

УДК 539

## **ВИБРОРАЗОГРЕВ ГИБКОЙ ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ С ПЬЕЗОСЛОЯМИ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЯХ**

Гололобов В. И., к. т. н., с. н. с.

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,  
ул. Несторова, 3, Киев, 03057, Украина*

term@inmech.kiev.ua

Разработана методика численно-аналитического моделирования процесса вынужденных колебаний круглых слоистых пластин в геометрически нелинейной постановке и на ее основе в околорезонансной области проведено исследование температурного режима в зависимости от частоты колебаний. Приближенное решение находится из предположения о близости формы колебаний гибкой вязко-упругой пластины в околорезонансной области частот и собственной формы колебаний соответствующей электроупругой пластины. Методом Бубнова-Галеркина уравнение изгиба пластины приводится к нелинейному интегро-дифференциальному уравнению по времени. Его решение методом гармонического баланса в одномодовом приближении определяет зависимость амплитуды колебаний от частоты.

*Ключевые слова: гибкие пластинки, осесимметричные колебания, собственные частоты, численно-аналитическая методика.*

## **ВИБРОРОЗІГРІВ ГНУЧКОЇ ШАРНІРНО ОБПЕРТОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНИ З П'ЄЗОШАРАМИ ПРИ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ РЕЗОНАНСНИХ КОЛИВАННЯХ**

Гололобов В. І., к. т. н., с. н. с.

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,  
вул. Несторова, 3, Київ, 03057, Україна*

term@inmech.kiev.ua

Розроблено методику чисельно-аналітичного моделювання вимушених коливань круглих шаруватих пластин у геометрично нелінійній постановці в резонансній смузі частот і на її основі досліджено розігрів пластини внаслідок дисипації енергії. Наближене рішення задачі знаходиться послідовним застосуванням до рівняння згинних коливань методів Бубнова-Гальоркіна та гармонічної лінеаризації в одномодовому наближенні. Розглядається розігрів пластини, зумовлений розсіюванням енергії при коливаннях.

*Ключеві слова: гнучкі пластинки, вісесиметричні коливання, власні частоти, чисельно-аналітична методика.*

## **THE HEATING OF THE FLEXIBLE CIRCULAR VISCOELASTIC PLATE WITH PIEZOCERAMIC CONVERTERS IN AXISYMMETRICAL VIBRATIONS AT THE RESONANT BAND OF FREQUENCIES**

Gololobov V. I.

*Institute of mechanic by.S. P. Timoshenko, Kyiv, Ukraine*

term@inmech.kiev.ua

The geometrically nonlinear problem of steady-state oscillations of plate with piezoelectric coating under transverse load is considered. The edge of the plate is assumed to be hinged and perfectly heat-insulated. Dissipation of energy during oscillation causes the heating of the plate. The outer layers are used as electromechanical transducers in order to compensate the external mechanical loading by applying correspondent electrical excitation. The electrical bending moments coherent with the main mechanical loading is used for suppression of mechanically excited vibration. Mathematical model for description of oscillation process for the electromechanical system is formulated for the particular case of vibration of layered thin-wall elements composed of viscoelastic and piezoelectric layers. The influence of the piezoelectric layers is taken into account on the assumption of independence of the electric induction of thickness coordinate. Therefore, tension rigidity stiffness of the plate is calculated with the use of tensile stiffness material in plane stress condition, while bending stiffness of it is obtained by making use of effective stiffness of the material. On the resonance, when plate deflection is comparable with the plate thickness, the model is described by the coupled system of integro-differential equations consisting of plate bending equation and equations of accompanying plane stress state in the plate. In order to determine the electromechanical state of the plate the two-step procedure is

designed. At the first step, the Bubnov-Galerkin method is used to reduce the original system to the ordinary nonlinear integro-differential equation for SDOF system. At the second step, the harmonic linearization technique is applied to obtain solution for this differential equation. Eigenfunction of boundary value problem for corresponding linear problem of natural vibrations of plate is used as approximation for mode shape for the Bubnov-Galerkin method. This numerically obtained deflection shape is used for the following calculation. The approximate solution of the nonlinear equation is given in the form of sinusoidal oscillations with the use of the concept of complex moduli for viscoelastic material. This solution provides the dissipation of energy under vibration. Averaged over the vibration period specific mechanical dissipation is used as the source of the selfheating of the plate. The temperature field in the plate is determined by numerical integration of the heat conductivity equation. To suppress the overheating in the vicinity of the first resonance, the mechanical and electrical loadings are applied in antiphase. Obtained temperature-frequency characteristics demonstrate an ambiguous behavior, typical for nonlinear systems of a hard type. Compensation loading reduces the heating significantly.

