УДК 539.3

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРУЖИН В УСЛОВИЯХ НЕЧЁТКОЙ ИНФОРМАЦИИ

[1]Бараненко В. А., [2]Иванец М. В., [2]Чаплыгина С. Н.

[1]*Украинский государственный химико-технологический университет, просп. Гагарина, 8, г. Днепропетровск, 49005, Украина*

bva0984387404@gmail.com

[2]*Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры, ул. Чернышевского, 24а, г. Днепропетровск, 49600, Украина*

marinapn@ukr.net

В рамках оптимизационной модели ожидаемого значения выполнено проектирование цилиндрической пружины минимального веса, работающей на кручение, в условиях нечётко заданных нагрузок. Адекватной реализацией этих данных взяты нечёткие числа с функцией принадлежности треугольного и трапецоидного вида. Учёт их ведёт к увеличению массы конструкции.

Ключевые слова: пружина, оптимальное проектирование, нечёткая информация, модель ожидаемого значения.

ОПТИМАЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ ПРУЖИН В УМОВАХ НЕЧІТКОЇ ІНФОРМАЦІЇ

[1]Бараненко В. О., [2]Іванець М. В., [2]Чаплигіна С. М.

[1]*Український державний хіміко-технологічний університет, просп. Гагаріна, 8, м. Дніпропетровськ, 49005, Україна*

bva0984387404@gmail.com

[2]*Придніпровська державна академія будівництва та архітектури, вул. Чернишевського, 24а, м. Дніпропетровськ, 49600, Україна*

marinapn@ukr.net

В межах оптимізаційної моделі очикуваного значення виконано проектування циліндричної пружини, інімальної ваги, яка працює на скручення, в умовах нечітко заданих навантажень. Адекватною формалізацією цих даних узято нечіткі числа з функцією належності трикутникового і трапецоїдного виду. Врахування їх призводить до збільшення маси конструкції.

Ключові слова: пружина, оптимальне проектування, нечітка інформація, модель очікуваного значення.

OPTIMUM DESIGNING OF COIL SPRING WITH FUZZY INFORMATION CONDITIONS

[1]Baranenko V. A., [2]Ivanec M. V., [2]Chaplygina S. N.

[1]*Ukrainian State University of Chemical Technology, Gagarin av., 8, Dnepropetrovsk, 49005, Ukraine*

bva0984387404@gmail.com

[2]*Prydniprovs'ka State Academy of Civil Engineering and Architecture, Chernychevskiy str., 24a, Dnepropetrovsk, 49600, Ukraine*

marinapn@ukr.net

Optimum designing of minimum weight coil spring in torsion is considered. In this case, the calculation is performed on the maximum normal stress in the cross section of coils. On the basis of this statement, strength conditions in the form of inequality are obtained. Determinate problem of optimum designing has been formulated. Assuming that the torque value is described as a “the value M_0” and “is in the fuzzy interval” fuzzy optimization problem is formulated, namely EVM-model.

Implementation of determinate and fuzzy models has been made by random search. Fuzzy numbers with membership functions of triangle and trapezium view are taken for adequate formalization of the presentation of the original M_0. We present a numerical illustration, which showed that the inclusion of fuzzy information conditions leads to an increase in the structure mass.

Key words: coil spring, optimal design, fuzzy information, EVM (expected value model).

ВВЕДЕНИЕ

Цилиндрическая винтовая пружина представляет собой брус, ось которого располагается на поверхности образующего цилиндра по винтовой линии. Основными параметрами пружины являются диаметр цилиндра D, угол подъёма оси и длина l оси рабочей части. В технических расчетах кривизну винта характеризуют отношением $c = D/a$, которое называется индексом пружины, где a – размер поперечного сечения в направлении нормали. Из-за сложности навивки, резкого повышения напряжений в волокне витков, а также значительной кривизны пружины с индексом $c < 4$ применяются весьма редко. При конструировании пружины, работающей на сжатие-растяжение, рассчитывают её напряженно-деформируемое состояние (НДС) по наибольшим касательным напряжениям в поперечных сечениях витков. В случае проектирования пружины кручения расчеты напряжений выполняются по наибольшим нормальным напряжениям в поперечном сечении витков.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Введём следующие обозначения для винтовой пружины: d – диаметр проволоки; n – число активных витков; n_0 – число неактивных (неработающих) концевых витков; E – модуль Юнга; G – модуль сдвига; K – жёсткость пружины; δ – смещение вдоль оси пружины; k – коэффициент концентрации напряжений, определённый экспериментально; k_l – коэффициент концентрации напряжений кручения; τ – напряжение сдвига; $\tau_{\max}$ – допустимое напряжение сдвига; σ – напряжение при изгибе; $\sigma_{\max}$ – допустимое напряжение при изгибе; $M_{\text{кр}}$ – приложенный крутящий момент; θ – угловое перемещение торцов пружины или угол закрутки (в $^\circ$); ω – собственная частота волн сжатия (в Гц); ρg – удельный вес материала пружины; ρ – плотность материала; g – ускорение свободного падения; W – вес пружины.

