

ТЕРМОПРУЖНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН СКЛОПЛАСТИКОВОГО ШАРНИРНО ОБПЕРТОГО ЦИЛІНДРА З УРАХУВАННЯМ НЕІДЕАЛЬНОГО КОНТАКТУ МІЖ ШАРАМИ

¹Верещака С. М., д. т. н., професор, ¹Дейнека А. В., асистент, ²Данільцев В. В., інженер

¹*Сумський державний університет,
вул. Р.-Корсакова, 2, м. Суми, Україна*

²*ТОВ «Склопластикові труби», м. Харків, Україна*

vereshakasergey@mail.ru, a_dejneka@mail.ru

На основі класичної теорії пружності анізотропного тіла досліджується напружено-деформований стан багат шарового порожнистого циліндра кінцевої довжини при дії внутрішнього тиску і температури. Кінематичні і статичні умови контакту по зв'язаних поверхнях сусідніх шарів вважаються як ідеальними, так і неідеальними. Рішення задачі отримано в осесиметричній постановці. Підхід до рішення цієї задачі ґрунтується на зведенні її до одновимірної за допомогою методу сплайн-колокації. Проаналізовано поля переміщень і напружень в залежності від типу і величини навантажень.

Ключові слова: порожнистий циліндр, температура, склопластик, сплайн-колокація.

ТЕРМОУПРУГОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ СТЕКЛОПЛАСТИКОВОГО ШАРНИРНО ОПЕРТОГО ЦИЛИНДРА С УЧЕТОМ НЕИДЕАЛЬНОГО КОНТАКТА МЕЖДУ СЛОЯМИ

¹Верещака С. М., д. т. н., профессор, ¹Дейнека А. В., ассистент, ²Данильцев В. В., инженер

¹*Сумской государственной университет,
ул. Р.-Корсакова, 2, г. Сумы, Украина*

²*ООО «Стеклопластиковые трубы», г. Харьков, Украина*

vereshakasergey@mail.ru, a_dejneka@mail.ru

На основе классической теории упругости анизотропного тела исследуется напряженно-деформированное состояние многослойного полого цилиндра конечной длины при действии внутреннего давления и температуры. Кинематические и статические условия контакта по сопряженным поверхностям соседних слоев считаются как идеальными, так и неидеальными. Решение задачи получено в осесимметричной постановке. Подход к решению данной задачи основан на сведении ее к одномерной с помощью метода сплайн-коллокации. Проанализировано поле перемещений и напряжений в зависимости от типа и величины нагрузок.

Ключевые слова: полый цилиндр, температура, стеклопластик, сплайн-коллокация.

THERMAL STRESS STATE OF MULTILAYER FIBERGLASS HINGED SUPPORT CYLINDER WITH NON IDEAL CONTACT BETWEEN THE LAYERS

¹Vereshchaka S. M., D. of Technical Science, Professor, ¹Deineka. A. V., Assistant,

²Daniltsev V. V., Engineer

¹*Sumy State University, Sumy, Ukraine*

²*“Fiberglass pipes”, Kharkiv, Ukraine*

vereshakasergey@mail.ru, a_dejneka@mail.ru

The stress-strain state of a multilayer hollow cylinder of finite length under the action of internal pressure and heat is investigated based on the classical theory of elasticity of an anisotropic body. Kinematic and static conditions of contact for mating surfaces of adjacent layers are considered ideal or non ideal. Solution of the problem is obtained in axisymmetric. Approach to solving this problem is based on reducing her to a one-dimensional method using spline collocation. Field stresses and displacements were analyzed depending on the type and size loads.

Key words: hollow cylinder, temperature, fiberglass, spline collocation.

ВСТУП

Композити багат шарової структури широко використовуються в різних галузях сучасної техніки. Відомо, що елементи з композитів значно вииграють за питомою міцністю порівнянно з їх ізотропними аналогами. Так, наприклад, заміна сталевих труб склопластиковими трубами збільшує термін служби трубопроводів приблизно в 4 рази і в 3 рази знижує його масу, а також виключає застосування антикорозійних захисних засобів і дорогих зварювальних робіт.

Однак для практичної реалізації цих переваг необхідно і далі накопичувати досвід проектування такого роду конструкцій. При виготовленні та експлуатації багат шарових конструкцій з композиційних матеріалів на міжшарових межах контакту жорстких армованих шарів відбувається утворення тонкого м'якого клейового шару, а також різних структурних недосконалостей. Традиційно використовується в розрахункових моделях припущення про безперервність переміщень і напружень при переході через кордон контакту жорстких армованих шарів виявляється істотно порушеним.

У зв'язку з цим вивчення напруженого стану армованих оболонок при дії як статичного, так і теплового навантаження на основі дискретно-структурної теорії багат шарових оболонок, коли враховуються реальні умови взаємодії шарів і величина зміни контактних напружень на міжшарових межах, представляється актуальним завданням. Докладний аналіз останніх результатів і напрямків розвитку дискретно-структурної теорії шаруватих пластин і оболонок можна знайти в оглядах робіт [1-2].

1. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ

Нехай порожнистий циліндр навантажений по циліндричних поверхнях $r = r_a$ і $r = r_b$ стаціонарними температурними навантаженнями $t_a(z)$ і $t_b(z)$, і рівномірно розподіленими по окружній координаті зусиллями $q_a(z)$ і $q_b(z)$. Вважається, що температурні навантаження і заданий по лицьових поверхнях циліндра тиск є осесиметричними щодо поздовжньої осі циліндра. Але при цьому їх величина змінюється вздовж меридіана і залежить від координати z . Крім цього, циліндр має кінцеву довжину l . Також при вирішенні задачі враховується ефект прослизання шарів циліндру в поздовжньому напрямку.

На основі класичної теорії анізотропного пружного тіла [3] для вирішення поставленої задачі були складені рівняння рівноваги, фізичні та геометричні співвідношення [4].

Рівняння рівноваги.

В осесиметричній двовимірній постановці задачі рівняння рівноваги класичної анізотропної теорії пружності [3] набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r^i}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial z} + \frac{\sigma_r^i - \sigma_\theta^i}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z^i}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}^i}{r} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Система з двох рівнянь рівноваги доповнюється третім рівнянням теплопровідності

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) t^i = 0. \quad (2)$$

Для вирішення поставленої задачі складено систему з трьох диференціальних рівнянь в частинних похідних (1)-(2), необхідно задати граничні умови на торцях і лицьових поверхнях циліндра, а також умови контакту по зв'язаних поверхнях сусідніх шарів.

Постановка крайової задачі.

Підставляючи геометричні співвідношення в рівняння (1)-(2), а також з урахуванням безрозмірних параметрів [5], можна отримати

$$\begin{aligned} & \left[A_{11}^i \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) - \frac{A_{22}^i}{R^2} + A_{55}^i \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right] U_r^i + \left[(A_{13}^i + A_{55}^i) \frac{\partial^2}{\partial R \partial Z} + (A_{13}^i - A_{23}^i) \frac{\partial}{\partial Z} \right] U_z^i = \Gamma_r^i \frac{\partial T^i}{\partial R}, \\ & \left[(A_{13}^i + A_{55}^i) \frac{\partial^2}{\partial R \partial Z} + (A_{23}^i + A_{55}^i) \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial Z} \right] U_r^i + \left[A_{55}^i \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) + A_{33}^i \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right] U_z^i = \Gamma_r^i \frac{\partial T^i}{\partial Z}, \\ & \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) T^i + \frac{\partial^2 T^i}{\partial Z^2} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Граничні умови, які записані за допомогою безрозмірних параметрів, набувають вигляду:

– на торцях і лицьових поверхнях циліндру

$$\begin{aligned} U_r^i(R, 0) = U_r^i(R, l) = 0, \quad U_z^i(R, 0) = U_z^i(R, l) = 0, \\ S_r^1(R_a, z) = Q_a(z), \quad TU_{rz}^1(R_a, z) = 0, \\ S_r^N(R_b, z) = Q_b(z), \quad TU_{rz}^N(R_b, z) = 0, \\ T^i(R, 0) = T^i(R, l) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N), \\ T^1(R_a, z) = T_a(z), \quad T^N(R_b, z) = T_b(z); \end{aligned} \quad (4)$$

– по зв'язаних поверхнях сусідніх шарів:

$$\begin{aligned} S_r^{i-1}(R_i, z) = S_r^i(R_i, z), \quad TU_{rz}^{i-1}(R_i, z) = TU_{rz}^i(R_i, z), \\ U_r^{i-1}(R_i, z) = U_r^i(R_i, z), \quad U_z^{i-1}(R_i, z) - U_z^i(R_i, z) = K \cdot TU_{rz}^i(R_i, z), \\ T^{i-1}(R_i, z) = T^i(R_i, z), \quad \Lambda^{i-1} \frac{\partial T^{i-1}(R_i, z)}{\partial R} = \Lambda^i \frac{\partial T^i(R_i, z)}{\partial R} \quad (i = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (5)$$

В якості граничних значень з рівняння (5) мають місце два варіанти: при $1/K^{(i)} = 0$ – має місце пружне проковзування сусідніх шарів один щодо одного по зв'язаних поверхнях, при $K^{(i)} = 0$ – ідеальний контакт.

2. АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

Для розв'язання крайової задачі (3)-(5) у напрямку поздовжньої осі циліндра застосовуємо метод сплайн-колокації в одному координатному напрямі, що дозволяє звести двовимірну крайову задачу до одновимірної.

Рішення крайової задачі (3) знаходимо у вигляді:

$$U_r^i(R, Z) = \sum_{n=1}^N \Phi_n^i(R) \varphi_m(Z), \quad U_z^i(R, Z) = \sum_{n=1}^N \Psi_n^i(R) \varphi_{zn}(Z), \quad T_r^i(R, Z) = \sum_{n=1}^N F_n^i(R) \varphi_m(Z). \quad (6)$$

Вирази для В-сплайнів третього ступеня на розширеній сітці Δ' : $z_{-m} < z_{-m+1} < \dots < z_{-1} < z_0 < z_1 < \dots < z_n < \dots < z_{N+m}$ ($z_{k+1} - z_k = h = \text{const}$ [6]) мають вигляд:

$$B_3^i(z) = \frac{1}{6} \begin{cases} 0, & z \leq z_{i-2}; \\ t^3, & z_{i-2} \leq z \leq z_{i-1}; \\ 1+3t+3t^2(1-t), & z_{i-1} \leq z \leq z_i; \\ 3t^2-6t^2+4, & z_i \leq z \leq z_{i+1}; \\ (1-t)^3, & z_{i+1} \leq z \leq z_{i+2}; \\ 0, & z \geq z_{i+2}, \end{cases}$$

де $t = (z - z_k)/h$ на інтервалі $[z_k, z_{k+1}]$, $k = \overline{i-2, i+1}$, $i = \overline{-1, N+1}$.

