16. Bevza, Yu.G., Dmitrenko, I.M., Lukashenko, A.V. and Turutanov, O.G. (1980), "Abnormal hysteresis in CVCs of non-uniform superconducting thin-film structures", 21-*ye Vsesoyuznoye soveshchaniye po fizike nizkikh temperature. Tezisy dokladov* [21th All-union conference on cryogenics. Theses of lectures], FTINT AN USSR, Kharkov, part I, pp. 185-186.
17. Bogomolov, V.N., Zhuravlev, V.V., Zadorozhnii, A.I., Kolla, E.V., and Kumzerov, Y.A. (1982), "Voltage-current characteristics of a regular system of weakly coupled superconducting particles", *JETP Lett.*, vol. 36, issue 8, pp. 365-367.
18. Romanov, S.G. and Shamshur, D.V. (2000), "Suppression of the superconductivity in 3-dimensional lattice of weakly coupled indium nanoparticles in opal", *Solid State Phys.*, vol. 42, issue 4, pp. 594-602.

УДК 539.377

# ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ЦИЛІНДРА ЗА НЕПОВНОЇ ІНФОРМАЦІЇ ПРО ТЕПЛОФІЗИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ПРИПОВЕРХНЕВОГО ШАРУ, ЯКЩО ВІДОМІ ПОВЕРХНЕВІ КОЛОВІ НАПРУЖЕННЯ

Яцків О. І., м. н. с.

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, м. Львів, 79060, Україна*

viktsya@gmail.com

Досліджено термонапружений стан довгого циліндра за неповної інформації про теплофізичні властивості приповерхневого шару. Зведені параметри тепловіддачі та теплоємності шару входять у записані некласичні нестаціонарні граничні умови задачі, які враховують вплив тонкого приповерхневого шару на теплопровідність циліндра. Розроблений раніше автором метод ідентифікації теплофізичних параметрів за відомою в дискретні моменти часу температурою поверхні поширено на випадок задання поверхневих колових напружень. Побудоване спеціальне подання для напружень через температуру поверхні в цьому разі перетворюється в інтегральне рівняння типу Вольтерра на температуру поверхні циліндра. Невідомий теплофізичний параметр визначається як результат дії отриманого інтегро-диференційного оператора на знайдену з інтегрального рівняння температуру. Здійснено уточнення визначеного параметра перебором його околу і знаходженням такого, для якого середнє квадратичне відхилення поверхневих напружень, обчислених як розв'язок прямої задачі, від заданих буде найменшим. Досліджено стійкість оберненої задачі ідентифікації теплофізичних параметрів щодо малих похибок вхідних даних.

*Ключові слова: термопружність, циліндр, приповерхневий шар, некласичні нестаціонарні граничні умови, теплофізичні параметри, інтегральне рівняння Вольтерра, ідентифікація параметрів, похибка ідентифікації.*

# ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЦИЛИНДРА ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ПРИПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ, ЕСЛИ ИЗВЕСТНЫ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ОКРУЖНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Яцкив А. И., м. н. с.

*Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины, ул. Научная, 3б, г. Львов, 79060, Украина*

viktsya@gmail.com

Исследовано термонапряжённое состояние длинного цилиндра при неполной информации о теплофизических свойствах приповерхностного слоя. Приведенные параметры теплоотдачи и теплоемкости слоя входят в неклассические нестационарные граничные условия, которые учитывают влияние приповерхностного слоя на теплопроводность цилиндра. Разработанный ранее автором метод идентификации теплофизических параметров при известной в дискретных моментах времени температуре поверхности распространен на случай, если заданы поверхностные окружные напряжения. В этом случае построенное для напряжений специальное представление через поверхностную температуру превращается в интегральное уравнение типа Вольтерра на температуру поверхности цилиндра. Неизвестный теплофизический параметр определяется в результате действия полученного интегро-дифференциального оператора на найденную из интегрального уравнения температуру.

Осуществлено уточнение определенного параметра путем перебора его окрестности и нахождения такого, при котором среднеквадратическое отклонение поверхностных окружных напряжений, вычисленных как решение прямой задачи, от заданных будет минимальным. Исследовано устойчивость обратной задачи идентификации теплофизических параметров относительно малых погрешностей входных данных.
*Ключевые слова: термоупругость, цилиндр, приповерхностный слой, неклассические нестационарные граничные условия, теплофизические параметры, интегральное уравнение Вольтерра, идентификация параметров, погрешность идентификации.*

## THERMOELASTIC STATE OF A CYLINDER AT THE INCOMPLETE INFORMATION ABOUT UNDERSURFACE LAYER THERMOPHYSICAL PROPERTIES BUT USING ABOUT SURFASE CIRCUMFERENTIAL STRESSES ADDITIONAL INFORMATION

Yatskiv O. I.

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,*
*The National Academy of Sciences of Ukraine,*
*Naukova str., 3b, L'viv, 79060, Ukraine*

