

9. Riahi, A. and Curran, J.H. (2009), "Full 3D finite element Cosserat formulation with application in layered structures", *Applied Mathematical Modelling*, 33, pp. 3450-3464.
10. (2004), MSC.Nastran 2005 Release Guide, MSC. Software Corporation, 2 MacArthur Place, Santa Ana, California 92707.
11. (2004), MSC.Nastran Quick Reference Guide. Volume 1, 2, MSC. Software Corporation, 2 MacArthur Place, Santa Ana, California 92707.
12. Grabin, B.V. (1991), *Osnovy konstruirovaniya raket-nositelej kosmicheskikh apparatov* [Bases of designing of rockets spacecraft], Mashinostroyeniye, Moscow.
13. Vasiliev, V.V., Barynin, V.A., Razin, A.F. and other (2009), "Anisogrid Composite Lattice Structures – Development And Space Applications", *Kompozity i nanostruktury*, no. 3, pp. 38-50
14. Gomenjuk, S.I., Gryshhak, V.Z., Grebenjuk, S.M., Choporov, S.V. and Lisnjak, A.O. (2012), Software "CAD FORTU FEM", License № 43043, Registration Date: 02.04.2012.
15. Gomenjuk, S.I., Grebenjuk, S.M., Gryshhak, V.Z., Tamurov, Yu.N. and Choporov, S.V. (2014), Software "Computer System "Stability" License № 53201, Registration Date: 20.01.2014.
16. Choporov, S.V., Gomenjuk, S.I., Grebenjuk, S.M. and Lisnjak, A.O. (2014), Software "CAD "qMesher", License № 53829, Registration date: 24.02.2014.

УДК 539.3

ПРОСТОРОВА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ПРО ДІЮ ШТАМПА З ПЛОСКОЮ ПІДОШВОЮ НА ПРУЖНУ БАГАТОШАРОВУ ОСНОВУ З УРАХУВАННЯМ ТЕРТЯ МІЖ ШТАМПОМ І ОСНОВОЮ

Александров І. О., аспірант

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, Україна*

heeper@gmail.com

Запропоновано спосіб визначення контактних напружень під штампом з плоскою підошвою. Враховується можливість відставання верхньої межі багатошарової основи від штампа при деформації, враховується також прослизання з тертям поверхні основи відносно штампа. Наведено детальний алгоритм визначення контактних напружень, а також областей відставання основи від штампа і областей прослизання. Як приклад вирішена відома контактна задача В.І. Острика про дію циліндричного штампа на пружний півпростр з урахуванням тертя. Отримані чисельні результати практично співпадають з результатами Острика.

Ключові слова: багатошарова основа, штамп з плоскою підошвою, врахування тертя, прослизання, відставання.

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О ДЕЙСТВИИ ШТАМПА С ПЛОСКОЙ ПОДОШВОЙ НА УПРУГОЕ МНОГОСЛОЙНОЕ ОСНОВАНИЕ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ МЕЖДУ ШТАМПОМ И ОСНОВАНИЕМ

Александров И. А., аспирант

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, Украина*

heeper@gmail.com

Предложен способ определения контактных напряжений под штампом с плоской подошвой. Учитывается возможность отставания верхней границы многослойного основания от штампа при деформации, учитывается также проскальзывание с трением поверхности основания относительно штампа. Приведен подробный алгоритм определения контактных напряжений, а также областей отставания основания от штампа и областей проскальзывания. В качестве примера решена известная контактная задача В.И. Острика о действии

цилиндрического штампа на упругое полупространство с учетом трения. Полученные численные результаты практически совпадают с результатами Острика.

Ключевые слова: многослойное основание, штамп с плоской подошвой, учёт трения, проскальзывание, отставание.

THREE-DIMENSIONAL CONTACT PROBLEM ABOUT THE ACTION OF THE STAMP WITH A FLAT SOLE ON ELASTIC MULTILAYER BASE BY TAKING INTO ACCOUNT THE FRICTION BETWEEN STAMP AND BASE

Alexandrov I. A., graduat student

*Zaporizhzhya national university,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, Ukraine*

hepper@gmail.com

In the initial position the stamp by all its sole touches the multilayer base. In this case a base does not deformed by stamp. Stamp's linear translational displacement is known. Friction coefficient between stamp and multilayer base is also known. It is considered that compound between stamp and base is one-side.