Апроксимуючі функції задаємо у вигляді:

при $u = 0$ на торцях

$$\varphi_0(z) = -4B_3^{-1}(z) + B_3^0(z), \quad \varphi_1(z) = B_3^{-1}(z) - \frac{1}{2}B_3^0(z) + B_3^1(z),$$

$$\varphi_i(z) = B_3^i(z), \quad (i = \overline{2, N-2}),$$

$$\varphi_{n-1}(z) = B_3^{N+1}(z) - \frac{1}{2}B_3^N(z) + B_3^{N-1}(z), \quad \varphi_N(z) = -4B_3^{N+1}(z) + B_3^N(z).$$

Вибравши на відрізку інтегрування $[z_0, z_N]$ $N+1$ точку колокації $z = \xi_j$, ($j = \overline{1, N+1}$) проведемо $N+1$ лінію $z = \xi_j$ і після підстановки в (3) отримаємо систему із $3(N+1)$ диференціальних рівнянь другого порядку для кожного шару:

$$\begin{aligned} \bar{E} \frac{d^2 \bar{\Phi}^i}{dR^2} &= -\frac{\bar{E}}{R} \frac{d\bar{\Phi}^i}{dR} + \left(\frac{A_{22}^i}{A_{11}^i} \frac{\bar{E}}{R^2} - \frac{A_{55}^i}{A_{11}^i} \frac{d^2 \bar{\varphi}_r}{dZ^2} \bar{\varphi}_r^{-1} \right) \bar{\Phi}^i - \frac{(A_{13}^i + A_{55}^i)}{A_{11}^i} \frac{d\bar{\varphi}_z}{dZ} \bar{\varphi}_r^{-1} \frac{d\bar{\Psi}^i}{dR} - \\ &- \frac{(A_{13}^i - A_{23}^i)}{A_{11}^i} \frac{d\bar{\varphi}_z}{dZ} \bar{\varphi}_r^{-1} \bar{\Psi}^i + \frac{\Gamma_r^i}{A_{11}^i} \bar{\varphi}_t \bar{\varphi}_r^{-1} \frac{d\bar{F}^i}{dR} + \frac{\Gamma_r^i - \Gamma_\theta^i}{A_{11}^i R} \bar{\varphi}_t \bar{\varphi}_r^{-1} \bar{F}^i, \\ \bar{E} \frac{d^2 \bar{\Psi}^i}{dR^2} &= -\frac{\bar{E}}{R} \frac{d\bar{\Psi}^i}{dR} - \frac{A_{33}^i}{A_{55}^i} \frac{d^2 \bar{\varphi}_z}{dZ^2} \bar{\varphi}_z^{-1} \bar{\Psi}^i - \frac{(A_{13}^i + A_{55}^i)}{A_{55}^i} \frac{d\bar{\varphi}_r}{dZ} \bar{\varphi}_z^{-1} \frac{d\bar{\Phi}^i}{dR} - \\ &- \frac{(A_{23}^i + A_{55}^i)}{A_{55}^i R} \frac{d\bar{\varphi}_r}{dZ} \bar{\varphi}_z^{-1} \bar{\Phi}^i + \frac{\Gamma_z^i}{A_{55}^i} \frac{d\bar{\varphi}_t}{dZ} \bar{\varphi}_z^{-1} \bar{F}^i, \\ \bar{E} \frac{d^2 \bar{F}^i}{dR^2} &= -\frac{\bar{E}}{R} \frac{d\bar{F}^i}{dR} - \frac{d^2 \bar{\varphi}_t}{dZ^2} \bar{\varphi}_t^{-1} \bar{F}^i, \end{aligned} \quad (7)$$

де $\bar{\Phi}^i = (\Phi_0^i, \Phi_1^i, \dots, \Phi_N^i)^T$, $\bar{\Psi}^i = (\Psi_0^i, \Psi_1^i, \dots, \Psi_N^i)^T$, $\bar{F}^i = (F_0^i, F_1^i, \dots, F_N^i)^T$,

$$\bar{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_0(z_0) & \varphi_1(z_0) & \cdot & \varphi_N(z_0) \\ \varphi_0(z_1) & \varphi_1(z_1) & \cdot & \varphi_N(z_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_0(z_N) & \varphi_1(z_N) & \cdot & \varphi_N(z_N) \end{pmatrix}.$$

Граничні умови (4), (5) переписуться у вигляді:

– на лицьових поверхнях циліндра

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^N \left(A_{11}^1 \varphi_m^1(Z) \frac{d\Phi_n^1(R_a)}{dR} + A_{12}^1 \varphi_m^1(Z) \frac{\Phi_n^1(R_a)}{R} - A_{13}^1 \frac{d\varphi_{zn}^1(Z)}{dZ} \Psi_n^1(R_a) \right) = Q_a, \\
& \sum_{n=0}^N \left(\frac{d\varphi_m^1(Z)}{dZ} \Phi_n^1(R_a) + \varphi_{zn}^1(Z) \frac{d\Psi_n^1(R_a)}{dR} \right) = 0, \\
& \sum_{n=0}^N \left(A_{11}^N \frac{d\Phi_n^N(R_b)}{dR} + A_{12}^N \frac{\Phi_n^N(R_b)}{R} - A_{13}^N \frac{d\varphi_{zn}^N(Z)}{dZ} \Psi_n^N(R_b) \right) = Q_b, \\
& \sum_{n=0}^N \left(\frac{d\varphi_m^N(Z)}{dZ} \Phi_n^N(R_b) + \varphi_{zn}^N(Z) \frac{d\Psi_n^N(R_b)}{dR} \right) = 0, \\
& \sum_{n=0}^N \left(\varphi_m^1(Z) F_n^1(R_a) \right) = T_a \sum_{n=0}^N \left(\varphi_m^N F_n^N(R_b) \right) = T_b; \tag{8}
\end{aligned}$$

– на зв'язаних поверхнях сусідніх шарів

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^N \left(A_{11}^i \varphi_m^i(Z) \frac{d\Phi_n^i(R^i)}{dR} + A_{12}^i \varphi_m^i(Z) \frac{\Phi_n^i(R^i)}{R} - A_{13}^i \frac{d\varphi_{zn}^i(Z)}{dZ} \Psi_n^i(R^i) \right) = \\
& = \sum_{n=0}^N \left(A_{11}^{i-1} \varphi_m^{i-1}(Z) \frac{d\Phi_n^{i-1}(R^i)}{dR} + A_{12}^{i-1} \varphi_m^{i-1}(Z) \frac{\Phi_n^{i-1}(R^i)}{R} - A_{13}^{i-1} \frac{d\varphi_{zn}^{i-1}(Z)}{dZ} \Psi_n^{i-1}(R^i) \right), \\
& \sum_{n=0}^N \left(\frac{d\varphi_m^i(Z)}{dZ} \Phi_n^i(R^i) + \varphi_{zn}^i(Z) \frac{d\Psi_n^i(R^i)}{dR} \right) = \sum_{n=0}^N \left(\frac{d\varphi_m^{i-1}(Z)}{dZ} \Phi_n^{i-1}(R^i) + \varphi_{zn}^{i-1}(Z) \frac{d\Psi_n^{i-1}(R^i)}{dR} \right), \\
& \sum_{n=0}^N \left(\varphi_m^i(Z) \Phi_n^i(R^i) - \varphi_m^{i-1}(Z) \Phi_n^{i-1}(R^i) \right) = 0, \\
& \sum_{n=0}^N \left(\varphi_{zn}^{i-1}(Z) \Psi_n^{i-1}(R^i) - \varphi_{zn}^i(Z) \Psi_n^i(R^i) \right) = K \sum_{n=0}^N \left(\frac{d\varphi_m^i(Z)}{dZ} \Phi_n^i(R^i) + \varphi_{zn}^i(Z) \frac{d\Psi_n^i(R^i)}{dR} \right), \\
& \sum_{n=0}^N \left(\varphi_m^{i-1}(Z) F_n^{i-1}(R^i) - \varphi_m^i(Z) F_n^i(R^i) \right) = 0, \\
& \sum_{n=0}^N \left(\varphi_m^{i-1} \Lambda^{i-1} \frac{dF_n^{i-1}(R^i)}{dR} - \varphi_m^i(Z) \Lambda^i \frac{dF_n^i(R^i)}{dR} \right) = 0. \tag{9}
\end{aligned}$$

Вважається, що в радіальному напрямку функції $\overline{\Phi}^i(R^i)$, $\overline{\Psi}^i(R^i)$, $\overline{F}^i(R^i)$ неперервні по товщині i -го шару, тоді за допомогою рядів Тейлора їх можна буде записати у вигляді:

$$\overline{\Phi}^i(R) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{C}_k^i (R-1)^k, \quad \overline{\Psi}^i(R) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{B}_k^i (R-1)^k, \quad \overline{F}^i(R) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{D}_k^i (R-1)^k, \tag{10}$$

де

$$\overline{C}_k^i = (C_{k,1}^i, \dots, C_{k,N+1}^i)^T, \quad \overline{B}_k^i = (B_{k,1}^i, \dots, B_{k,N+1}^i)^T, \quad \overline{D}_k^i = (D_{k,1}^i, \dots, D_{k,N+1}^i)^T.$$