viktsya@gmail.com

The problem of determining the thermostressed state in a long isotropic cylinder at the incomplete information about undersurface thin layer thermophysical properties, that are different from properties of the base material, is considered. Cylinder is heated by the environment of constant temperature. The heat exchange of the cylinder with its environment obeys the Newton law. The mechanical properties of the layer and cylinder are identical. We model the under-surface layer by a thin shell, having a perfect thermal contact with the cylinder. The presence of a thin layer is taken into account in the formulated direct boundary-value problem by means of a nonclassical nonstationary boundary condition. The method of solving the direct problem is based on the splitting of complicated boundary conditions into classical and nonclassical parts and expansion of the solution to the problem into Fourier series in terms of the eigenfunctions of the classical problem.. For the surface temperature of the cylimder. the integro-differential equation with Volterra-type integral operator is obtained from nonclassical part of boundary condition. The undersurface thin layer normalized thermal parameters of heat transfer and heat capacity are the coefficients of the integro-differential equation. This equation transforms into expression for determining the unknown parameter when solving the inverse problem of its identification with input data in the form of surface temperature values. In the present article as an additional information the discrete-in-time data set of the circumferential stresses at the cylinder surface is given. In that case the representation for stresses in the cylinder by the surface temperature is obtained. When surface circumferential stresses are known this representation transforms into integral Volterra equation for determination unknown temperature at the cylinder surface. After determination of the surface temperature the above mentioned expression for identification of the unknown parameter is used. Thermophysical parameter is calculated as a result of integro-differential operator acting on the surface temperature. Identification instability depending upon small input data errors is investigated. In the case of instability the method of going through the neighbourhood of obtained from integro-differential expression unknown parameter is applied. The parameter for which average quadratic difference between surface temperature and input dates is minimal are refined and called as the solution to the inverse boundary thermophysical parameters identification problem. After identification of thermophysical parameter the temperature and stresses in a cylinder are calculated.
*Key words: thermoelasticity, cylinder, undersurface layer, nonclassical nonstationary boundary condition, thermophysical parameters, integral Volterra equation, parameters identification, identification error.*

## ВСТУП

Структура, а відповідно і фізико-механічні властивості приповерхневих шарів елементів конструкцій, можуть змінюватись у процесі виготовлення та під час експлуатації. Крім того, поширеним є нанесення на їхню поверхню спеціальних захисних покриттів. Це змінює фізико-механічну поведінку таких конструктивних елементів і додатково ускладнює дослідження термонапруженого стану. Актуального значення набуває проблема визначення реальних теплофізичних властивостей поверхнево неоднорідних тіл. Зважаючи на забезпечення належних умов експлуатації, адекватним є застосування неруйнівних методів, зокрема непрямих вимірювань невідомих параметрів на основі методів теорії обернених задач (ОЗ) [1-7]. Як додаткові умови для ОЗ переважно використовують відомі значення температури або теплового потоку, виміряні в тілі чи на його поверхні [6, 7]. У праці [8] розроблено метод ідентифікації зведених теплофізичних параметрів тонкого приповерхневого шару, якщо в дискретні моменти часу задано значення температури поверхні. Цей метод оснований на побудованій спеціальній структурі розв’язку [9] некласичної прямої задачі теплопровідності з узагальненими нестаціонарними граничними умовами, які враховують кінетику процесу теплопровідності на поверхні циліндра. Такі умови відображають наявність тонкого приповерхневого шару, який замінено абстрактною фізичною поверхнею, наділеною його усередненими фізико-механічними властивостями, і були вперше коректно виведені в працях [10, 11]. Зазначена структура розв'язку [9] подає температуру в циліндрі через поверхневу температуру, на яку отримано інтегро-диференційне рівняння за часом з інтегральним оператором типу Вольтерра. Особливістю отриманого рівняння є входження у нього в явному вигляді зведених теплофізичних параметрів приповерхневого шару: тепловіддачі з поверхні та теплоємності. У разі відомої температури поверхні і невідомих теплофізичних параметрів це рівняння перетворюється у вирази для параметрів, з яких вони визначаються як результат дії інтегро-диференційного оператора на температуру поверхні циліндра, що дає нам розв'язок ОЗ межової параметричної ідентифікації [8]. Однак ОЗ належать до некоректних задач, зокрема є нестійкими до малих відхилень вхідних даних [7, 12]. Тому в цій же праці [8] було організовано перебір околу знайденого параметра з відшуканням такого, для якого середнє квадратичне відхилення температури поверхні, обчисленої як розв'язок прямої задачі, від заданої буде найменшим. У кінцевому підсумку знайдене значення параметра є результатом процесу ідентифікації. Одночасно з ідентифікацією невідомого теплофізичного параметра було отримано інтервали його значень, для яких відхилення обчисленої температури від заданої як вхідні дані ОЗ не виходить за межі деякого наперед встановленого діапазону. Відомості про такі інтервали можуть бути корисними під час проектування поверхнево неоднорідних елементів конструкцій.

Тут зазначений метод поширено на випадок квазістатичної осесиметричної задачі термопружності з неповними відомостями про теплофізичні параметри приповерхневого шару довгого циліндра, який нагрівається довкіллям, якщо в дискретні моменти часу задано поверхневі колові напруження. Використано зв'язаність полів температури та напружень і на основі побудованої в [9] структури розв'язку прямої задачі отримано інтегральні співвідношення між напруженнями та температурою поверхні циліндра. Якщо поверхневі колові напруження відомі, ці співвідношення перетворюються в інтегральне рівняння типу Вольтерра на невідому температуру поверхні. Для інтерполювання заданих у низці моментів часу напружень та розв'язання отриманого інтегрального рівняння використано сплайни [13]. За знайденою температурою, застосовуючи розроблений у [8] метод, визначено невідомий параметр – зведену тепловіддачу приповерхневого шару, або його теплоємність. Досліджено стійкість ОЗ щодо точності задання вхідних даних (зашумленості) та похибку ідентифікації залежно від величини іншого, відомого параметра. Отримано інтервали значень параметрів, для яких відхилення обчисленої температури від заданої не перевищує наперед задану величину. Порівняно точність ідентифікації в разі відомих у низці моментів часу поверхневих напружень з тим, коли задано дискретні значення температури поверхні.