At first it is necessary to determine the contact stresses between a stamp and base. Secondly it is necessary to determine areas of slip and backlog between multilayer base and stamp. Also need to determine the stresses and displacements in all layers of the base.

Unlike other publications about the contact of the stamp with a base in this article there is no limit to the number of layers in the base, there is no limit to the type of deformation, there is no limit to the possibility of backlog and slip soles of stamp relative to the base.

From the boundary conditions of considered contact problem author constructed a system of nonlinear integral equations relatively unknown contact stress. This system was discretized. For this, potential area of the contact was divided into a finite number of identical rectangles. The desired functions were considered like constants for each rectangle.

Ultimately, this problem is reduced to solving a system of nonlinear equations for these unknown constants. To solving the discretized system of nonlinear integral equations was proposed special iterative process. This process is based on Seidel's method. Detailed algorithm for determining stresses and areas of the backlog and slip between multilayer base and stamp was written.

Although prove the convergence of the proposed iterative method very difficult, but during its reusable application for different contact problems it not found the cases, in which would not find solution with the required precision. To verify the reliability of the results of calculations by the method proposed in the article was solved well-known Ostriк's problem about the action of cylindrical stamp at the elastic half-space in the presence of friction between the stamp and half-space. The obtained numerical results practically coincided with the Ostriк's results.

To determine the stresses and displacements in the layers of the base are encouraged to use method of exact solutions of the first boundary value problem for the multilayer base – compliances function method. If on the upper boundary of the multilayer base are known normal and tangential stresses this method allows to determine the expressions for the stresses and displacements in layers of base as Hankel's integrals. Under this method a computer program OSNOVA was created. To calculate Hankel's integrals for oscillatory functions with the desired precision was used a special program developed by author.

Key words: multilayer base, stamped with a flat sole, account of friction, backlog, slip.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Контактні задачі теорії пружності відносяться до найбільш складних задач. Розв'язання будь-якої нової задачі потребує розробки спеціальних математичних прийомів. До числа таких задач відносяться просторові контактні задачі для багат шарових основ.

У вихідному положенні штамп (абсолютно тверде тіло) усією плоскою подошвою (плоский штамп) торкається багат шарової основи, не деформуючи її. Відоме прямолінійне поступальне переміщення штампа з вихідного положення та постійний коефіцієнт тертя між контактуючими тілами. Зв'язок штампа з основою вважається одностороннім. Потрібно визначити контактні напруження між штампом і основою, області прослизання та відставання основи від штампа, напруження і переміщення в усіх шарах основи. Багат шарова основа – це пакет однорідних ізотропних шарів, який розташований на абсолютно жорсткому або пружному однорідному ізотропному півпросторі [1, с. 6-10]. Шар обмежений лише двома паралельними площинами, тобто не обмежений у радіальному

напрямку. Будь-які два суміжних шари основи спаяні. Пружні властивості та товщини різних шарів можуть бути різними.

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ ТА ПУБЛІКАЦІЙ

До останнього часу контактні задачі про взаємодію штампа (з плоскою підошвою) з пружною основою розглядалися лише для основ з кількістю шарів не більше двох [2, с. 22-28], [3, с. 51-55]. Причому в цих публікаціях питання про відокремлення основи від штампа не розглядалося. Для суттєво багат шарової основи в роботі [4, с. 12-13] розв'язана осесиметрична контактна задача про відокремлення підошви плоского штампа від основи, у яку він занурюється. Тертя між штампом і основою не враховувалося.

ВИДІЛЕННЯ НЕВИРІШЕНИХ РАНІШЕ ПИТАНЬ

На відміну від наведених вище публікацій про взаємодію плоского штампа з пружною основою в цій статті не накладаються обмеження на кількість шарів в основі, на вид деформації основи, на можливість відокремлення й прослизання підошви штампа відносно основи.

ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ ДОСЛІДЖЕННЯ

Вісь z направимо вглиб основи. Осі x та y направимо так, щоб система координат була правою. Позначимо через Ω_1 область контакту плоского штампа з основою, коли він, торкаючись основи усіма точками підошви, не деформує основу. Позначимо через Ω деяку обмежену плоску область поверхні основи, яка містить в собі область Ω_1 . Для того, щоб сформулювати умови контактної взаємодії тіл, введемо на Ω вектор-функцію $p(s) = (p_1(s), p_2(s), p_3(s))$, яка задає закон розподілу контактних напружень: $p_1(s) = -\sigma_{zz}(s)$, $p_2(s) = -\tau_{zx}(s)$, $p_3(s) = -\tau_{zy}(s)$, де $\sigma_{zz}(s)$, $\tau_{zx}(s)$, $\tau_{zy}(s)$ – компоненти тензора напружень в точці $s \in \Omega$. Введемо на Ω вектор-функцію $v(s) = (v_1(s), v_2(s), v_3(s))$, яка задає переміщення точок основи відносно до протилежних їм точок підошви штампа (тут і далі номери 1, 2 и 3 відповідають напрямкам осей z , x та y).