*Key words:* Thin-walled circular plate, eigenvalue frequency

## ВВЕДЕНИЕ

Для уменьшения интенсивности вибраций конструктивных элементов широко применяются демпфирующие материалы. Наряду с этим, нанесение пьезослоев на поверхности пластин и использование их в качестве электромеханических преобразователей дает возможность оказывать дополнительное воздействие с целью частичной компенсации вибронагрузок и таким образом осуществлять управление интенсивностью колебаний электрическим путем. Обширный список публикаций о резонансных колебаниях пьезоэлектрических пластин приведен в работах [1, 2].

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В статье рассматривается задача о колебаниях тонкой пластинки под поперечной нагрузкой, синусоидально изменяющейся во времени в области частот, близких к резонансной. Трехслойная пластина радиуса  $a$  с вязкоупругим внутренним слоем толщины  $h$  имеет два наружных пьезокерамических слоя толщины  $\delta$ . Эти слои поляризованы в осевом направлении и на их поверхности нанесены круговые электроды, к которым приложено компенсационное электрическое напряжение, синусоидально изменяющееся во времени и совпадающее по частоте с основной нагрузкой.

Отнесем сечение пластины к осям  $r$  и  $\gamma$ , где ось  $\gamma$  направлена параллельно оси вращения, совместив начало координат с точкой пересечения оси вращения со срединной плоскостью основного слоя. Электрическое напряжение амплитуды  $V$  приложено к пьезослоям таким образом, что возникающие в заземленном элементе пластины механические напряжения эквивалентны моменту  $M_e$ . Нагрузки представим в виде:

$$q(r, t) = q_1(t)q_0(r), \quad M_e(r, t) = m_1(t)[H(r) - H(r - r_2)],$$

где  $H(r)$  – единичная ступенчатая функция; при  $r_2 = a$  выражение для  $M_e$  представляет равномерно распределенную по площади пластины электрическую нагрузку.

Обозначим через  $u(r)$  и  $w(r)$  амплитуды перемещений точек срединной поверхности основного слоя в направлении осей  $r$  и  $\gamma$ .

При вибрационном возбуждении колебаний пластинки в околорезонансной области поперечные перемещения не будут малыми по сравнению с толщиной и для описания динамического процесса используется геометрически нелинейная теория изгиба пластин, основанной на гипотезе прямой нормали и соответствующих предположениях о характере электрического поля в пьезослоях.

При этом влияние пьезоэлектрических слоев учитывается на основе предположения о независимости электрической индукции от толщинной координаты. Вследствие этого для вычисления жесткостных характеристик элемента пластинки в случае растяжения

используется жесткостная характеристика пьезоматериала для плоского напряженного состояния  $c_{11}^E$ , а в случае изгиба – приведенная жесткость материала [3]:

$$c = c_{11}^E + \frac{e^2}{\varepsilon} \left( 1 - \frac{3}{4} \frac{h^2 + 2h\delta + \delta^2}{\frac{3}{4}h^2 + \frac{3}{2}h\delta + \delta^2} \right),$$

где величины  $c_{11}^E$ ,  $e$  и  $\varepsilon$  определяются по стандартными характеристикам пьезоматериала [4]:

$$c_{11}^E = \frac{s_{11}^E}{(s_{11}^E)^2 - (s_{12}^E)^2}, \quad e = \frac{d_{31}}{s_{11}^E + s_{12}^E}, \quad \varepsilon = \varepsilon_{33}^T - 2d_{31}e.$$

Свойства материала вязкоупругого слоя в форме функциональной зависимости имеют вид [5]:

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + \int_0^t \varepsilon(\tau) \frac{dE(t-\tau)}{d(t-\tau)} d\tau = E_0 \bar{E} * \varepsilon(t),$$

где  $E_0$  – мгновенный модуль,  $E(t)$  – релаксационный модуль.

