) залікованої ділянки та початкової тріщини, яке означає кількісну міру відновленої області. Якщо для початкових тріщин прийняти безрозмірний параметр взаємного розташування $\lambda_0 = 2l_0/d$, то, враховуючи, що $l/l_0 = 1 - \psi$, для частково залікованих дефектів – $\lambda = 2l/d = \lambda_0(1-\psi)$.

Ефективність заліковування опишемо відношенням граничних значень навантаження для залікованої та первинної тріщини: $\chi = p_h/p_0$. Знайдемо $\chi(\eta, \psi)$ для різних варіантів навантажування.

## АНАЛІТИЧНІ ОЦІНКИ МІЦНОСТІ

**Тріщини нормального відриву.** Нехай пластина навантажена зусиллями розтягу $N_y^\infty = 2hp = \mathrm{const}$, рівномірно розподіленими на безмежності.

Для системи незалікованих колінеарних тріщин завдовжки $2l_0$ граничне значення навантаження знаходимо за формулою Гріффітса [4]

$$p_0 = \sqrt{\frac{2E\gamma_0}{\pi l_0}} \frac{1}{F(\lambda_0)}, \tag{1}$$

де $E$ – модуль Юнга, $\gamma_0$ – питома поверхнева енергія непошкодженого матеріалу, а

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda} \operatorname{tg} \frac{\pi\lambda}{2}} \tag{2}$$

– функція, що описує взаємне розташування колінеарних дефектів [5].

Нехай тріщини заліковано поблизу вершин. Для новоутворених укорочених тріщин

$$p_h = \sqrt{\frac{2E\gamma_h}{\pi l}} \frac{1}{F(\lambda)}. \tag{3}$$

Відтак

$$\chi = \frac{p_h}{p_0} = \eta \frac{\sqrt{l_0} F(\lambda_0)}{\sqrt{l} F(\lambda)} = \eta \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi\lambda_0}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\pi\lambda_0(1-\psi)}{2}}}. \tag{4}$$

Для періодичної системи паралельних тріщин нормального відриву з міжцентровою віддаллю $d$ у формулах (1) та (3) слід прийняти [5, 6]

$$F(\lambda) \approx \sqrt{\frac{\operatorname{th}(\pi\lambda)}{\pi\lambda}}. \tag{5}$$

Відносна похибка виразу (5) порівняно з прийнятим за точний числовим результатом, підрахована за чебишевською нормою, не перевищує 3,2%.

Тоді ефективність заліковування буде:

$$\chi \approx \eta \sqrt{\frac{\operatorname{th}(\pi\lambda_0)}{\operatorname{th}(\pi\lambda_0(1-\psi))}}\,. \tag{6}$$

**Тріщини поперечного зсуву.** Нехай пластина зазнає рівномірного зсуву розподіленими на безмежності зусиллями $N_{xy}^{\infty} = 2h\tau$.

Застосуємо до незалікованих тріщин, наприклад, $\sigma_\theta$-критерій крихкого руйнування [7]. Колінеарні тріщини завдовжки $2l_0$ будуть розповсюджуватися під кутом $\theta_* = -2\operatorname{arctg}\left(1/\sqrt{2}\right)$ до осі $x$ за критичного навантаження

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{2E\gamma_0}{\pi l_0}}\frac{1}{F(\lambda_0)} \tag{7}$$

($F(\lambda)$ така, як у формулі (2)).

Нехай тріщини заліковано поблизу вершин. Для укорочених дефектів можливі два сценарії руйнування: розвиток під кутом $\theta_*$ з граничним напруженням

$$\tau_h = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{2E\gamma_0}{\pi l}}\frac{1}{F(\lambda)} \tag{8}$$

або розвиток уздовж залікованого контуру з граничним напруженням

$$\tau_h = \sqrt{\frac{2E\gamma_h}{\pi l}}\frac{1}{F(\lambda)}\,. \tag{9}$$

Вибравши меншу із цих величин, знайшли

$$\chi = \frac{\tau_h}{\tau_0} = \min\left\{1, \frac{2}{\sqrt{3}}\eta\right\}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi\lambda_0}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi\lambda_0(1-\psi)}{2}}}\,. \tag{10}$$

Оскільки $\min\left\{1, \frac{2}{\sqrt{3}}\eta\right\} \geq \eta$, то ефективність заліковування для колінеарних тріщин поперечного зсуву є не меншою, ніж для тріщин нормального відриву.