Підставивши (10) у рівняння (6) і прирівнявши коефіцієнти при $(R-1)^k$ до нуля, отримаємо такі рекурентні співвідношення:

$$\begin{aligned} \overline{C}_{k+2}^i &= \frac{1}{(k+2)(k+1)} \left[- (k+1) \overline{C}_{k+1}^i + \left(\frac{A_{22}^i}{A_{11}^i} \overline{E} - \frac{A_{55}^i}{A_{11}^i} \frac{d^2 \overline{\varphi}_r}{dZ^2} \overline{\varphi}_r^{-1} \right) \overline{C}_k^i - (k+1) \frac{(A_{13}^i + A_{55}^i)}{A_{11}^i} \frac{d \overline{\varphi}_z}{dZ} \overline{\varphi}_r^{-1} \overline{B}_{k+1}^i \right], \\ \overline{B}_{k+2}^i &= \frac{1}{(k+2)(k+1)} \left[- (k+1) \overline{B}_{k+1}^i - \frac{A_{33}^i}{A_{55}^i} \frac{d^2 \overline{\varphi}_z}{dZ^2} \overline{\varphi}_z^{-1} \overline{B}_k^i - (k+1) \frac{(A_{13}^i + A_{55}^i)}{A_{55}^i} \frac{d \overline{\varphi}_r}{dZ} \overline{\varphi}_z^{-1} \overline{C}_{k+1}^i \right. \\ &\quad \left. - \frac{(A_{23}^i + A_{55}^i)}{A_{55}^i} \frac{d \overline{\varphi}_r}{dZ} \overline{\varphi}_z^{-1} \overline{C}_k^i + \frac{\Gamma_z^i}{A_{55}^i} \frac{d \overline{\varphi}_t}{dZ} \overline{\varphi}_z^{-1} \overline{D}_k^i \right], \\ \overline{D}_{k+2}^i &= \frac{1}{(k+2)(k+1)} \left[- (k+1) \overline{D}_{k+1}^i - \frac{d^2 \overline{\varphi}_t}{dZ^2} \overline{\varphi}_t^{-1} \overline{D}_k^i \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

З рекурентних співвідношень (11) випливає, що всі коефіцієнти $\overline{C}_k^i, \overline{B}_k^i, \overline{D}_k^i$ можуть бути виражені через $\overline{C}_0^i, \overline{C}_1^i, \overline{B}_0^i, \overline{B}_1^i, \overline{D}_0^i, \overline{D}_1^i$, коли $k > 1$. Тоді рішення системи рівнянь (7) можуть бути записані в компактній формі:

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}^i(R) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\overline{g}_c^i(k,1) \overline{C}_0^i + \overline{g}_c^i(k,2) \overline{C}_1^i + \overline{g}_c^i(k,3) \overline{B}_0^i + \overline{g}_c^i(k,4) \overline{B}_1^i + \overline{g}_c^i(k,5) \overline{D}_0^i + \overline{g}_c^i(k,6) \overline{D}_1^i \right] (R-1)^k, \\ \overline{\Psi}^i(R) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\overline{g}_b^i(k,1) \overline{C}_0^i + \overline{g}_b^i(k,2) \overline{C}_1^i + \overline{g}_b^i(k,3) \overline{B}_0^i + \overline{g}_b^i(k,4) \overline{B}_1^i + \overline{g}_b^i(k,5) \overline{D}_0^i + \overline{g}_b^i(k,6) \overline{D}_1^i \right] (R-1)^k, \\ \overline{F}^i(R) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\overline{g}_d^i(k,5) \overline{D}_0^i + \overline{g}_d^i(k,6) \overline{D}_1^i \right] (R-1)^k. \end{aligned} \quad (12)$$

Невідомі константи $\overline{C}_0^i, \overline{C}_1^i, \overline{B}_0^i, \overline{B}_1^i, \overline{D}_0^i, \overline{D}_1^i$, число яких визначається кількістю дискретних слоїв циліндра K та кількістю точок колокації $N+1$, знаходяться шляхом підстановки виразів (12) у граничні умови (4), (5). Отримана при цьому лінійна алгебраїчна система рівнянь включає $6(N+1)K$ невідомих констант.

Визначивши значення виразів (12) і підставивши їх у задані рішення (6), нескладно за допомогою геометричних і фізичних співвідношень, представлених вище, отримати рішення розглянутої термопружності крайової задачі.

3. ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ

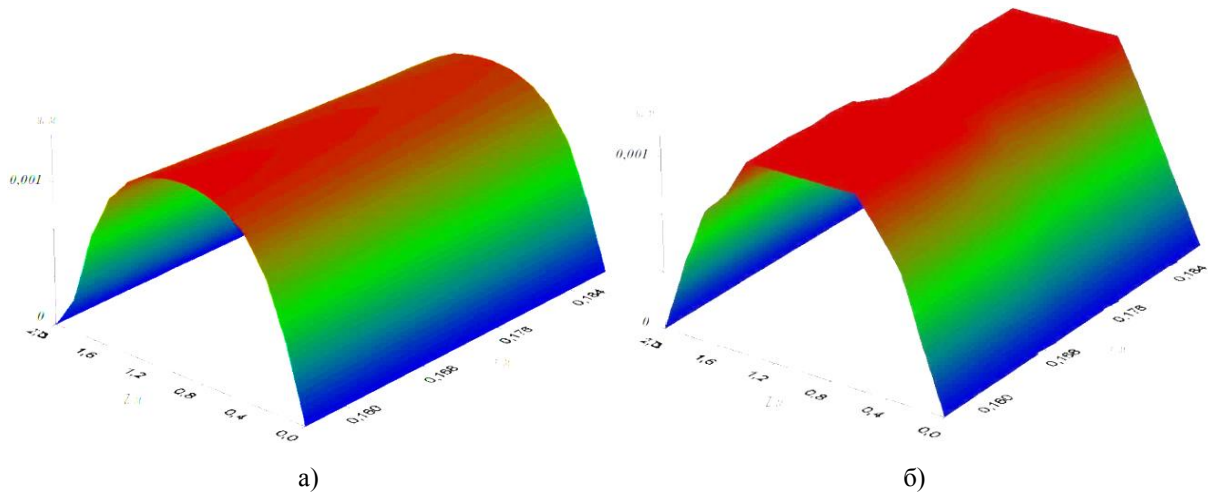
Товстостінний циліндр довжиною $l = 2m$, з внутрішнім радіусом $r_a = 0,156m$ і зовнішнім радіусом $r_b = 0,188m$, на торцях має місце шарнірне закріплення. Рішення будемо знаходити за допомогою методу сплайн-колокації. Циліндр навантажений внутрішнім тиском і температурою на зовнішній лицьовій поверхні, тому:

$$q_a(z) = q_0 = 20 \text{ МПа}, \quad q_b(z) = 0, \quad T_a(z) = 0, \quad T_b(z) = \Delta T.$$

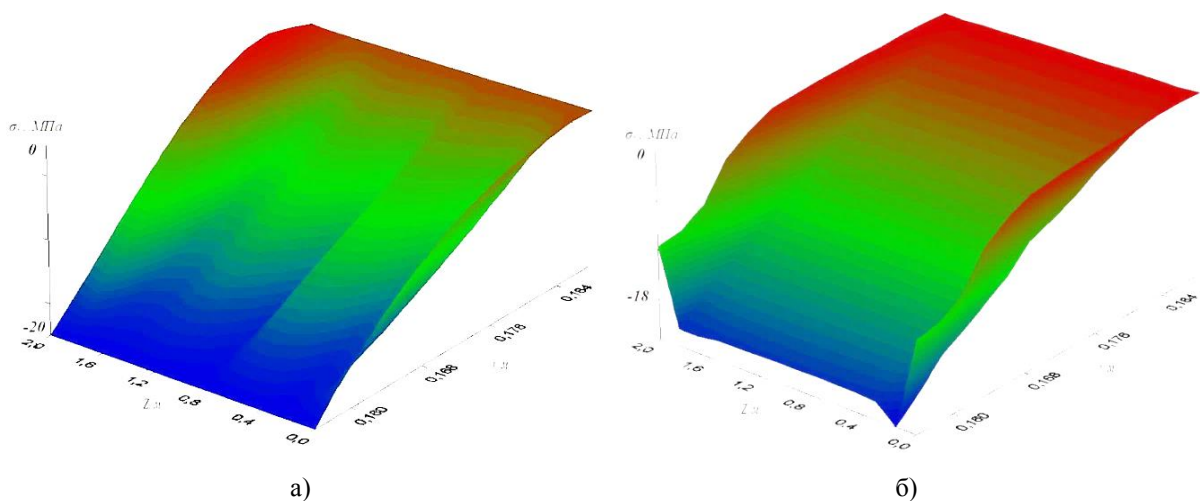
Циліндр складався з 2 шарів склопластику, схема армування і значення механічних характеристик наведені в таблиці 1.

Таблиця 1 – Пружні характеристики склопластику

Схема армування	E , МПа	G , МПа	ν_{ij}	ν_{ji}
$[0_4^\circ / -75^\circ / 0_2^\circ / -75^\circ$ $75^\circ / 0_2^\circ / -75^\circ / 0_4^\circ]$	$E_z = 23800$	$G_{\theta z} = 7490$	$\nu_{z\theta} = 0,077$	$\nu_{\theta z} = 0,11$
	$E_\theta = 33500$	$G_{rz} = 5014$	$\nu_{zr} = 0,397$	$\nu_{rz} = 0,4$
	$E_r = 23870$	$G_{r\theta} = 6620$	$\nu_{\theta r} = 0,405$	$\nu_{r\theta} = 0,284$

Рис. 1. Розподіл радіальних переміщень у циліндрі: а) $\Delta T = 0K$; б) $\Delta T = 50K$

Аналіз результатів, показаних на рис. 1-4, дозволяє відзначити таке. Максимальні нормальні напруження в радіальному напрямку (рис. 2) при збільшенні температури зростають приблизно на 10% при збільшенні температури на 50K, також можна відмітити, що врахування температурного навантаження має вплив на характер розподілу радіальних напружень тільки біля торців шарнірно закріпленого циліндру, з наближенням до середини вплив температурного навантаження практично не змінює картину розподілу цього типу напружень. З рис. 1 видно, що врахування температурних навантажень мало впливає на величину максимальних радіальних переміщень у шарнірно закріпленому циліндрі.