С учетом этого и предположения о характере электромеханического поля определяющие соотношения для элемента пластины принимаем в виде [6]:

$$N_r = D_N * (\varepsilon_r + \nu_N \varepsilon_\theta), \quad M_r = D_M * (\kappa_r + \nu_M \kappa_\theta) + M_e,$$

$$N_\theta = D_N * (\nu_N \varepsilon_r + \varepsilon_\theta), \quad M_\theta = D_M * (\nu_M \kappa_r + \kappa_\theta) + M_e,$$

где

$$D_N * f(t) = (D_N^e + D_N^v \bar{E} *) f(t), \quad D_M * f(t) = (D_M^e + D_M^v \bar{E} *) f(t),$$

$$D_N^v = E_0 h / (1 - \nu^2), \quad D_M^v = E_0 h^3 / 12 (1 - \nu^2), \quad D_N^e = 2c_{11}^E \delta,$$

$$D_M^e = \frac{2}{3} c \left[ \left( \frac{h}{2} + \delta \right)^3 - \left( \frac{h}{2} \right)^3 \right], \quad M_e = e(\delta + h)V.$$

Здесь

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \kappa_r = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad \kappa_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \vartheta = -\frac{\partial w}{\partial r}.$$

Уравнения движения при изгибных колебаниях пластинки запишем без учета сил инерции, действующих в плоскости пластинки [7]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r M_r) = \frac{1}{r} M_\theta + Q,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( Q + N_r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] = \bar{\rho}_h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q,$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r N_r) = N_\theta,$$

где  $\bar{\rho}_h = \rho_1 h + 2\rho_2 \delta$  удельная масса элемента пластинки.

Граничные условия для шарнирного опирания наружного контура имеют вид

$$\begin{aligned} \text{при } r=0 \quad Q = \mathcal{G} = 0, \quad N_\theta = N_r, \\ \text{при } r=a \quad w = M_r = 0, \quad N_r = 0. \end{aligned}$$

Исключив  $Q$  из уравнений движения, преобразуем полученное уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial(rM_r)}{\partial r} - M_\theta \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ (rN_r) \frac{\partial w}{\partial r} \right] - \bar{\rho}_h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q(r, t) = 0$$

и остальные исходные уравнения к виду

$$D_M * \Delta \Delta w - \left( N_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + N_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) - \Delta M_e + \bar{\rho}_h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q(r, t) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (rN_\theta) = N_r - \frac{1-v_N^2}{2} D_N * \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (rN_r) = N_\theta,$$

где  $\Delta$  – оператор  $\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ .

## МЕТОД РЕШЕНИЯ

В [6] для получения приближенного решения такой системы интегро-дифференциальных уравнений в области частот, близких к резонансной частоте, используется подход, основанный на последовательном применении метода Бубнова-Галеркина и метода гармонического баланса. На первом этапе на основе приближенного представления резонансной формы колебаний в виде трехчленной полиномиальной функции методом Бубнова-Галеркина задача приводится к нелинейному интегро-дифференциальному уравнению относительно амплитуды.

Следуя в общем этой методике, представим прогиб пластинки в около-резонансной области в виде

$$\hat{w} \approx \eta(t) w_1(r),$$

взяв за основу первую резонансную форму изгибных колебаний  $w_1(r)$  для соответствующей электроупругой задачи на собственные значения

$$D'_M \Delta \Delta w - \omega^2 \bar{\rho}_h w = 0$$

при тех же граничных условиях. Здесь  $D'_M(\omega)$  – изгибная жесткость, определенная для действительной части комплексного модуля. Определение функции прогиба  $w_1(r)$  при первой собственной частоте колебаний  $\omega_1$  проводится численно и в таком виде используется в дальнейшем. Принято, что  $w_1(0) = 1$ .

Из уравнений плоской задачи следует, что усилия при этом будут иметь вид:

$$N_\theta = N'_\theta(r) D_N * \eta^2(t), \quad N_r = N'_r(r) D_N * \eta^2(t),$$

где  $N'_\rho$  и  $N'_\theta$  являются численным решением краевой задачи

$$\frac{d}{dr}(rN'_\theta) = N'_r - \frac{1-\nu_N^2}{2} \left( \frac{dw_1(r)}{dr} \right)^2, \quad \frac{d}{dr}(rN'_r) = N'_\theta,$$

$$N'_\theta - N'_r = 0 \quad \text{при } r=0 \quad \text{и} \quad N'_r = 0 \quad \text{при } r=a.$$

С учетом этого представления прогиба и усилий проинтегрируем по площади уравнение изгиба, предварительно умноженное на  $w_1(r)$ . Полученное уравнение нелинейного осциллятора описывает вынужденные колебания системы вблизи резонансной частоты

$$u_2 \ddot{\eta} + \frac{\omega_1^2}{D'_M} u_2 D_M * \eta + u_3 \eta D_N * \eta^2 = \bar{Q},$$