Пояснимо зміст вектор-функції $v(s)$. Для кожної точки s області Ω визначимо пару точок s_1 і s_2 . Ці точки s_1 та s_2 лежать на перетині прямої, яка проходить через точку s паралельно осі z , з поверхнями штампа і основи відповідно. Після поступального переміщення штампа точки s_1 і s_2 займуть нові положення в просторі. Нехтуючи відносним тангенціальним зміщенням точок s_1 і s_2 при контакті штампа з основою, будемо вважати, що точка s_1 може увійти в контакт лише з точкою s_2 . Припустимо, що в момент початкового положення тіл точки s_1 і s_2 в просторі визначаються координатами $u_1(s) = 0, u_2(s), u_3(s)$ та $\tilde{u}_1(s) = 0, \tilde{u}_2(s), \tilde{u}_3(s)$ відповідно. Після взаємодії тіл ці точки s_1 і s_2 займуть нове положення, яке визначається координатами $w_1(s), w_2(s), w_3(s)$ для s_1 та $\tilde{w}_1(s), \tilde{w}_2(s), \tilde{w}_3(s)$ для s_2 . Згідно з означенням вектор-функції $v(s)$ її компоненти визначатимуться такими рівностями:

$$\begin{cases} v_1(s) = \tilde{w}_1(s) - w_1(s) = \tilde{u}_1(s) + \tilde{v}_1(s) - (u_1(s) + \Delta_1); \\ v_2(s) = \tilde{w}_2(s) - w_2(s) = \tilde{u}_2(s) + \tilde{v}_2(s) - (u_2(s) + \Delta_2); \\ v_3(s) = \tilde{w}_3(s) - w_3(s) = \tilde{u}_3(s) + \tilde{v}_3(s) - (u_3(s) + \Delta_3). \end{cases}$$

Тут вектор-функція $\tilde{v}(s) = (\tilde{v}_1(s), \tilde{v}_2(s), \tilde{v}_3(s))$ задає пружне зміщення точки s деформованої поверхні основи відносно до підшви штамп, причому $\tilde{u}_2(s) - u_2(s) = 0$, $\tilde{u}_3(s) - u_3(s) = 0$ за відсутністю відносного тангенціального зміщення точок s_1 і s_2 .

Припустимо, що на поверхні основи за межами області Ω відсутнє зовнішнє навантаження. Тоді умови контактної задачі можна виразити співвідношеннями [5, с. 11]:

$$\begin{cases} p_1(s) \geq 0, & v_1(s) \geq 0, & p_1(s)v_1(s) = 0, \\ \sqrt{p_2^2(s) + p_3^2(s)} \leq \mu p_1(s), \\ p_2(s)\sqrt{v_2^2(s) + v_3^2(s)} + \mu p_1(s)v_2(s) = 0, \\ p_3(s)\sqrt{v_2^2(s) + v_3^2(s)} + \mu p_1(s)v_3(s) = 0; & s \in \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

Тут константа μ є коефіцієнтом тертя між штампом та основою. Перше співвідношення умов (1) означає, що нормальні напруження $\sigma_z(s)$ під штампом не можуть бути розтягуючими. Друге співвідношення виражає відсутність взаємного проникнення контактуючих тіл одне в одне. Третє співвідношення означає відсутність контактного тиску за межами зони контакту. Останні три співвідношення цієї системи виражають закон тертя Кулона: модуль повного дотичного навантаження в кожній точці s області Ω не перевищує добутку коефіцієнта тертя μ і значення контактного тиску у цій точці. Крім того, якщо в точці s області Ω переміщення поверхні основи під штампом $\sqrt{v_2^2(s) + v_3^2(s)}$ відмінне від нуля, то в цій точці модуль вектора дотичного навантаження дорівнює добутку коефіцієнта тертя μ на значення контактного тиску $p_1(s)$. Зауважимо, що вектор $(p_2(s), p_3(s))$ дотичного навантаження та вектор $(v_2(s), v_3(s))$ переміщення поверхні основи під штампом мають протилежні напрями. Відмітимо, що за законом Кулона в такій формі прийнято відоме припущення [6, с. 102-105]: замість швидкостей відносного прослизання тіл використовувати саме це прослизання.