В соответствии с работами [1, 2, 5], приведём следующие соотношения для проектирования цилиндрической винтовой пружины, работающей на:

а) сжатие-растяжение

$$F = K\delta\,, \tag{1}$$

$$K = \frac{d^4 G}{8D^3 n}, \tag{2}$$

$$k = \frac{4c-1}{4c-4} + \frac{0{,}615}{c}\,,$$

$$\tau = \frac{8kFD}{\pi d^3}\,,$$

$$\omega = \frac{d}{2\pi D^2 n}\sqrt{\frac{G}{2p}}\,;$$

б) кручение

$$\sigma = \frac{10{,}2Mk_1}{d^3}\,, \tag{3}$$

$$k_1 = \frac{1{,}425}{c^{0{,}115}}, \tag{4}$$

а соотношение между крутящим моментом и углом закрутки имеет вид:

$$\theta = \frac{3670nDM}{Ed^4}. \quad (5)$$

ЦЕЛЕВАЯ ФУНКЦИЯ И ОГРАНИЧЕНИЯ

Для задач оптимального проектирования пружины определяющим функционалом качества или целевой функцией, как правило, является вес, который должен быть минимизирован. Выражение для определения веса цилиндрической пружины записывается в виде:

$$\phi_0 = W = \frac{\left(n+n_0\right)\pi^2 Dd^2 \rho g}{4}. \quad (6)$$

Непременным атрибутом реального проектирования, помимо целевой функции, являются ограничения. В задаче проектирования пружин этими ограничениями могут быть [1, 2, 5]:

условия по прочности, чтобы предотвратить разрушение материала, а именно:

для сжато-растянутых пружин

$$\tau \le \tau_{\max} \quad \text{или} \quad \phi_1 \equiv \tau - \tau_{\max} \le 0,$$

где

$$\tau \equiv \frac{8PD}{\pi D^3}\left[\frac{4D-d}{4D-4d} + \frac{0{,}615}{D}\right];$$

для пружин, работающих на кручение,

$$\sigma \le \sigma_{\max} \quad \text{или} \quad \phi_1 \equiv \sigma - \sigma_{\max} \le 0; \quad (7)$$

– *условия жёсткости,* заключающиеся в требовании, чтобы величина наибольшего продольного смещения под действием растягивающей (сжимающей) силы F было не менее (более) допустимого смещения, которое из-за принятого угла навивки и свободного зазора между витками имеет определённую величину Δ.

В динамических приложениях, чтобы избежать резонанса, необходимо ввести следующее условие – собственная частота волн сжатия пружины ω должна быть не менее величины ω_0 в (Гц)

$$\omega \ge \omega_0 \quad \text{или} \quad \phi_2 = \omega_0 - \omega \le 0.$$

В реальном проектировании вводят ещё и ограничения на габариты: необходимо, чтобы диаметр проволоки, диаметр цилиндра и число витков пружины были не отрицательными, то есть

$$D + d \le D_* \quad d > 0 \quad D > 0 \quad N > 0. \quad (8)$$

Помимо веса ($W \to \min$) критерием качества может быть собственная частота ($\omega \to \max$), а также жёсткость пружины ($K \to \max$).