где

$$u_2 = \int_0^a w_1 w_1 \bar{\rho}_h r dr, \quad u_3 = \int_0^a (N'_\theta \kappa_\theta + N'_r \kappa_r) w_1 r dr,$$

$$\bar{Q} = q_1(t) u_q + m_1(t) u_E, \quad u_q = \int_0^a q_0(r) w_1 r dr,$$

$$u_E = \frac{1}{m_1(t)} \int_0^1 \Delta M_e(r) w_1 r dr = \frac{1}{m_1(t)} \lim_{r_2 \rightarrow a} \int_0^{r_2} \Delta M_e(r) w_1 r dr = -\mathcal{G}_1(1).$$

Пусть  $q_1(t) = (q' \cos \omega t - q'' \sin \omega t)$ ,  $m_1(t) = (M' \cos \omega t - M'' \sin \omega t)$ .

Тогда уровень общей электромеханической нагрузки на осциллятор будет

$$\bar{Q} = \bar{q}' \cos \omega t - \bar{q}'' \sin \omega t,$$

где

$$\bar{q}' = (q' u_q + M' u_E), \quad \bar{q}'' = (q'' u_q + M'' u_E).$$

Отсюда видно, что при известной механической нагрузке уровнем возбуждения можно управлять электрическим способом путем выбора параметров  $M'$  и  $M''$  или амплитуды и фазы электрического напряжения на преобразователе.

В соответствии с методом гармонической линеаризации для слабонелинейных задач используется представление амплитуды прогиба в виде гармонической функции времени, соответствующей закону изменения внешней нагрузки

$$\eta(t) = \eta' \cos \omega t - \eta'' \sin \omega t.$$

На таких историях деформации определяющие соотношения между деформациями и напряжениями формулируются с помощью комплексных модулей, и интегральные операторы принимают вид:

$$E_0 \bar{E} * (\cos \omega t) = E_1 \cos \omega t - E_2 \sin \omega t,$$

$$E_0 \bar{E} * (\sin \omega t) = E_2 \cos \omega t + E_1 \sin \omega t, \quad \bar{E} * (1) = E_\infty,$$

$$E_0 D_M * (\cos \omega t) = D'_M \cos \omega t - D''_M \sin \omega t,$$

$$E_0 D_M * (\sin \omega t) = D''_M \cos \omega t + D'_M \sin \omega t,$$

$$E_0 D_N * (\cos^2 \omega t) = \frac{1}{2} D_N^\infty + \frac{1}{2} D'_N \cos 2\omega t - \frac{1}{2} D''_N \sin 2\omega t,$$

$$E_0 D_N * (\sin^2 \omega t) = \frac{1}{2} D_N^\infty - \frac{1}{2} D'_N \cos 2\omega t + \frac{1}{2} D''_N \sin 2\omega t.$$

Здесь  $E_\infty$  – длительный модуль вязкоупругого материала,  $E_1$  и  $E_2$  – компоненты комплексного модуля при частоте колебаний  $\omega$ ,  $D'_M$  и  $D''_M$  – соответствующие им изгибные жесткости, а  $D'_N$  и  $D''_N$  – жесткости на растяжение при частоте колебаний  $2\omega$ .

Представив нелинейный член в уравнении осциллятора двумя элементами из его разложения в ряд Фурье, а именно членами с  $\sin \omega t$  и  $\cos \omega t$ ,

$$\left( \frac{1}{2} D_N^\infty \eta' |\eta|^2 + \frac{1}{4} D'_N \eta' |\eta|^2 - \frac{1}{4} D''_N \eta'' |\eta|^2 \right) \cos \omega t + \left( -\frac{1}{2} D_N^\infty \eta'' |\eta|^2 - \frac{1}{4} D'_N \eta'' |\eta|^2 - \frac{1}{4} D''_N \eta' |\eta|^2 \right) \sin \omega t,$$

получим систему двух уравнений

$$(\hat{\omega}_c^2 - \hat{\omega}^2) \eta' + \left( -\frac{D''_M}{D'_M} \hat{\omega}_1^2 - \frac{u_3}{u_2} D''_N \frac{|\eta|^2}{4} \right) \eta'' = \bar{q}' / u_2,$$

$$\left( -\frac{D''_M}{D'_M} \hat{\omega}_1^2 - \frac{u_3}{u_2} D''_N \frac{|\eta|^2}{4} \right) \eta' - (\hat{\omega}_c^2 - \hat{\omega}^2) \eta'' = \bar{q}'' / u_2,$$

где

$$\hat{\omega}_c^2 = \hat{\omega}_1^2 + \xi |\eta|^2, \quad \xi = \frac{u_3}{2u_2} \left( D_N^\infty + \frac{1}{2} D'_N \right)$$

– уравнение скелетной кривой, представляющей зависимость квадрата собственной частоты колебаний консервативной системы от амплитуды.