Для періодичної системи паралельних тріщин поперечного зсуву у формулах (8)-(10) доцільно використати функцію [5, 8]

$$F(\lambda) \approx \frac{2}{\pi}K\left(\operatorname{th}\frac{3\pi\lambda}{4}\right)\sqrt{\frac{4}{3\pi\lambda}\operatorname{th}\frac{3\pi\lambda}{4}}\,,$$

де $K(\ldots)$ – повний еліптичний інтеграл другого роду.

Похибка цього виразу в діапазоні $\lambda \in [0, \infty)$ не перевищує 0,7%.

Тоді

$$\chi \approx \min\left\{1, \frac{2}{\sqrt{3}}\eta\right\} \frac{K\left(\operatorname{th}\frac{3\pi\lambda_0}{4}\right)}{K\left(\operatorname{th}\frac{3\pi\lambda_0(1-\psi)}{4}\right)} \sqrt{\frac{\operatorname{th}\frac{3\pi\lambda_0}{4}}{\operatorname{th}\frac{3\pi\lambda_0(1-\psi)}{4}}}. \tag{11}$$

**Згин пластини з тріщинами.** Нехай дефектна пластина зазнає згину рівномірно розподіленими моментами $M_y^\infty = m$ перпендикулярно до ліній розташування тріщин. У рамках класичних теорій плоского напруженого стану та згину пластин врахуємо закриття дефектів від згину за моделлю контакту вздовж лінії [9, 10].

Для періодичної системи незалікованих колінеарних тріщин завдовжки $2l_0$ граничне навантаження буде [9]:

$$|m_0| = 2h^2 \sqrt{\frac{1+\kappa}{\kappa}} \sqrt{\frac{2E\gamma_0}{\pi l_0}} \frac{1}{F(\lambda_0)}, \tag{12}$$

де $\kappa = 3(1+\nu)/(3+\nu)$, $\nu$ – коефіцієнт Пуассона матеріалу, а $F(\lambda)$ така, як у формулі (2).

У випадку заліковування поблизу вершин для укорочених тріщин

$$|m_h| = 2h^2 \sqrt{\frac{1+\kappa}{\kappa}} \sqrt{\frac{2E\gamma_h}{\pi l}} \frac{1}{F(\lambda)}. \tag{13}$$

Для відношення $\chi = |m_h|/|m_0|$ справедлива формула (4).

Для періодичної системи паралельних тріщин у формулах (12), (13) треба покласти [10]

$$F(\lambda) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda\left(1+\frac{1-\kappa_0}{1+\kappa}\right)} \operatorname{th}\left(\frac{\pi\lambda}{2}\left(1+\frac{1-\kappa_0}{1+\kappa}\right)\right)}, \quad \kappa_0 = \frac{1-\nu}{3+\nu}.$$

Похибка цього виразу для усіх $\lambda$ не більша, ніж 3,5%.

Тоді

$$\chi \approx \eta \sqrt{\frac{\operatorname{th}\left(\frac{\pi\lambda_0}{2}\left(1+\frac{1-\kappa_0}{1+\kappa}\right)\right)}{\operatorname{th}\left(\frac{\pi\lambda_0(1-\psi)}{2}\left(1+\frac{1-\kappa_0}{1+\kappa}\right)\right)}}. \tag{14}$$

## АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

Результати табулювання виразів (4), (6), (11), (14) для $\eta = 1$ подано відповідно на рис. 1-4.

Взаємодія колінеарних тріщин однаково проявляється на показниках ефективності заліковування для усіх типів навантаження: зі зближенням тріщин успіх лікування істотно підвищується навіть за невеликих значень параметра $\psi$.