## ФОРМУЛЮВАННЯ ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРЯМОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ

Розглядаємо довгий суцільний ізотропний циліндр радіуса $r_1$, що нагрівається середовищем сталої температури $T_c$. Тонкий приповерхневий шар циліндра має неоднакові з основним матеріалом теплофізичні властивості. Використовуємо запропонований Я.С. Підстригачем підхід [10], який полягає у моделюванні приповерхневих і міжфазних неоднорідностей за допомогою тонкої оболонки зі спрямуванням її товщини до нуля і одночасним усередненням фізико-механічних характеристик. Такий підхід вилучає з розгляду оболонку, замінюючи її абстрактною фізичною поверхнею, і приводить до задач із узагальненими некласичними гранично-контактними умовами [9-11]. Характерною особливістю цих умов, які враховують вплив приповерхневих шарів на поведінку тіла, є наявність в них других похідних за поверхневими координатами та похідної за часом від температури. У разі осесиметричної задачі і незалежності теплового та механічного навантажень від повздовжньої координати в цих умовах залишається похідна за часом від температури на межі тіла, що дає змогу враховувати кінетику процесу теплопровідності на поверхні контакту тіл, чи тіла і довкілля.

Запишемо для безрозмірних величин у циліндричній системі координат рівняння теплопровідності

$$\Delta T(r,\tau)=\alpha^2\frac{\partial T(r,\tau)}{\partial\tau},\quad 0\le r<r_1 \tag{1}$$

й некласичні узагальнені граничні умови [9, 10]

$$\frac{\partial T(r,\tau)}{\partial r}+BT(r,\tau)+H\frac{\partial T(r,\tau)}{\partial\tau}=0,\quad r=r_1. \tag{2}$$

Тут $T(r,\tau)$ – температура циліндра; $\alpha^{-2}$ – коефіцієнт температуропровідності; $\Delta$ – оператор Лапласа в циліндричній системі координат; *B*, *H* – відповідно зведені коефіцієнти тепловіддачі й об’ємної теплоємності приповерхневого шару; $r$ – радіальна координата; $\tau$ – час.

Задаємо сталий початковий розподіл температури в циліндрі

$$T(r,0)=T^0,\quad \tau=0, \tag{3}$$

а також умови обмеженості розв’язку й осесиметрії

$$T(r,\tau)<\infty,\quad \frac{\partial T(r,\tau)}{\partial r}=0,\quad r=0. \tag{4}$$

Для знаходження напружено-деформованого стану циліндра записуємо рівняння рівноваги в переміщеннях

$$\Delta\bar{u}+(1-2\nu)^{-1}\,grad\,div\bar{u}=2(1+\nu)(1-2\nu)^{-1}\alpha_T gradT,\quad r\in[0,r_1], \tag{5}$$

де $\bar{u}$ – вектор переміщень; $\nu$ – коефіцієнт Пуассона; $\alpha_T$ – коефіцієнт лінійного температурного розширення.

Напруження визначаємо через переміщення, використовуючи закон Дюгамеля-Неймана

$$\begin{gathered}\sigma_{rr}(r,\tau)=(2\mu+\lambda)\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\lambda}{r}u_r+\lambda\frac{\partial u_z}{\partial z}-(2\mu+3\lambda)\alpha_T T(r,\tau),\\ \sigma_{\theta\theta}(r,\tau)=(2\mu+\lambda)\frac{1}{r}u_r+\lambda\frac{\partial u_r}{\partial r}+\lambda\frac{\partial u_z}{\partial z}-(2\mu+3\lambda)\alpha_T T(r,\tau),\\ \sigma_{zz}(r,\tau)=(2\mu+\lambda)\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{\lambda}{r}u_r+\lambda\frac{\partial u_r}{\partial r}-(2\mu+3\lambda)\alpha_T T(r,\tau),\end{gathered} \tag{6}$$

де $\sigma_{rr}(r,\tau)$, $\sigma_{\theta\theta}(r,\tau)$, $\sigma_{zz}(r,\tau)$ – радіальні, кільцеві та осьові напруження; $\lambda$, $\mu$ – сталі Ляме.

Механічним впливом приповерхневого шару на напружений стан нехтуємо. Поверхню циліндра вважаємо ненавантаженою

$$\sigma_{rr}=0,\quad r=r_1. \tag{7}$$

Вимагаємо виконання умови рівноваги для довільного поперечного перерізу циліндра

$$\int_0^{r_1} r\sigma_{zz}(r,\tau)\,dr=0 \tag{8}$$

та умови обмеженості напружень в центрі циліндра

$$\sigma_{rr}(0,\tau)<\infty, \quad \sigma_{\varphi\varphi}(0,\tau)<\infty. \tag{9}$$

Розв'язки рівнянь рівноваги шукаємо у формі Папковича-Нойбера [10], враховуючи, що у випадку осесиметричної задачі колові переміщення дорівнюють нулю. Інші компоненти переміщень, зважаючи на осесиметрію задачі, мають вигляд

$$\begin{gathered} u_r(r,\tau)=\Lambda_r(r,\tau)+\frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial r}\left(\Lambda(r,\tau)-r\Lambda_r(r,\tau)-z\Lambda_z(r,z)\right), \\ u_z(r,\tau)=\Lambda_z(r,z)+\frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Lambda(r,\tau)-r\Lambda_r(r,\tau)-z\Lambda_z(r,z)\right), \end{gathered} \tag{10}$$