Возводя эти уравнения в квадрат и складывая, получаем:

$$\left[ (\hat{\omega}_c^2 - \hat{\omega}^2)^2 + \left( -\frac{D''_M}{D'_M} \hat{\omega}_1^2 - \frac{u_3}{u_2} D''_N \frac{|\eta|^2}{4} \right)^2 \right] |\eta|^2 = \frac{(\bar{q}')^2 + (\bar{q}'')^2}{u_2^2}$$

или

$$\hat{\omega}^2 = \hat{\omega}_1^2 + \xi |\eta|^2 \pm \sqrt{\frac{(\bar{q}')^2 + (\bar{q}'')^2}{u_2^2 |\eta|^2} - \left( \frac{D''_M}{D'_M} \hat{\omega}_1^2 + \frac{u_3}{u_2} D''_N \frac{|\eta|^2}{4} \right)^2}.$$

Приняв в околорезонансной области значения компонентов комплексных модулей соответствующими частоте  $\omega_1$ , это выражение можно рассматривать как зависимость квадрата частоты от квадрата амплитуды и использовать для построения графика амплитудно-частотной характеристики.

Усредненная за период удельная мощность тепловыделения в элементе пластины, содержащим материалы с вязкоупругими свойствами, определяется выражением

$$D = \frac{\omega}{2} |\eta|^2 D''_M (\kappa_r^2 + 2\nu_M \kappa_r \kappa_\theta + \kappa_\theta^2) + \frac{\omega}{2} (\kappa_r + \kappa_\theta) (\eta' M'_e - \eta'' M'_e).$$

Здесь деформации  $\kappa_r$  и  $\kappa_\theta$  относятся к собственной форме, а  $\eta'(\omega)$  и  $\eta''(\omega)$  находятся из исходной системы уравнений для амплитуды  $\eta$  после определения зависимости  $|\eta|^2$  от частоты колебаний. Для оценки соответствующего виброразогрева пластины используется уравнение теплопроводности в одномерном приближении

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) - \frac{2\alpha}{H} (T - \theta_m) + D = 0.$$

Здесь  $H$  – толщина пакета слоев,  $\lambda$  – усредненный по толщине коэффициент теплопроводности,  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи,  $\theta_m$  – температура окружающей среды.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

В качестве примера применения изложенной методики рассмотрим установившиеся осесимметричные колебания шарнирно опертой пластинки при следующих значениях параметров:  $a = 0,1$  м,  $h = 0,0025$  м,  $\rho_2 = 2500 \text{ кг/м}^3$ ,  $\delta = 0$ . Материал пьезослоев – пьезокерамика марки *PZT-4*, ее свойства приведены в [4], а свойства вязкоупругого материала основного слоя определяются стандартной трехпараметрической моделью вязкоупругого тела и характеризуются значениями модулей  $E_0 = 1,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,  $E_\infty = 10^{11} \text{ Па}$  и постоянной времени в релаксационном процессе  $p_1 = 10^{-6} \text{ сек}$ .

Решение краевых задач и определение коэффициентов уравнения, описывающего колебания осциллятора, проводилось численными методами. Расчет проведен для первой собственной частоты электроупругой пластинки с короткозамкнутыми электродами. Колебания возбуждаются равномерно распределенной по площади пластины электромеханической нагрузкой с амплитудой, эквивалентной 140 Па механической нагрузки. При этом относительный прогиб пластинки  $w/h$  равен 0,94, резонансная кривая имеет характерный для жесткой нелинейности вид и область неоднозначности в окрестности  $\bar{\omega} = \omega/\omega_1 = 1,003$ . Такой же характер у зависимости от частоты максимальной температуры в центре пластинки. График температуры для значений  $\alpha = 2 \text{ Вт/(м м град)}$ ,  $\lambda = 0,15 \text{ Вт/(м град)}$  приведен на рисунке.