Для паралельних тріщин ситуація інакша. Близьке розташування тріщин поперечного зсуву незначно підвищує ефект відновлення несучої здатності пластини за однакових довжин залікованих ділянок. У той же час для близько розташованих паралельних тріщин нормального відриву чи згину заліковування з невеликим обсягом $\psi$ практично не дає відчутного позитивного результату: великі значення $\chi$ досягаються хіба що при $\psi \to 1$.

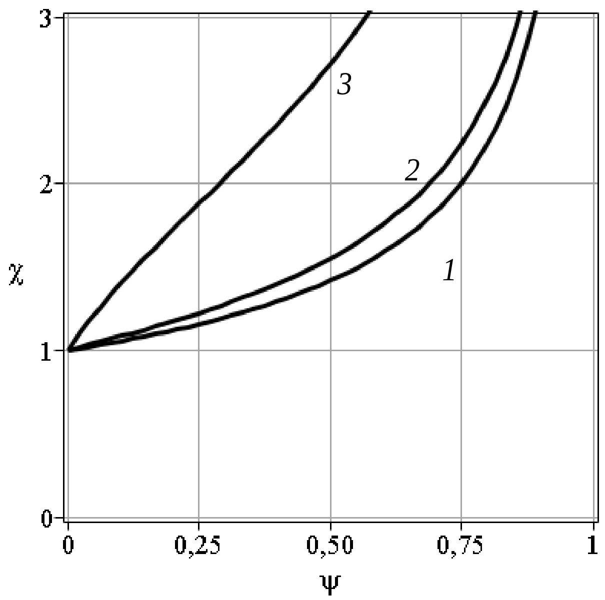


Рис. 1. Ефективність заліковування колінеарних тріщин: *1* – $\lambda_0 = 0{,}1$; *2* – $\lambda_0 = 0{,}5$; *3* – $\lambda_0 = 0{,}9$

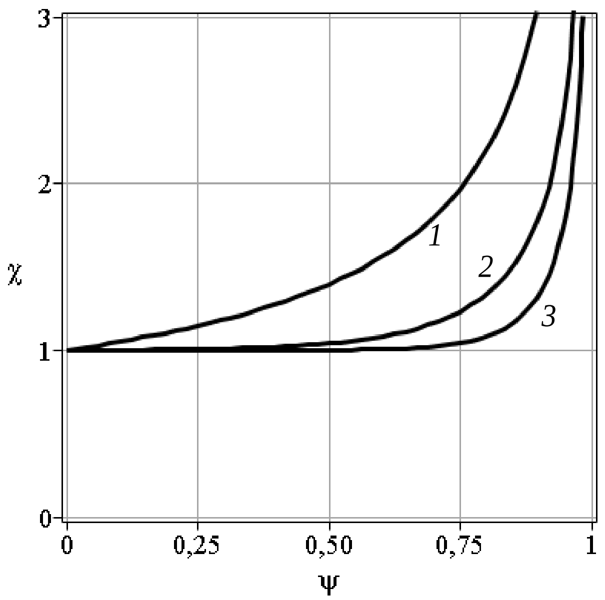


Рис. 2. Ефективність заліковування паралельних тріщин нормального відриву: *1* – $\lambda_0 = 0{,}1$; *2* – $\lambda_0 = 1{,}0$; *3* – $\lambda_0 = 2{,}0$