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ВИНТОВОЙ ПРУЖИНЫ, РАБОТАЮЩЕЙ НА КРУЧЕНИЕ ПРИ НЕЧЁТКОЙ ИНФОРМАЦИИ

На пружину кручения действует пара сил, закручивающая её в поперечных сечениях. Такие пружины применяют в качестве прижимных аккумулирующих и упругих звеньев силовых передач. Если пружина нагружена крутящим моментом M вокруг своей оси, то напряжение изгиба в проволоке определяется в соответствии с выражениями (3), (4). Детерминированная задача оптимального проектирования описывается следующей моделью

$$\left\{d, D, W\right\}^{opt} = \arg\left\{\min_{d,D} \phi_0\left(M,d,D\right)\middle|\phi_1\left(M,d,D\right); \quad d + D \le 0\right\}. \quad (9)$$

Пусть исходный параметр M задаётся нечётким образом: значение крутящего момента «приблизительно равно M_0» (вариант 1); значение крутящего момента находится «приблизительно в диапазоне (α,β)» (вариант 2). Адекватной формализацией этих данных могут быть нечёткие числа (L-R)-типа, описываемые функцией принадлежности $\mu(x)$ соответственно для вариантов 1 и 2 треугольного и трапецоидного вида [4].

В случае варианта 1 величину M опишем нечётким числом (a,M_0,b), а для варианта 2 – нечётким трапецоидным числом (α,m_1,m_2,β).

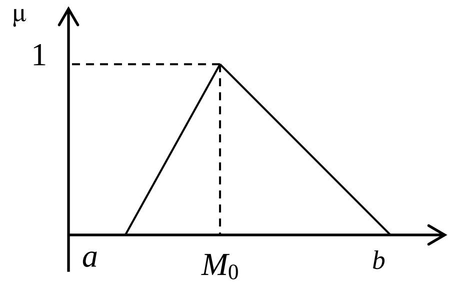

Рис. 1. Нечёткое треугольное число

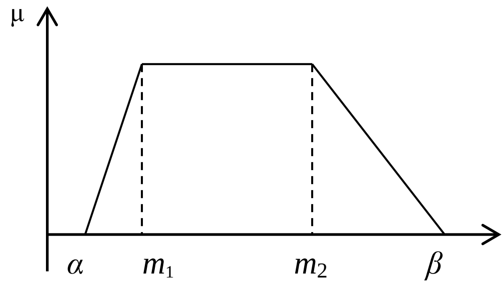

Рис. 2. Нечёткое трапецоидное число

На основании оптимизационной модели EVM (expected value model), используя приведенные выше соотношения (6)-(8), сформулируем следующую задачу неопределённой оптимизации [1]:

$$(d,D,W)^{opt}=\arg\left\{\min_{d,D} Ev\left(\phi_0\left(M,D,d\right)\right)\middle|\max_{1\le j\le T} Ev\left(\phi_1\left(M_j D,d\right)\right)\le 0;\quad d+D\le D_*\right\} \tag{10}$$

при заданных значениях параметров n, n_0, ρg, $\sigma_{\max}$, M_0, a, b. Через T обозначено заданное число градаций нечёткой величины при использовании α-уровней; Ev – оператор ожидаемого значения в оптимизационной EVM-модели. Конструктивными переменными здесь есть величины D и d. Приведём развёрнутую запись задачи (10) с учётом введённых определений (6)-(8) и EVM

$$(d,D,W)^{opt}=\arg\left\{\min_{d,D}\frac{\pi^2\rho g d^2}{4}\left(Dn_0+\frac{E\theta d^4}{3670D\sum_{j=1}^{n}w_j M_j}\right)\middle|\max_{1\le j\le T}\phi_1\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}14{,}5M_j w_j}{d^{2{,}885}D^{0{,}115}}\right)\le\sigma_{\max};\quad d+D\le D\right\},(11)$$

где $w_j=w_j(\mu_j)$ – весовые коэффициенты в модели EVM, зависящие от функции принадлежности μ_j нечёткого значения величины момента M. Область поиска переменных D и d определим как $d^-\le d\le d^+$, $D^-\le D\le D^+$.