Зв'язок між функціями $p(s)$ та $v(s)$ можна виразити рівностями

$$\begin{cases} v_1(s) = \sum_{j=1}^3 A_{1j}(p_j)_s - \Delta_1, \\ v_2(s) = \sum_{j=1}^3 A_{2j}(p_j)_s - \Delta_2, \\ v_3(s) = \sum_{j=1}^3 A_{3j}(p_j)_s - \Delta_3, \end{cases} \quad (2)$$

де A_{ij} ($\forall i, j = \overline{1,3}$) – лінійні оператори впливу поверхневих навантажень на переміщення поверхні багатоплощинної основи і функція $\delta_0(s)$, яка визначена на Ω , задає початковий зазор між штампом та основою ($\delta_0(s) = 0$ для всіх $s \in \Omega_1$ і $\delta_0(s)$ дорівнює великій додатній константі для всіх $s \in \Omega \setminus \Omega_1$).

Співвідношення (1) з урахуванням формул (2) матимуть вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 p_1(s) \geq 0, \quad \sum_{j=1}^3 A_{1j}(p_j)_s + \delta_0(s) - \Delta_1 \geq 0, \\
 p_1(s) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 A_{1j}(p_j)_s + \delta_0(s) - \Delta_1 \right) = 0, \\
 \sqrt{p_2^2(s) + p_3^2(s)} \leq \mu p_1(s), \\
 p_2(s) \cdot \sqrt{\left(\sum_{j=1}^3 A_{2j}(p_j)_s - \Delta_2 \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^3 A_{3j}(p_j)_s - \Delta_3 \right)^2} + \mu p_1(s) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 A_{2j}(p_j)_s - \Delta_2 \right) = 0, \\
 p_3(s) \cdot \sqrt{\left(\sum_{j=1}^3 A_{2j}(p_j)_s - \Delta_2 \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^3 A_{3j}(p_j)_s - \Delta_3 \right)^2} + \mu p_1(s) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 A_{3j}(p_j)_s - \Delta_3 \right) = 0; \\
 s \in \Omega.
 \end{array} \right. \quad (3)$$

Якщо оператори впливу A_{ij} ($\forall i, j = \overline{1,3}$) відомі, то поставлена контактна задача полягає у знаходженні невідомих функцій $p_1(s)$, $p_2(s)$, $p_3(s)$, визначених в області Ω та задовольняючих у кожній точці цієї області системі співвідношень (3).

Оператори $A_{ij} : L_1(\Omega) \rightarrow L_1(\Omega)$ для багат шарової основи мають інтегральний вигляд:

$$A_{ij}(p_j)(x, y) = \int_{\Omega} K_{ij}(x-x', y-y') p_j(x', y') dx' dy', \quad i, j = \overline{1,3};$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 K_{11}(x-x', y-y') = \frac{1+\nu}{\pi E_1} \frac{1-\nu_1}{r} - \frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1} \int_0^{\infty} a_1(p) e^{-2ph} J_0(pr) dp, \\
 K_{21}(x-x', y-y') = \frac{1+\nu_1}{\pi E_1} \frac{1-2\nu_1}{2r^2} + \frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1} \frac{x-x'}{r} \int_0^{\infty} b_1(p) e^{-2ph} J_1(pr) dp, \\
 K_{22}(x-x', y-y') = \frac{1+\nu_1}{\pi E_1} \left(\frac{1}{r} - \frac{\nu(y-y')^2}{r^3} \right) - \frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1} \left(\int_0^{\infty} c_1(p) e^{-2ph} J_0(pr) dp - \right. \\
 \left. - \int_0^{\infty} (c_1(p) - b_1(p)) e^{-2ph} \left(\frac{J_1(pr)}{pr} - \frac{(x-x')^2}{r^2} \left(J_0(pr) - \frac{2J_1(pr)}{pr} \right) \right) dp \right), \\
 K_{32}(x-x', y-y') = \frac{1+\nu_1}{\pi E_1} \frac{\nu_1(x-x')(y-y')}{r^3} - \frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1} \frac{(x-x')(y-y')}{r^2} \times \\
 \times \left(\int_0^{\infty} (c_1(p) - b_{r1}(p)) e^{-2ph} \left(J_0(pr) - \frac{2J_1(pr)}{pr} \right) dp \right), \\
 K_{12}(x-x', y-y') = -K_{21}(x-x', y-y'), \\
 K_{23}(x-x', y-y') = K_{32}(x-x', y-y'), \\
 K_{33}(x-x', y-y') = K_{22}(y-y', x-x'), \\
 K_{13}(x-x', y-y') = -K_{21}(y-y', x-x'), \\
 K_{31}(x-x', y-y') = K_{21}(y-y', x-x'), \\
 r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}.
 \end{array} \right. \quad (4)$$