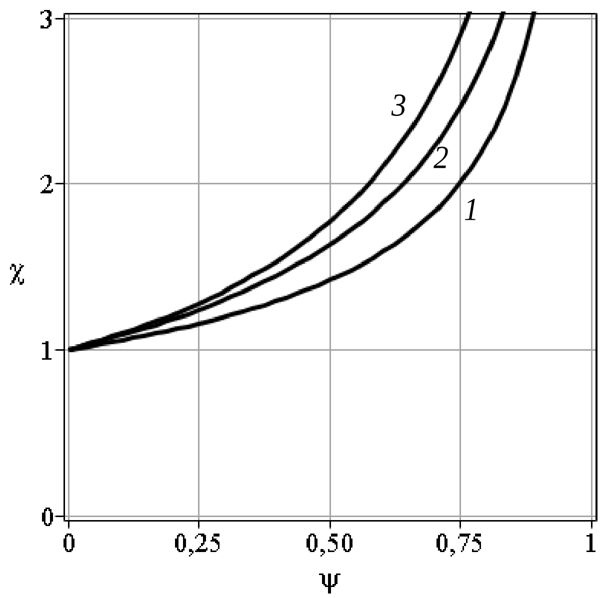


Рис. 3. Ефективність заліковування паралельних тріщин поперечного зсуву: *1* – $\lambda_0 = 0{,}1$; *2* – $\lambda_0 = 1{,}0$; *3* – $\lambda_0 = 2{,}0$

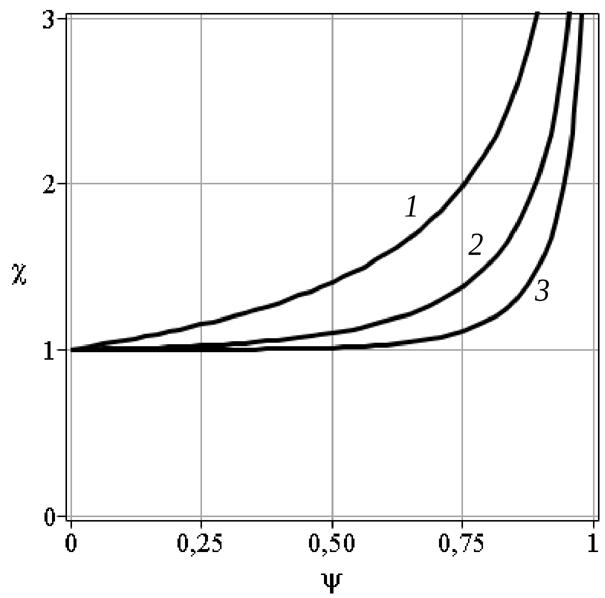


Рис. 4. Ефективність заліковування паралельних тріщин у зігнутій пластині: *1* – $\lambda_0 = 0{,}1$; *2* – $\lambda_0 = 1{,}0$; *3* – $\lambda_0 = 2{,}0$

Зменшення параметра $\eta$, який входить лінійно у вирази для $\chi$, призводить до істотного зниження показника ефективності заліковування. Слабкі з'єднання не дають бажаного результату, тому не можуть визнаватися ефективними.

У граничному випадку $\lambda_0 \to 0$ для усіх типів навантаження отримуємо відомі результати для поодинокої прямолінійної тріщини, залікованої поблизу вершин [2, 3].

## ВИСНОВКИ

Розвинута в статті модель тріщин, залікованих поблизу вершин, дозволяє оцінювати результати відновлення дефектних конструкцій тіла за точними чи наближеними аналітичними розв'язками періодичних задач механіки руйнування для однорідного за пружними властивостями та неоднорідного за тріщиностійкістю тіла. Ключовими параметрами, які визначають ефективність часткового відновлення, є розмір новоутвореної суцільної ділянки та значення її тріщиностійкості.

За потреби вивчити ефект заліковування посередині тріщин доведеться будувати числовий розв’язок задачі для двох колінеарних тріщин у смузі періоду.