Соотношение (11) представляет собой задачу нелинейного программирования. Она имеет хоть и малую размерность, но сильно нелинейный характер выражений, что приводит к определённым математическим трудностям при получении аналитического решения. В качестве метода вычислений взят метод случайного поиска [3]. Для численной реализации модели (11) были приняты следующие исходные данные:

$$E=2\cdot10^{11}\,\text{Па};\quad \sigma_{\max}=1{,}5\cdot10^{8}\,\text{Па};\quad \theta=20^\circ;\quad n_0=2;\quad \rho g=7{,}7\cdot10^{4}\,\text{Н/м}^3;$$

$$d^-=2{,}5\,\text{мм};\quad d^+=3{,}5\,\text{мм};\quad D^-=2{,}5\,\text{см};\quad D^+=4{,}5\,\text{см};\quad D_*=45\,\text{мм};$$

1 вариант – треугольное число

$$M_0=0{,}3\,\text{Нм};\quad a=0{,}25\,\text{Нм};\quad b=0{,}34\,\text{Нм};$$

$$M = \frac{0,5}{(a+M_0)/2} + \frac{1}{M_0} + \frac{0,5}{(b+M_0)/2}; \quad \text{или} \quad M = \frac{0,5}{0,225} + \frac{1}{0,3} + \frac{0,5}{0,32}; \quad w_1 = w_3 = 0,25; \quad w_2 = 0,5.$$

Пусть для варианта 2 (трапецоидное нечёткое число) имеем:

$$M = \frac{0,5}{b_1} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{0,5}{d_1},$$

где $b_1 = (\alpha + m_1)/2$; $d_1 = (m_2 + \beta)/2$.

При $\alpha = 0,2$; $m_1 = 0,25$; $m_2 = 0,32$; $\beta = 0,34$ имеем:

$$M = \frac{0,5}{0,225} + \frac{1}{0,25} + \frac{1}{0,32} + \frac{0,5}{0,33}; \quad w_i = 0,25; \quad i = \overline{1,4}.$$

Результаты расчётов оптимальных значений d, D, W представлены в таблице 1.

Таблица 1

Вариант	1	2	Численное решение детерминированной задачи методом случайного поиска	Аналитическое решение детерминированной задачи
Решение при нечётких данных				
d (м)	0,0029	0,0029	0,0028	0,0028
D (м)	0,0328	0,0277	0,03	0,0294
W (Н)	0,4815	0,5270	0,4267	0,4254
Δ%	13	24	3	0

Для сравнения в таблице приведены результаты вычислений по предлагаемой методике и аналитически, используя условия Куна-Таккера для детерминированной задачи нелинейной оптимизации. Отмечается совпадение результатов численного и аналитического решения задачи. Наличие выбранного вида неопределённости и степени размытости ведёт к увеличению веса пружины на 13% (1 вариант описания нечёткой нагрузки) и на 24% (2 вариант).

ЛИТЕРАТУРА

1. Liu B. Uncertain Programming / B. Liu. – New York : Wiley, 1999.
2. Пономарёв С. Д. Расчёт упругих элементов машин и приборов / С.Д. Пономарёв, Л.Е. Андреева. – М. : Мир, 1980. – 479 с.
3. Растригин Л. А. Статистические методы поиска / Л.А. Растригин. – М. : Наука, 1968. – 376 с.
4. Рутковская Д. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечёткие системы / Д. Рутковская, М. Пилиньский, Л. Рутковский. – М. : Горячая линия – Телеком, 2008. – 383 с.
5. Хог Э. Прикладное оптимальное проектирование. Механические системы и конструкции / Э. Хог, Я. Арора. – Нью-Йорк : Джон Вилей и сыновья, 1983. – 479 с.

REFERENCES

1. Liu, B. (1999), Uncertain Programming, Wiley, New York, USA.
2. Ponomarev, S.D. and Andreeva, L.E. (1980), *Raschet uprugih elementov mashin i priborov* [Calculation of elastic elements of machines and devices], Mir, Moskow, Russia.
3. Rastrigin, L.A. (1968), *Statisticheskie metody poiska* [Stochastic methods of search], Nauka, Moskow, Russia.
4. Rutkovskaya, D., Pilinskiy, M. and Rutkovskiy, L. (2008), *Neironye seti, geneticheskie algoritmy i nechetkie sistemy* [Neural networks, genetic algorithms and fuzzy systems], Goryachaya liniya – Telekom, Moskow, Russia.
5. Haug, E. and Arora, Ja. (1983), *Prikladnoe optimalnoe proektirovanie. Mehanicheskie sistemy i konstrukcii* [Applied optimum design. Mechanical and structural systems], John Willey and Sons, New York, USA.