У цих співвідношеннях E_1 , ν_1 – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона верхнього шару основи, h – висота цього шару, $J_\alpha(x)$ – функція Бесселя першого роду та $a_1(p)$, $b_1(p)$, $c_1(p)$, $b_{\tau_1}(p)$ є модифіковані функції податливості для верхнього шару багат шарової основи [7, с. 210-245].

У роботі [8, с. 10-15] доведено, що граничні умови (1) можна записати у вигляді рівностей:

$$\begin{cases} p_1(s) = h(p_1(s) - E \cdot \nu_1(s)), \\ p_2(s) = q(p_2(s) - E \cdot \nu_2(s), p_3(s) - E \cdot \nu_3(s), \mu \cdot p_1(s)), \\ p_3(s) = q(p_3(s) - E \cdot \nu_3(s), p_2(s) - E \cdot \nu_2(s), \mu \cdot p_1(s)), \end{cases} \quad (5)$$

де E є довільною додатною константою. У цих рівностях функції $h(x)$ і $q(x, y, z)$ визначаються відповідно на множинах $(-\infty, +\infty)$ та $(-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty) \times [0, +\infty)$ співвідношеннями:

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0; \\ x, & \text{якщо } x < 0; \end{cases} \quad (6)$$

$$q(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{якщо } \sqrt{x^2 + y^2} \leq z; \\ x \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{якщо } \sqrt{x^2 + y^2} > z. \end{cases} \quad (7)$$

Для чисельного розв'язання співвідношень (3) зручно записати їх за допомогою виразів (5), (6) та (7) у вигляді системи інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} p_1(s) = h \left(p_1(s) - E \cdot \left(\sum_{j=1}^3 A_{1j}(p_j)_s + \delta_0(s) - \Delta_1 \right) \right), \\ p_2(s) = q \left(p_2(s) - E \cdot \left(\sum_{j=1}^3 A_{2j}(p_j)_s - \Delta_2 \right), \right. \\ \left. p_3(s) - E \cdot \left(\sum_{j=1}^3 A_{3j}(p_j)_s - \Delta_3 \right), \mu \cdot p_1(s) \right), \\ p_3(s) = q \left(p_3(s) - E \cdot \left(\sum_{j=1}^3 A_{3j}(p_j)_s - \Delta_3 \right), \right. \\ \left. p_2(s) - E \cdot \left(\sum_{j=1}^3 A_{2j}(p_j)_s - \Delta_2 \right), \mu \cdot p_1(s) \right). \end{cases}$$

Здійснено дискретизацію цієї системи. Для цього задамо область Ω у вигляді відкритого квадрату з площею d , обмеженого відрізками прямих, які паралельні до координатних осей x та y . Розіб'ємо Ω на k^2 неперетинних квадратних областей $\omega_1^k, \omega_2^k, \dots, \omega_{k^2}^k$ рівної площі, які орієнтовані подібно до квадрату Ω . Припустимо, що невідомі функції $p_1(s)$, $p_2(s)$, $p_3(s)$ приймають на кожному елементі ω_i^k постійні значення x_{3i-2} , x_{3i-1} , x_{3i} . Тоді цю систему можна записати у вигляді системи $3n$ скалярних рівнянь з $3n$ числовими невідомими x_1, x_2, \dots, x_{3n} :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{3i-2} = h \left(x_{3i-2} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3n} a_{3i-2j} x_j - b_{3i-2} \right) \right), \\ x_{3i-1} = q \left(x_{3i-1} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3n} a_{3i-1j} x_j - b_{3i-1} \right) \right), \\ x_{3i} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3n} a_{3ij} x_j - b_{3i} \right), \mu \cdot x_{3i-2} \right), \\ x_{3i} = q \left(x_{3i} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3n} a_{3ij} x_j - b_{3i} \right) \right), \\ x_{3i-1} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3n} a_{3i-1j} x_j - b_{3i-1} \right), \mu \cdot x_{3i-2} \right); \quad i = \overline{1, n}. \end{array} \right. \quad (8)$$