Рис. 2. Розподіл нормальних радіальних напружень у циліндрі: а) $\Delta T = 0K$; б) $\Delta T = 50K$

Також можна відмітити перерозподіл нормальних окружних напружень (рис. 3), так при збільшенні температури до 50K напруження на внутрішній лицьовій поверхні збільшуються на 4-5%, і зменшуються приблизно на таку ж величину на зовнішній.

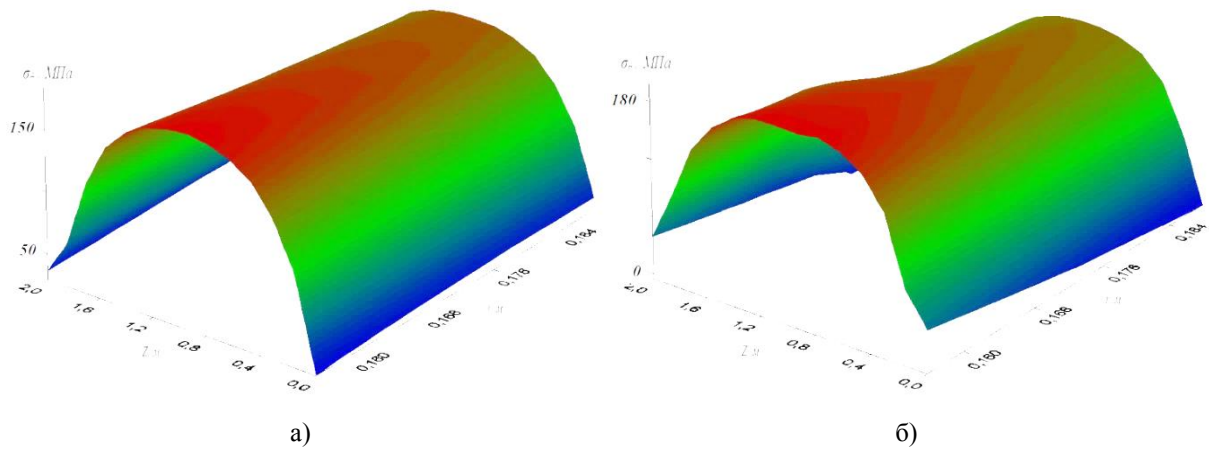


Рис. 3. Розподіл нормальних окружних напружень у циліндрі: а) $\Delta T = 0K$; б) $\Delta T = 50K$

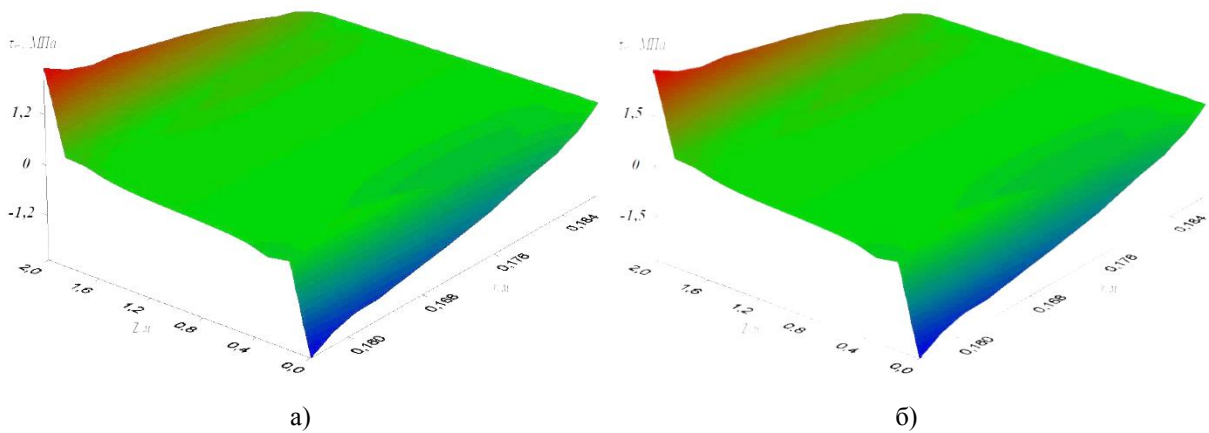


Рис. 4. Розподіл напружень поперечного зсуву у циліндрі: а) $\Delta T = 0K$; б) $\Delta T = 50K$

З рис. 4 видно, що напруження поперечного зсуву значно залежать від температури на торцях шарнірно закріпленого циліндру, що може привести до розшарування розглянутого багат шарового циліндру.