де

$$\Lambda_z(r,z)=K_1(\tau)z, \quad \Lambda_r(r,\tau)=K_2(\tau)r, \tag{11}$$

а складова $\Lambda(r,\tau)$ подання (10)-(11) є частковим розв'язком такого рівняння

$$\Delta\Lambda(r,\tau)=4(1+\nu)\alpha_T T(r,\tau). \tag{12}$$

Для визначення температурних напружень використовуємо співвідношення Дюгамеля-Неймана (6). Як результат, за урахування подання (10) і конкретизації з умов (7) та (8) довільних функції часу $K_1(\tau)$ і $K_2(\tau)$, отримуємо вирази для напружень, записані через $\Lambda(r,\tau)$

$$\begin{gathered} \sigma_{rr}(r,\tau)=\frac{2\mu}{4(1-\nu)}\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial\Lambda}{\partial r}+\frac{1}{r_1}\left.\frac{\partial\Lambda}{\partial r}\right|_{r=r_1}\right], \\ \sigma_{\theta\theta}(r,\tau)=\frac{2\mu}{4(1-\nu)}\left[-\frac{\partial^2\Lambda}{\partial r^2}+\frac{1}{r_1}\left.\frac{\partial\Lambda}{\partial r}\right|_{r=r_1}\right], \\ \sigma_{zz}(r,\tau)=\frac{2\mu}{4(1-\nu)}\left[-\frac{\partial^2\Lambda}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\Lambda}{\partial r}+\frac{2}{r_1}\left.\frac{\partial\Lambda}{\partial r}\right|_{r=r_1}\right]. \end{gathered} \tag{13}$$

Тут $\lambda$, $\mu$ – сталі Ляме, $\nu$ – коефіцієнт Пуассона.

Після того, як буде розв'язано задачу теплопровідності (1)-(4), знаходимо $\Lambda(r,\tau)$ як частковий розв'язок рівняння (12), і визначаємо напруження в циліндрі.

У праці [9] побудовано для температури циліндра таке подання через температуру його поверхні

$$T(r,\tau)=\frac{r^2}{r_1^2}\frac{\Phi(\tau)}{B}+2\sum_{n=1}^{\infty}E_n(\tau)\frac{J_0(\alpha\mu_n r)}{\alpha\mu_n r_1 J_1(\alpha\mu_n r_1)}, \tag{14}$$

де $\Phi(\tau)$ – температура поверхні циліндра; $J_0(x)$, $J_1(x)$ – функції Бесселя; $\mu_n$ – нулі функції Бесселя $J_0(x)$. Функція часу $E_n(\tau)$ залежить від $\Phi(\tau)$ і має вигляд

$$E_n(\tau)=T^0 e^{-\mu_n^2\tau}-\frac{\Phi(\tau)}{B}\frac{(\alpha\mu_n r_1)^2-4}{(\alpha\mu_n r_1)^2}+\frac{2\mu_n^2}{B}\int_0^{\tau}\Phi(t)e^{-\mu_n{}^2(\tau-t)}dt. \tag{15}$$

Поверхнева температура $\Phi(\tau)$ задовольняє інтегро-диференційне рівняння з інтегральним оператором типу Вольтерра

$$\frac{H}{B}\frac{\partial\Phi(\tau)}{\partial\tau}+\left(1+\frac{2}{r_1 B}\right)\Phi(\tau)=\frac{2}{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}E_n(\tau). \qquad (16)$$

Виразимо напруження в циліндрі через температуру поверхні. Підставляючи $T(r,\tau)$ в рівняння (12), знаходимо його частковий розв'язок у такому вигляді:

$$\Lambda(r,\tau)=4(1+\nu)\alpha_T\left\{\frac{r^4}{16r_1^2}\frac{\Phi(\tau)}{B}+2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{\Phi(\tau)}{B}\frac{(\alpha\mu_n r_1)^2-4}{(\alpha\mu_n r_1)^2}-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-T^0 e^{-\mu_n^2\tau}\right)\frac{1}{(\alpha\mu_n)^3 r_1}-\frac{1}{\alpha^2\mu_n r_1}\int_0^{\tau}\frac{\Phi(t)}{B}e^{-\mu_n^2(\tau-t)}dt\right]\frac{J_0(\alpha\mu_n r)}{J_1(\alpha\mu_n r_1)}\right\}. \qquad (17)$$

Вирази (13) з урахуванням (17) дають подання для напружень у циліндрі через температуру його поверхні $\Phi(\tau)$. Через громіздкість ці подання тут не наведені.

Таким чином побудовано спеціальну структуру розв'язку прямої осесиметричної квазістатичної задачі термопружності (1)-(9) для довгого циліндра з тонким приповерхневим шаром, у якій температуру циліндра і напруження в ньому подано через температуру поверхні, для відшукання якої записано інтегро-диференційне рівняння (16) з інтегральним оператором типу Вольтерри. Для розв'язання цього рівняння в [9] запропоновано використовувати апроксимації $\Phi(\tau)$ кубічними сплайнами. Там же досліджено оптимальність розбиття часового інтервалу та вибір кількості членів ряду в (14), (16) та (17) для забезпечення належної точності обчислення температури та напружень у циліндрі. Крім того, у [9] знайдено аналітичний розв'язок задачі теплопровідності (1)-(4) у вигляді розвинення в узагальнений ряд Фур'є, на основі отриманих співвідношень узагальненої ортогональності власних функцій некласичної узагальненої задачі Штурма-Ліувілля зі спектральним параметром в граничній умові. Аналітично-числовий розв'язок задачі теплопровідності на основі подання поля температури в циліндрі через температуру поверхні (14), (15) було порівняно з аналітичним і встановлено його задовільну точність.

## ФОРМУЛЮВАННЯ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ З ІДЕНТИФІКАЦІЇ ТЕПЛОФІЗИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ПРИПОВЕРХНЕВОГО ШАРУ ТА МЕТОД ЇЇ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Нехай невідомий один із коефіцієнтів $B$ чи $H$ нестаціонарної граничної умови (2), якою задаємо теплообмін циліндра з довкіллям за врахування впливу тонкого приповерхневого шару на теплопровідність у циліндрі. Натомість у низці моментів часу відомі значення поверхневих колових напружень $\sigma_{\theta\theta}(r_1,\tau)$. Потрібно за заданими дискретними значеннями напружень, відомим іншим теплофізичним параметром приповерхневого шару, на основі рівняння теплопровідності в циліндрі (1), умови (2), заданого початкового розподілу температури (3), рівнянь рівноваги (5), співвідношень Дюгамеля-Неймана (6) та умов для напружень (7), (8) визначити невідомий параметр і знайти розподіл температури й напружень у циліндрі.