У рівняннях (8) значення n дорівнює k^2 , а параметри a_{ij} та b_i визначаються наступними співвідношеннями. Для цієї системи рівнянь запропоновано такий ітераційний процес:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{3n}^{(0)}) \in R^{3n}; \\ x_{3i-2}^{(m+1)} = h \left(\frac{1}{a_{3i-23i-2}} \cdot \left(-\sum_{j=1}^{3i-3} a_{3i-2j} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=3i-1}^{3n} a_{3i-2j} x_j^{(m)} + b_{3i-2} \right) \right), \\ x_{3i-1}^{(m+1)} = q \left(\frac{1}{a_{3i-13i-1}} \cdot \left(-\sum_{j=1}^{3i-2} a_{3i-1j} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=3i}^{3n} a_{3i-2j} x_j^{(m)} + b_{3i-1} \right) \right), \\ \frac{1}{a_{3i3i}} \cdot \left(-\sum_{j=1}^{3i-1} a_{3ij} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=3i+1}^{3n} a_{3ij} x_j^{(m)} + b_{3i} \right), \mu \cdot x_{3i-2}^{(m)} \right), \\ x_{3i}^{(m+1)} = q \left(\frac{1}{a_{3i3i}} \cdot \left(-\sum_{j=1}^{3i-1} a_{3ij} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=3i+1}^{3n} a_{3ij} x_j^{(m)} + b_{3i} \right) \right), \\ \frac{1}{a_{3i-13i-1}} \cdot \left(-\sum_{j=1}^{3i-2} a_{3i-1j} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=3i}^{3n} a_{3i-2j} x_j^{(m)} + b_{3i-1} \right), \mu \cdot x_{3i-2}^{(m)} \right); \\ i = \overline{1, n}; \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (9)$$

Хоча обґрунтувати збіжність цього процесу досить складно, але при багаторазовому його використанні для розв'язування різних контактних задач [8, с. 55-72] не виявлено випадків, у яких би не вдалося отримати наближений розв'язок задачі з потрібною точністю.

Наведемо детальний алгоритм розв'язання контактної задачі, який враховує тертя між штампом з плоскою подошвою і основою та можливість відокремлення основи від штампа.

1. Для відомої області контакту Ω_1 плоскої подошви штампа з багаточисловою основою обираємо область Ω , яка містить у собі область Ω_1 ($\Omega_1 \subset \Omega$). Область Ω повинна мати вигляд відкритого прямокутника, обмеженого відрізками прямих, паралельних до координатних осей x та y .

2. Розбиваємо область Ω на n однакових прямокутних елементів $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, які орієнтовані подібно до прямокутника Ω . Позначимо через $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ центри цих елементів, а через s – площу одного елемента.

3. Обчислюємо коефіцієнти a_{ij} матриці податливості пружної основи, які містяться у співвідношеннях (9), за формулами:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{3i-13i-l} = \int_{\omega_i} K_{3-13-l}(x_i - x, y_i - y) dx dy \quad (\forall l = \overline{0, 2}), \\ a_{3i-23i-1} = a_{3i-23i} = a_{3i-13i-2} = a_{3i-13i} = a_{3i3i-2} = a_{3i3i-1} = 0 \quad \forall i = \overline{0, n}; \\ a_{3i-g3j-l} = s \cdot K_{3-g3-l}(x_i - x_j, y_i - y_j) \quad \forall i, j = \overline{1, n} \quad (i \neq j), \quad \forall g, l = \overline{0, 2}. \end{array} \right.$$

Тут вирази K_{ij} визначаються за формулами (4).

4. Обчислюємо коефіцієнти b_i у співвідношеннях (9) за формулами:

$$b_{3i-2} = \Delta_1 - \delta_0(x_i, y_i), \quad b_{3i-1} = \Delta_2, \quad b_{3i} = \Delta_3, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тут $\bar{\Delta} = (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ – задане прямолінійне поступальне переміщення штампа з вихідного положення. Функція $\delta_0(x, y) = 0$ для всіх точок $(x, y) \in \Omega_1$ і $\delta_0(x, y)$ дорівнює будь-якій додатній константі для всіх $(x, y) \in \Omega \setminus \Omega_1$, яка перевищує значення Δ_1 .