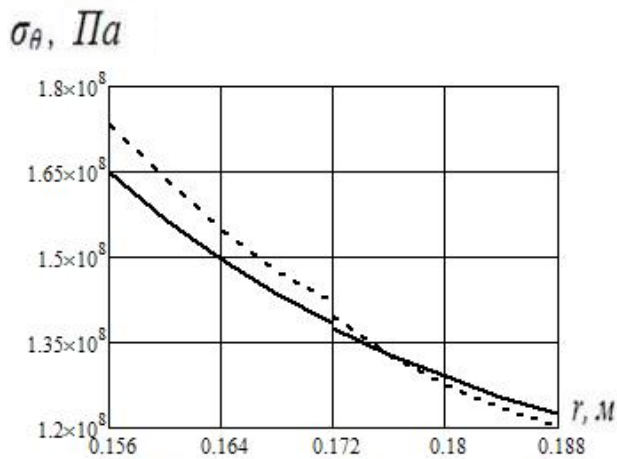


Рис. 5. Розподіл нормальних окружних напружень у циліндрі

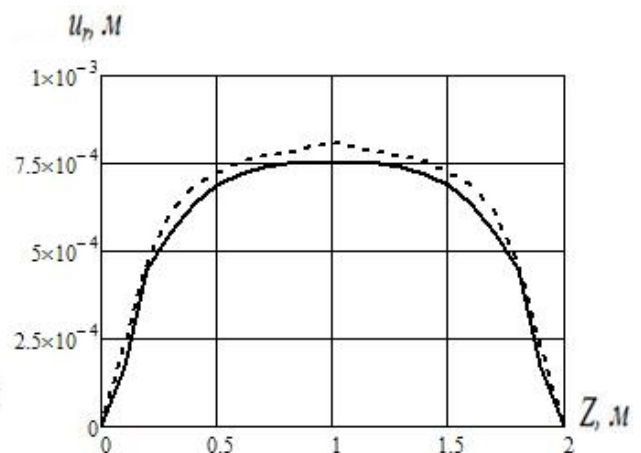


Рис. 6. Розподіл радіальних переміщень у циліндрі

На рис. 5-6 зображений розподіл нормальних окружних напружень у центрі циліндру ($z = 1 \text{ м}$) та радіальних переміщень у зоні контакту пакетів склопластикових шарів циліндру при врахуванні як внутрішнього тиску $p = 20 \text{ МПа}$, так і температурного навантаження

$\Delta T = 50K$. Суцільною лінією позначений випадок ідеального контакту шарів, штриховою – неідеального ($K = 1,5$).

Аналіз отриманих результатів дозволяє відзначити, що при врахуванні неідеального контакту між шарами величина нормальних окружних напружень на внутрішній лицьовій поверхні циліндру на 10-12% більша, ніж при ідеальному контакті. Також на 6-7% збільшується величина радіальних переміщень у зоні контакту.

ВИСНОВКИ

У цій роботі на основі дискретно-структурної теорії та сплайн-апроксимації проведені дослідження напружено-деформованого стану багатошарових циліндричних оболонок обертання при дії як статичного, так і теплового навантаження, коли враховуються реальні умови взаємодії шарів і величина зміни контактних напружень на міжшарових межах. Запропонований алгоритм вирішення розглянутого тут класу задач дозволяє отримувати розрахункові дані для оцінки впливу фізико-механічних характеристик окремих шарів на термопружний деформований стан неоднорідних по товщині циліндрів. Даний метод дозволяє розв'язувати такі задачі з різноманітними умовами на торцях циліндрів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Верещака С. М. Нелинейное деформирование и устойчивость многослойных элементов конструкций с дефектами структуры / С.М. Верещака. – Сумы : Изд-во СумГУ, 2009. – 286 с.
2. Пискунов В. Г. Развитие теории слоистых пластин и оболочек / В.Г. Пискунов, А.О. Рассказов // Прикладная механика. – 2002. – Т. 38. – №2. – С. 22-56.
3. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М. : Наука, 1977. – 416 с.
4. Верещака С. М. Напряженное состояние толстостенной трубы из стеклопластика при действии внутреннего давления и температурной нагрузки / С.М. Верещака, А.В. Дейнека // Вісник СевНТУ. Серія «Механіка, енергетика, екологія» : збірник наукових праць. – Севастополь, 2013. – Вип. 137. – С. 221-229.
5. Shao Z. S. Mechanical and thermal stresses of a functionally graded circular hollow cylinder with finite length / Z.S. Shao // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2005. – Vol. 82. – P. 155-163.
6. Григоренко Я. М. Решение задач о напряженном состоянии цилиндров с различными условиями на торцах на основе сплайн-аппроксимации / Я.М. Григоренко // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2011. – Вип. 13. – С. 31-43.

REFERENCES

1. Vereshchaka, S.M. (2009), *Nelineinoe deformirovanie i ustoichivost mnogoslainnyh elementov konstruktssii s defektami struktury* [Nonlinear deformation and stability of structural elements with multilayer structure defects], SDU, Sumy.
2. Piskunov, V.G. and Rasskazov, A.O. (2002), "Development of the theory of laminated plates and shells", *Prikladnaia mekhanika*, vol. 38, no. 2, pp. 22-56.
3. Lekhnitskii, S.G. (1977), *Teoria uprugosti anizotropnogo tela* [The theory of elasticity an anisotropic body], Nauka, Moscow.
4. Vereshchaka, S.M. and Deineka, A.V. (2013), "Stress state of a thick-walled tube made of fiberglass under the action of internal pressure and temperature loads", *Visnyk SevNTU*, issue 137, pp. 221-229.
5. Shao, Z.S. (2005), "Mechanical and thermal stresses of a functionally graded circular hollow cylinder with finite length", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 82, pp. 155-163.
6. Grigorenko, I.M. (2011), "Solving the problem of stress state of cylinders with different conditions at the ends of a based spline-approximation", *Fiziko-matematychne modeliuвання ta informatsiini tekhnologii*, issue 13, pp. 31-43.