Використаємо зв'язаність полів температури і напружень [14, 15]. Вирази (13), де $\Lambda(r,\tau)$ має вигляд (17), дають залежність напруженого стану циліндра від температури поверхні. Якщо покласти в них $r=r_1$, то отримаємо зв'язок між поверхневими напруженнями і поверхневою температурою у вигляді інтегральних за часом співвідношень, які в разі відомих напружень перетворюються в інтегральне рівняння типу Вольтерри другого роду на невідому температуру поверхні $\Phi(\tau)$. Для розв'язання цього інтегрального рівняння використовуємо сплайн-інтерполювання $\sigma_{\theta\theta}(r_1,\tau)$ за їх дискретними значеннями та сплайн-апроксимацію розв'язку. Використання сплайнів зумовлюється їх відносною стійкістю до локальних збурень, хорошою збіжністю та простотою реалізації обчислювальних алгоритмів [13]. Після того, як температуру поверхні знайдено, невідомий теплофізичний параметр визначається з (16) як результат дії на неї інтегро-диференційного оператора. Отже, ОЗ межової параметричної ідентифікації розв'язана. Однак на практиці вхідні дані для ОЗ переважно задаються з певною похибкою, яка з'являється в процесі їх вимірювань, що пов'язано з існуванням межі точності вимірювальних приладів та можливими впливами різноманітних незначних побічних факторів, які супроводжують процеси нагріву та деформування. Тому виникає потреба в дослідженні запропонованого підходу до визначення теплофізичних параметрів на стійкість щодо малих збурень заданих колових поверхневих напружень.

Для ілюстрації розроблених методів розв'язування ОЗ часто використовують комп'ютерну симуляцію, яка полягає в розв'язуванні прямої задачі за відомих значень параметрів і використанні отриманих розв'язків, як даних вимірювань. Похибка вимірювань імітується за допомогою малих випадкових збурень цих розв'язків. У нашому дослідженні за допомогою генератора випадкових чисел формуємо випадкові відхилення заданих напружень і відслідковуємо зміну параметра, що ідентифікується, порівняно з його точним значенням, за якого розв'язували пряму задачу під час комп'ютерної симуляції. Оскільки через нестійкість ОЗ до малих збурень вхідних даних визначене з (16) значення невідомого параметра може значно відрізнятись від точного, здійснюємо перебір околу знайденого параметра, шукаючи такі його значення, для якого середнє квадратичне відхилення поверхневих колових напружень, обчислених як розв'язок прямої задачі, від заданих у низці моментів часу буде найменшим. Знайдене значення параметра є результатом його ідентифікації. Обчислюємо похибку ідентифікації і робимо порівняльний аналіз її величини залежно від точності задання вхідних даних та від величини іншого, відомого параметра. Під час реалізації процесу перебору околу, знайденого з (16) параметра, одночасно фіксуємо ті значення параметрів, для яких відхилення обчислених колових напружень від заданих не перевищують наперед встановлене 2% відхилення. Відомості про величину таких інтервалів параметрів, для яких значення температури та напружень не виходять за межі деякого наперед встановленого діапазону можуть бути корисними на стадії проектування елементів конструкцій з поверхневими неоднорідностями та прогнозування їх надійності. Порівнюємо точність ідентифікації та довжину зазначених інтервалів значень параметрів з такими, якщо як вхідні дані ОЗ використано температуру поверхні циліндра [8].

## РЕЗУЛЬТАТИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ТЕПЛОФІЗИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ

В таблицях 1-2 проілюстровано результати ідентифікації параметрів $B$ і $H$ за відомими на поверхні циліндра в дискретних моментах часу коловими напруженнями. Наведено похибку ідентифікації та порівняно точність визначення цих параметрів у випадку, якщо вхідними даними ОЗ ідентифікації є температура поверхні $\Phi(\tau)$.

У першому стовпчику таблиць 1-2 вказано точні значення параметрів, які ідентифікуються за певного фіксованого значення іншого параметра. У другому стовпчику стоїть значення параметра, отримане з інтегро-диференційного виразу (16) за знайденою з інтегрального рівняння, якщо відомі поверхневі колові напруження, температурою поверхні. Далі наведено похибку визначеного з інтегро-диференційного виразу (16) параметра. У четвертому стовпчику показано інтервали значень шуканого параметра, для яких обчислені колові напруження на поверхні циліндра не перевищуватимуть наперед встановлене 2% відхилення від відповідних згладжених вхідних даних. У наступних двох стовпчиках наведено розв'язки оберненої задачі ідентифікації межового теплофізичного параметра (уточнені після перебору околу визначеного з (16) параметра) та похибка ідентифікації відносно його точного значення. І нарешті, в останніх двох стовпчиках продемонстровано результати ідентифікації, якщо за розв'язки оберненої задачі брати середини зазначених інтервалів, значення параметра з яких забезпечує не більше, ніж 2% відхилення обчислених для них поверхневих напружень від відповідних згладжених вхідних даних.