5. Як початкове наближення $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{3n}^{(0)})$ для ітераційного процесу (9) обираємо $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \dots = x_{3n}^{(0)} = 0$, тобто нульовий вектор простору R^{3n} .

6. Обираємо необхідну точність розрахунків $\varepsilon > 0$ та здійснюємо обчислення наближень до розв'язку контактної задачі за формулами (9) доти, доки не буде виконано нерівність

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{3n} (x_i^{(m+1)} - x_i^{(m)})^2} < \varepsilon.$$

Так отримуємо шуканий наближений розв'язок $(x_1^{(m+1)}, x_2^{(m+1)}, \dots, x_{3n}^{(m+1)})$ просторової контактної задачі.

7. Сукупність усіх таких елементів $\omega_i, i = \overline{1, n}$, для кожного з яких виконується умова додатності тисків

$$x_{3i-2}^{(m+1)} > 0,$$

утворюють область контакту штампа з основою. Інші елементи утворюють область, у якій відсутній контакт штампа з основою.

8. Вважаємо, що сукупність усіх елементів, кожний з яких знаходиться в області контакту та задовольняє умові

$$\sqrt{(x_{3i-1}^{(m+1)})^2 + (x_{3i}^{(m+1)})^2} < \mu \cdot x_{3i-2}^{(m)},$$

утворюють область зчеплення. Тут μ – коефіцієнт тертя. Усі інші елементи області контакту утворюють область прослизання поверхні основи відносно штампа.

Для визначення напружень і переміщень в шарах основи створена фортран-програма ОСНОВА. Ця програма базується на методі функцій податливості [1, с. 25-54]. Цей метод дозволяє отримати в шарах основи точні вирази для напружень і переміщень у вигляді інтегралів Ханкеля, якщо на верхній межі $z=0$ основи відомі нормальні й дотичні напруження σ_{zz} , σ_{xz} , σ_{yz} . Для обчислення з високою точністю інтегралів Ханкеля, підінтегральні функції яких є осцилюючими, використовувався спеціальний метод [4 с. 14], який був вдосконалений автором.

ПРИКЛАД

На рисунку 1 співставлені результати розв'язання контактної задачі про дію циліндричного штампа з плоскою підшовою на пружний півпростір з урахуванням кулонового тертя між штампом і основою. Пружний півпростір розглядався як двошарова основа. Модуль Юнга матеріалу півпростору – $E = 2.1 \cdot 10^{12}$ Па, коефіцієнт Пуассона – $\nu = 0.3$. Радіус підшови штампа $R = 2.5 \cdot 10^{-2}$ м. На штамп діє осьова сила $P = 50$ кН. Коефіцієнт тертя $f = 0.25$.

Отримані результати наведені на рисунку 1 у вигляді значень безрозмірної величини $\tilde{\tau} = \frac{R^2}{P} \tau_{xz}$ залежно від безрозмірного параметру $\frac{r}{R}$. Неперервна лінія відповідає розв'язку контактної задачі, який отримано автором роботи [2, с. 27], а кільця відповідають отриманому чисельному розв'язку.

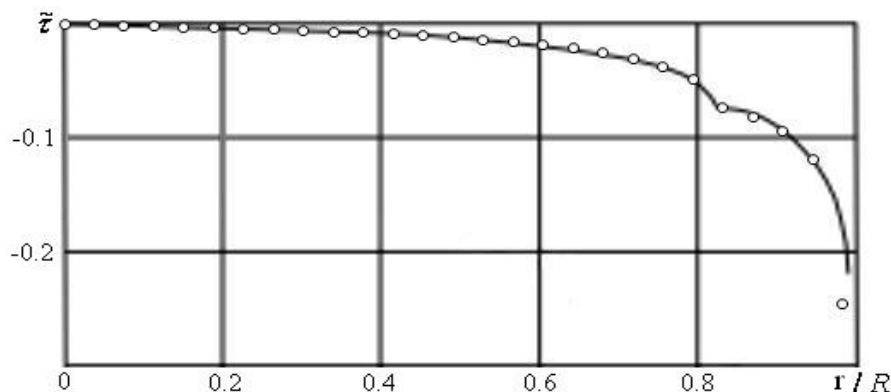


Рис. 1. Розподіл контактних напружень під штампом

Наведені результати, свідчать про добру узгодженість порівнюваних розв'язків. Відзначимо, що відношення $\frac{R_3}{R}$ радіусу зони зчеплення до радіусу області контакту згідно з розв'язком [2, с. 27] дорівнює 0.833. З отриманого чисельного розв'язку задачі випливає, що це відношення дорівнює 0.817. Таким чином відносна похибка значення $\frac{R_3}{R}$ становить приблизно 2%, що свідчить про високу точність отриманих результатів.