## ЛІТЕРАТУРА


1. Маруха В. І. Механіка руйнування та міцність матеріалів: Довідк. пос. Т. 12 : Ін’єкційні технології відновлення роботоздатності пошкоджених споруд тривалої експлуатації / В.І. Маруха, В.В. Панасюк, В.П. Силованюк [Ред. В.В. Панасюк]. – Львів : СПОЛОМ, 2009. – 262 с.
2. Шацький І. П. Задачі згину пластини з частково залікованою тріщиною / І.П. Шацький // Вісник Донец. нац. ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2014. – № 1. – С. 91-93.
3. Шацький І. П. Гранична рівновага пластини з частково залікованою тріщиною / І.П. Шацький // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2015. – Т. 51, № 3. – С. 25-31.
4. Griffith A. A. The phenomenon of rupture and flow in solids / A.A. Griffith // Phil. Trans. Roy. Society. Ser. A. – 1920. – N 221. – P. 163-198.
5. Панасюк В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацышин. – К. : Наук. думка, 1976. – 444 с.
6. Саврук М. П. Напряжения в пластине с бесконечным рядом параллельных трещин при симметричной нагрузке / М.П. Саврук // Физ.-хим. механика материалов. – 1971. – Т. 7, № 6. – С. 104-106.
7. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами / В.В. Панасюк. – К. : Наук. думка, 1968. – 246 с.
8. Саврук М. П. Напряжения в пластине с бесконечным рядом параллельных трещин при антисимметричной нагрузке / М.П. Саврук // Физ.-хим. механика материалов. – 1972. – Т. 8, № 4. – С. 109-111.
9. Шацкий И. П. Взаимодействие коллинеарных разрезов с контактирующими кромками в изгибаемой пластине / И.П. Шацкий // Физ.-хим. механика материалов. – 1990. – Т. 26, № 3. – С. 70-75.
10. Шацкий И. П. Изгиб пластины, содержащей периодическую систему параллельных разрезов с контактирующими кромками / И.П. Шацкий // Прикл. механика. – 1991. – Т. 27, № 12. – С. 56-61.


## REFERENCES


1. Marukha, V.I., Panasyuk, V.V. and Sylovanyuk, V.P. (2009), *Mekhanika ruynuvannya ta mitsnist' materialiv: Dovidk. pos. T. 12 : In"yektsiyni tekhnolohiyi vidnovlennya robotozdatnosti poshkodzhenykh sporud tryvaloyi ekspluatatsiyi* [Fracture mechanics and strength of materials: Ref. book. Vol. 12: Injection technologies of damaged long-term operation structures renewal], Ed. V.V. Panasyuk, PH “Spolom”, Lviv, Ukraine.
2. Shatsky, I.P (2014), “Problems of bending of plate with partially healed crack”, *Visnyk Donez. naz. un-tu. Ser. A. Pryrodnychi nauky*, no. 1, pp. 91-93.
3. Shats’kyi, I.P (2015), “Limited equilibrium of plate with partially healed crack”, *Fizyko-khimichna mekhanika materialiv*, vol. 51, no. 3, pp. 25-31.
4. Griffith, A.A. (1920), “The phenomenon of rupture and flow in solids”, *Phil. Trans. Roy. Society. Ser. A*, no. 221, pp. 163-198.
5. Panasyuk, V.V., Savruk, M.P. and Datsyshyn, A.P. (1976), *Raspredelenie napryazheniy okolo treshchin v plastinach i obolochkach* [Stress distribution near cracks in plates and shells], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.
6. Savruk, M.P. (1971), “Stresses in lamina with an infinite number of parallel cracks under symmetrical loading”, *Fizyko-khimichna mekhanika materialiv*, vol. 7, no. 6, pp. 753-375.
7. Panasyuk, V.V. (1968), *Predelnoe ravnovesie khrupkikh tel s treshchinami* [Limited equilibrium of brittle bodies with cracks], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.
8. Savruk, M.P. (1972), “Stresses in a plate with an infinite row of parallel cracks, under an antisymmetric loading”, *Fizyko-khimichna mekhanika materialiv*, vol. 8, no. 4, pp. 499-501.
9. Shatskii, I.P. (1990), “Interaction of collinear sections with contacting edges in a bent plate”, *Fizyko-khimichna mekhanika materialiv*, vol. 26, no. 3, pp. 311-316.
10. Shatskii, I.P. (1991), “Bending of a plate containing a periodic system of parallel slits with contacting edges”, *Prikladnaya mehanika*, vol. 27, no. 12, pp. 1186-1190.