Таблиця 1 – Визначене $H^{*}_{інт}$ з інтегро-диференціального виразу (16) та уточнене ідентифіковане значення $H^{*}_{об}$ параметра H, якщо задані поверхневі колові напруження. Похибки визначення $\delta_{інт}$ для $H^{*}_{інт}$ і $\delta_{об}$ для $H^{*}_{об}$ відносно точного значення параметра $H_T$, та інтервали $\zeta$ значень H, для яких відновлені колові напруження не виходять за межі 2% діапазону їх зміни. Середина $H^{*}_{сер}$ інтервалу $\zeta$ та похибка $\delta_{сер}$ для значення $H^{*}_{сер}$

| | $H_T$ | $H^{*}_{інт}$ | $\delta_{інт}$, % | $\zeta$ | $H^{*}_{об}$ | $\delta_{об}$, % | $H^{*}_{сер}$ | $\delta_{сер}$, % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0,5 | 0,508 | 1,6 % | [0,482; 0,497] | 0,488 | 2,4 % | 0,489 | 2,1 % |
| **2** | 1 | 1,09 | 9 % | [0,95; 1,001] | 0,97 | 3 % | 0,976 | 2,4 % |
| **3** | 1,5 | 1,6 | 8 % | [1,434; 1,502] | 1,46 | 2,7 % | 1,468 | 2,13 % |
| **4** | 2 | 1,92 | 4 % | [1,901; 1,998] | 1,948 | 2,6 % | 1,95 | 2,5 % |
| **5** | 3 | 2,97 | 1 % | [2,863; 3,001] | 2,93 | 2,3 % | 2,93 | 2,3 % |
| **6** | 4 | 3,96 | 1 % | [3,823; 3,999] | 3,904 | 3,2 % | 3,911 | 2,225 % |
| **7** | 5 | 4,95 | 1 % | [4,784; 5] | 4,88 | 2,4 % | 4,89 | 2,2 % |
| Задача розв'язувалась за фіксованого параметра $B$ = 0,5 | | | | | | | | |
| **1** | 0,5 | 0,68 | 36 % | [0,476; 0,507] | 0,486 | 2,8 % | 0,49 | 2 % |
| **2** | 1 | 1,035 | 3,5 % | [0,96; 0,996] | 0,972 | 2,8 % | 0,978 | 2,2 % |
| **3** | 1,5 | 1,26 | 16 % | [1,433; 1,495] | 1,458 | 2,8 % | 1,464 | 2,4 % |
| **4** | 2 | 2,17 | 8,5 % | [1,904; 2,002] | 1,946 | 2,7 % | 1,953 | 2,35 % |
| **5** | 3 | 3,24 | 8 % | [2,872; 3,004] | 2,92 | 2,66 % | 2,94 | 2 % |
| **6** | 4 | 4,3 | 7,7 % | [3,84; 4,005] | 3,9 | 2,5 % | 3,92 | 2 % |
| **7** | 5 | 5,38 | 7,6 % | [4,808; 5,006] | 4,879 | 2,42 % | 4,907 | 1,86 % |
| Задача розв'язувалась за фіксованого параметра $B$ = 2 | | | | | | | | |
| **1** | 0,5 | 0,69 | 39 % | [0,448; 0,501] | 0,476 | 4,8 % | 0,475 | 5 % |
| **2** | 1 | 1,22 | 22 % | [0,954; 1,004] | 0,97 | 3 % | 0,979 | 2,1 % |
| **3** | 1,5 | 1,65 | 10 % | [1,44; 1,501] | 1,46 | 2,7 % | 1,47 | 2 % |
| **4** | 2 | 2,01 | 0,6 % | [1,928; 1,994] | 1,947 | 2,65 % | 1,96 | 2 % |
| **5** | 3 | 2,5 | 16,5 % | [2,872; 2,991] | 2,92 | 2,66 % | 2,93 | 2,3 % |
| **6** | 4 | 4,33 | 8,3 % | [3,811; 4,006] | 3,896 | 2,6 % | 3,909 | 2,275 % |
| **7** | 5 | 5,4 | 8 % | [4,78; 5,007] | 4,87 | 2,6 % | 4,89 | 2,2 % |
| Задача розв'язувалась за фіксованого параметра $B$ = 5 | | | | | | | | |

Порівнюючи наведені в таблицях результати з тими, що представлені у праці [8], де вхідними даними ОЗ ідентифікації теплофізичних параметрів приповерхневого шару є дискретні за часом значення температури поверхні циліндра, бачимо, що в разі задання поверхневих колових напружень точність визначення параметрів є кращою. Це означає, що процес ідентифікації в цьому разі є більш стійким до малих збурень вхідних даних. Задовільною є точність визначення невідомих параметрів також, якщо за розв'язки оберненої задачі ідентифікації межових теплофізичних параметрів брати середини інтервалів, що в передостанньому стовпчику зазначених таблиць. Слід зазначити, що похибка визначення параметрів залежить від конкретного випадкового збурення вхідних даних. Похибка ж для уточнених ідентифікованих значень параметрів розподілена більш рівномірно.

Таблиця 2 – Визначене $B^*_{інт}$ з інтегро-диференціального виразу (16) та уточнене ідентифіковане значення $B^*_{об}$ параметра B, якщо задані поверхневі колові напруження. Похибки визначення $\delta_{інт}$ для $B^*_{інт}$ і $\delta_{об}$ для $B^*_{об}$ порівняно з точним значенням параметра $B_T$, та інтервали $\zeta$ значень B, для яких відновлені поверхневі колові напруження не виходять за межі 2% діапазону їх зміни. Середина $B^*_{сер}$ інтервалу $\zeta$ та похибка $\delta_{сер}$ для значення $B^*_{сер}$