ВИСНОВКИ

Запропонований спосіб визначення контактних напружень під штампом з плоскою підшовою. Враховано відставання верхньої границі багатошарової основи від штампу при деформації, враховано прослизання основи відносно штампу з урахуванням тертя. Наведено детальний алгоритм визначення контактних напружень, а також областей відставання основи від штампу і областей прослизання основи відносно штампу. Як приклад запропонованим в статті методом вирішено відому контактну задачу [2, с. 22-28] про дію циліндричного

штампу на пружні напівпростори з урахуванням тертя. Отримані чисельні результати практично співпадають з результатами роботи [2, с. 27].

ЛІТЕРАТУРА

1. Приварников А. К. Упругие многослойные основания / А.К. Приварников, В.Д. Ламзюк. – Днепропетровск, 1985. – 162 с. – Деп. в ВИНТИ 23.12.85, № 8789 – В.
2. Острик В. И. Контактное взаимодействие кругового штампа с упругим полупространством при наличии трения и сцепления / В.И. Острик // Теоретическая и прикладная механика. – 2011. – Вып. 2(48). – С. 22-28.
3. Александров В. М. Пространственная контактная задача для двухслойного упругого основания с заранее неизвестной областью контакта / В.М. Александров, J.J. Kalker, Д.А. Пожарский // Изв. РАН, Механика твердого тела. – 1999. – № 4. – С. 51-55.
4. Матушко Ю. О. Просторові контактні задачі для пружної багат шарової основи з гладкою межею : автореф. дис. на здобуття вч. ступеня канд. фіз.-мат. наук : спец. 01.02.04 «Механіка деформівного твердого тіла» / Ю.О. Матушко. – Донецьк, 2004. – 22 с.
5. Kalker J. J. A survey of the mechanics of contact between solid bodies / J.J. Kalker // ZAMM. – 1977. – В. 57, Н. 5. – Р. Т3-Т17.
6. Кравчук А. С. К постановке краевых задач теории упругости с трением на границе / А.С. Крачук // Механика деформируемого твёрдого тела. – Куйбышев : Изд-во Куйбыш. ун-та, 1976. – Вып. 2. – С. 102-105.
7. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М. : Наука, 1984. – 752 с.
8. Александров А. И. Решение задач контактного взаимодействия упругих тел с использованием нелинейных операторных уравнений / А.И.Александров. – Днепропетровск, 1989. – 74 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т технической механики; 89-2).

REFERENCES

1. Privarnikov, A.K. and Lamzyuk, V.D. (1985), *Uprugiyе mnogoslоynnye osnovaniya* [Elastics multilayer bases], Dnepropetrovsk, 1985.
2. Ostriк, V.I. (2011), “Contact interaction of a circular die with an elastic half-space in the presence of friction and adhesion”, *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika*, iss. 2(48), pp. 22-28.
3. Aleksandrov, V.M., Kalker, J.J. and Pozharsky, D.A. (1999), “The spatial contact problem for two-layered of elastic base with pre-unknown contact area”, *Izv. RAN, Mekhanika tverdogo tela*, no. 4, pp. 51-55.
4. Matuzko, Yu.O. (2004), “The spatial contact problem for elastic multilayered base with smooth boundary”, Thesis abstract for Cand. Sc. (Physical and Mathematical) 01.02.04, Donetsk.
5. Kalker, J.J. (1977), “A survey of the mechanics of contact between solid bodies”, *ZAMM*, В. 57, Н. 5, pp. Т3-Т17.
6. Kravchuk, A.S. (1976), “To raising of regional tasks of theory of resiliency with a friction on a border”, *Mekhanika deformiruemogo tvyordogo tela*, issue 2, pp. 102-105.
7. Kantorovich, L.V. and Akilov, G.P. (1984), *Funktsional'nyy analiz* [Functional analysis], Nauka, Moscow.
8. Aleksandrov, A.I. (1989), *Reshenie zadach kontaktного vzaimodeystviya uprugikh tel s ispol'zovaniem nelineynykh operatornykh uravneniy* [The solution of problems of contact interaction of elastic bodies using nonlinear operator equations], Dnepropetrovsk.