| | $B_T$ | $B^*_{інт}$ | $\delta_{інт}$, % | $\zeta$ | $B^*_{об}$ | $\delta_{об}$, % | $B^*_{сер}$ | $\delta_{сер}$, % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0,5 | 0,496 | 0,7 % | [0,489; 0,512] | 0,506 | 1,2 % | 0,5005 | 0,1 % |
| **2** | 1 | 0,993 | 0,7 % | [0,976; 1,027] | 1,014 | 1,4 % | 1,0015 | 0,15 % |
| **3** | 2 | 1,8 | 10 % | [1,93; 2,064] | 2,03 | 1,5 % | 1,997 | 0,15 % |
| **4** | 3 | 2,78 | 7,5 % | [2,888; 3,117] | 3,05 | 1,66 % | 3,0025 | 0,08 % |
| **5** | 4 | 3,685 | 7,866 % | [3,876; 4,212] | 4,1 | 2,5 % | 4,044 | 1,1 % |
| **6** | 5 | 4,55 | 9 % | [4,87; 5,332] | 5,12 | 2,4 % | 5,101 | 2,02 % |
| Задача розв'язувалась за фіксованого параметра ***H*** = 0,5 | | | | | | | | |
| **1** | 0,5 | 0,47 | 6 % | [0,499; 0,519] | 0,512 | 2,4 % | 0,509 | 1,8 % |
| **2** | 1 | 0,99 | 1 % | [1; 1,018] | 1,016 | 1,6 % | 1,009 | 0,9 % |
| **3** | 2 | 1,956 | 2,2 % | [2,006;2,06 ] | 2,04 | 2 % | 2,033 | 1,6 % |
| **4** | 3 | 2,84 | 5 % | [2,984; 3,079] | 3,053 | 1,77 % | 3,0315 | 1,05 % |
| **5** | 4 | 4,74 | 18,5 % | [3,978; 4,129] | 4,08 | 2 % | 4,0535 | 1,34 % |
| **6** | 5 | 4,45 | 11 % | [4,973; 5,172] | 5,1 | 2 % | 5,0725 | 1,45 % |
| Задача розв'язувалась за фіксованого параметра ***H***=1 | | | | | | | | |
| **1** | 0,5 | 0,505 | 1 % | [0,501; 0,522] | 0,51 | 2 % | 0,51 | 2 % |
| **2** | 1 | 1,01 | 1 % | [1;1,046 ] | 1,024 | 2,4 % | 1,023 | 2,3 % |
| **3** | 2 | 1,87 | 6 % | [1,998; 2,081] | 2,05 | 2,5 % | 2,04 | 2 % |
| **4** | 3 | 3,35 | 11 % | [2,974; 3,107] | 3,06 | 2 % | 3,04 | 1,3 % |
| **5** | 4 | 3,48 | 13 % | [3,973; 4,136] | 4,086 | 2,15 % | 4,05 | 1,25 % |
| **6** | 5 | 4,5 | 10 % | [4,915; 5,148] | 5,08 | 1,6 % | 5,03 | 0,6 % |
| Задача розв'язувалась за фіксованого параметра ***H*** = 2,5 | | | | | | | | |

Якщо вхідні дані задано точно, без внесення випадкових збурень, то в усіх випадках як результат ідентифікації отримуємо точні значення параметрів, які використовувались для комп'ютерної симуляції цих даних.

Після того, як визначено невідомий параметр, обчислюємо поля температури й напружень у циліндрі. Як слідує з наведеної процедури ідентифікації, значення цих полів на поверхні циліндра відхиляються від обчислених під час комп'ютерної симуляції за точних значень параметрів не більше ніж на наперед задані 2%. Температура й напруження всередині циліндра теж не виходять за межі цього наперед встановленого 2% діапазону.

## ВИСНОВКИ

Розглянуто задачу про дослідження термонапруженого стану довгого циліндра, який нагрівається довкіллям сталої температури, за неповної інформації про теплофізичні властивості його приповерхневого щару. Шар змодельовано тонкою оболонкою, фізико-механічні властивості якої усереднюються за товщиною, зі спрямуванням її до нуля. У такий спосіб вплив приповерхневого шару на термонапружений стан циліндра враховується за допомогою некласичних нестаціонарних граничних умов теплообміну з довкіллям. За невідомого теплофізичного параметра приповерхневого шару сформульована задача є недоозначена. Як додаткові умови задано дискретні за часом значення поверхневих колових напружень. Побудовано подання температури й напружень у циліндрі через температуру його поверхні, на яку отримано інтегро-диференційне рівняння з інтегральним оператором типу Вольтерри. Зведені теплофізичні параметри входять у це рівняння у явному вигляді. Якщо поверхнева температура відома, інтегро-диференційне рівняння перетворюється у вирази для визначення невідомих параметрів. У разі задання поверхневих колових напружень і невідомої температри поверхні, останню знайдено з інтегрального рівняння Вольтерри другого роду, в яке перетворюється подання для напружень. За знайденою поверхневою температурю визначено невідомий параметр. На основі комп'ютерної симуляції вхідних даних оберненої задачі параметричної ідентифікації досліджено її стійкість до похибки задання цих даних. Обчислені як розв'язок прямої задачі значення колових напружень на поверхні циліндра за відомих параметрів збурювались малими відхиленнями порядку 2%. У цьому разі здійснено перебір околу визначеного параметра, з відшуканням такого його значення, за якого середнє квадратичне відхилення поверхневих колових напружень від заданих буде мінімальним. Проаналізовано похибку визначення невідомого параметра залежно від величини іншого, відомого параметра. Одночасно з ідентифікацією параметра знайдено інтервали його значень, для яких відхилення колових напружень від заданих не виходитиме за межі встановленого 2% діапазону. Виявлено, що точність ідентифікації теплофізичних параметрів приповерхневого шару є кращою в разі задання вхідними даними поверхневих колових напружень, порівняно із заданням значень поверхневої температури. Після визначення невідомого параметра обчислено поля температури й напружень у циліндрі.

## ЛІТЕРАТУРА


1. Alifanov O. M. Inverse Heat Transfer Problems / O.M. Alifanov. – Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 1994. – 348 c.
2. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела / А.О. Ватульян. – М. : Физматлит, 2007. – 223 с.
3. Дейнека В. С. Системный анализ упругих и термоупругих неоднородных тел / В.С. Дейнека, И.В. Сергиенко. – К. : Наук. думка, 2012. – 511 с.
4. Мацевитый Ю. М. Обратные задачи теплопроводности. В 2-х т. / Ю.М. Мацевитый // НАН Украины, институт проблем машиностроения. – К. : Наукова думка, 2003. – 408 с.
5. Model R. Thermal Transport Properties of Layered Materials: Identification by a new Numerical Algorithm for Transient Measurements / R. Model // Int. J. Thermophys. – 2005. – V.26, N 1. – P. 165-178.
6. Чекурін В. До ідентифікації параметрів багатошарових тіл із використанням теплового зондування / В. Чекурін // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2008. – Вип. 7. – С. 9-20.
7. Бек Дж. Некорректные обратные задачи теплопроводности / Дж. Бек, Б. Блакуэлл, Ч. Сент-Клэр, мл. – М. : Мир, 1989. – 312 с.
8. Швець Р. М. Ідентифікація межових теплофізичних параметрів циліндра за нестаціонарних умов теплообміну з довкіллям / Р.М. Швець, О.І. Яцків, Б.Я. Бобик // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2010. – Вип. 12. – С. 198-207.

9. Швець Р. М. Деякі підходи до розв'язання задачі нагріву суцільного пружного циліндра за нестаціонарної граничної умови / Р.М. Швець, О.І. Яцків, Б.Я. Бобик // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2007. – Вип. 5. – С. 186-194.
10. Підстригач Я. С. Вибрані праці / Я.С. Підстригач. – К. : Наук. думка, 1995. – 460 с.
11. Мартиняк Р. М. Умови теплового контакту тіл через тонкі неоднорідні за товщиною прошарки / Р.М Мартиняк, Р.М. Швець // Доп. НАН України. – 1996. – № 9. – С. 74-76.
12. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач. Изд. 2-е. / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М. : Наука, 1979. – 288 с.
13. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы : Справочное пособие / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – К. : Наук. думка, 1986. – 544 с.
14. Blanc G. Solution of the inverse heat conduction problem from thermal strain measurements / G. Blanc, M. Raynaud // ASME. J. Heat Transfer. – 1996. – **118**. – P. 842-849.
15. Кушнір Р. М. Обернена задача термопружності для неоднорідного циліндра за неповної інформації про теплове навантаження / Р.М. Кушнір, А.В. Ясінський // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2006. – Т. 50, № 3. – С. 140-145.


## REFERENCES


1. Alifanov, O.M. (1994), "Inverse Heat Transfer Problems", Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.
2. Vatulyan, A.O. (2007), *Obratnye zadachi v mekhanike deformiruemogo tverdogo tela* [Inverse problems of deformable solid body], Fizmatlit, Moskow, Russia.
3. Dejneka, V.S. and Serhienko, I.V. (2012), *Sistemnyj analiz uprugikh i termouprugikh neodnorodnykh tel* [Systematic analysis of elastic and thermoelastic bodies], Naukova dumka, Kiev, Ukraine, 511 p.
4. Matsevityj, Yu.M. (2003), *Obratnyje zadachi teploprovodnosti* [Inverse problems of heat transfer], NAN Ukrainy institute problem mashinostroeniya, Naukova dumka, Kiev, Ukraine.
5. Model, R. (2005), "Thermal Transport Properties of Layered Materials: Identification by a new Numerical Algorithm for Transient Measurements", *Int. J. Thermophys*., vol. 26, no. 1, pp. 165-178.
6. Chekurin, V. (2008), "Parameters identification of the multilayered bodies by using thermal probing", *Fizyko-matematychne modeljuvannya ta informatsijni tekhnologiji*, issue 7, pp. 9-20.
7. Bek, Dzh., Blakuell, B. and Sent-Kler, CH., ml (1985), *Nekorrektnye obratnye zadachi teploprovodnosti* [Incorrect inverse heat conduction problems], Wiley, New York.
8. Shvets, R.M., Yatskiv, O.I. and Bobyk, B.Ya. (2010), "Boundary parameters identification for cylinder under nonstationary condition of heat exchange with environment", *Fizyko-matematychne modeljuvannya ta informatsijni tekhnologiji*, issue 12, pp. 198-207.
9. Shvets, R.M., Yatskiv, O.I. and Bobyk, B.Ya. (2007), "Some approaches to solving problem of heating elastic cylinder under nonstationary boundary condition", *Prykladni problemy mekhaniky i matematyky*, issue 5, pp. 186-194.
10. Pidstrygach, Ya.S. (1995), *Vybrani pratsi* [Selected works], Naukova dumka, Kiev, Ukraine.
11. Martynyak, R.M. and Shvets R.M. (1996), "Thermal conditions of bodies contact through thin layers with nonuniform thickness", *Dopovidi Natsional'noji Akademiji Nauk Ukrajiny*, no. 9, pp. 74-76.
12. Tikhonov, A.N. and Arsenin, V.Ya. (1979), *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods of solving incorrect problems], Nauka, Moskow.
13. Verlan', A.F. and Sizikov, V.S. (1986), *Integral'nyje uravneniya: metody, algoritmy, programmy. Spravochnoye posobiye* [Integral equations: methods, algorithms, programs. Handbook], Naukova dumka, Kiev, Ukraine.
14. Blanc, G. and Raynaud, M. (1996), "Solution of the inverse heat conduction problem from thermal strain measurements", *ASME. J. Heat Transfer*, vol. 118, pp. 842-849.
15. Kushnir, R.M. and Yasinskyj, A.V. ( 2006), "Inverse problem of thermoelasticity for inhomogeneous cylinder at the incomplete information about thermal loading", *Matematychni metody i fizyko-mekhanichni polya*, vol. 50, no. 3, pp. 140-145.