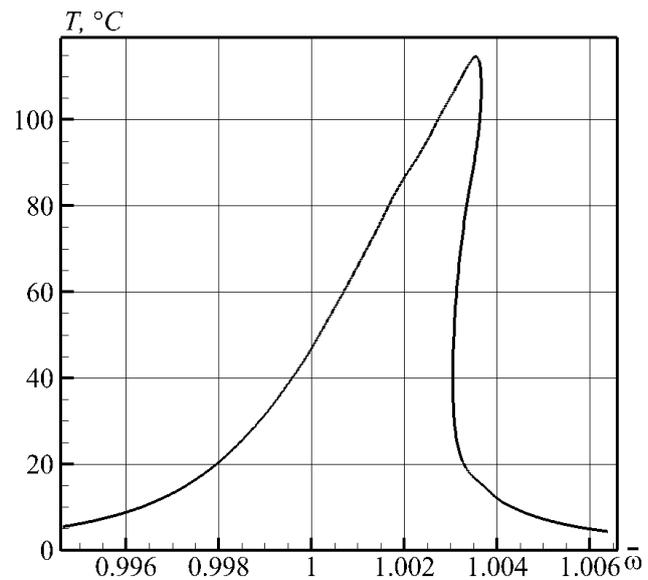


Рис. 1

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шульга М. О. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин / М.О. Шульга, В.Л. Карлаш. – К. : Наукова думка, 2008. – 270 с.
2. Гринченко В. Т. Механика связанных полей в элементах конструкций : в 5 т. / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга. – К. : Наук. Думка, 1989. – Т. 5 : Электроупругость. – 280 с.
3. Гололобов В. И. Соотношения упругости для многослойных пьезокерамических пластин / В.И. Гололобов // Докл. АН УССР. – 1983. – Сер. А. – № 11. – С. 38-40.
4. Берлинкур Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях. В кн. : Физическая акустика / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе ; под ред. У. Мэзона. – М. : Мир, 1964. – Т. 1, ч. А. – С. 204-326.
5. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости / Р. Кристенсен. – М. : Мир, 1974. – 338 с.

6. Карнаухов В. Г. Активное демпфирование резонансных изгибных колебаний гибкой шарнирно опертой вязкоупругой пластины при помощи пьезоактуаторов / В.Г. Карнаухов, Т.В. Карнаухова, В.Ф. Зражевская // Теоретическая и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 114-123.
7. Григоренко Я. М. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ / Я.М. Григоренко, А.П. Мукоед. – К. : Вища школа, 1983. – 286 с.

### REFERENCES

1. Shulga, M.O. and Karlash, V.L. (2008), *Rezonansni elektromekhanichni kolyvannya piezoelektrychnykh plastyn* [Electromechanical resonant vibrations of piezoelectric plates], Naukova dumka, Kyiv.
2. Hrinchenko, V.T., Ulitko, A.F. and Shulga, M.O. (1989), *Mekhanika svyazannykh polei v elementakh konstruktсии. T.5: Elektroupruhost* [Mechanics related fields in elements of designs. Vol. 5: Electroelasticity], Naukova dumka, Kyev.
3. Hololobov, V.I. (1983), “The elasticity relations for multilayer piezoceramic plates”, *Dokl. AN USSR*, series A, no. 11, pp. 38-40.
4. Berlincourt, D., Kerran, D. and Jaffe, H. (1964), *Pyezoelektricheskiye i pyezomagnitnye materialy i ikh primeneniye v preobrazovatelyakh. V kn.: Fizicheskaya akustika* [Piezoelectric and piezomagnetic materials and their applications in converters. In “Physical acoustics”], edited by W.P. Mason, vol. 1, pt. A, pp. 204-326, Mir, Moskow.
5. Christensen, R.M. (1974) *Vvedeniye v teoriyu vyazkouprugosti* [Introduction to the theory of viscoelasticity] Mir, Moskow.
6. Karnaukhov, V.H., Karnaukhova, T.V. and Zrazhevskaya, V.F. (2009), “Active damping of resonant flexural vibrations of a viscoelastic flexible hinged plate using pezoaktuatorov”, *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika*, issue 45, pp. 114-123.
7. Hrihorenko, Ya.M. and Mukoied, A.P. (1983), *Reshenie nelineinykh zadach teorii obolochek na EVM* [The solution of nonlinear problems in the theory of shells on a computer], Vyshcha shkola, Kyev.

УДК 539.3

## ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ НЕСОВЕРШЕНСТВ НА НЕЛИНЕЙНОЕ ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПЕРЕМЕННОЙ ВО ВРЕМЕНИ ТОЛЩИНЫ

Грищак В. З., д. т. н., профессор, Фатева Ю. А., аспирант

*Запорожский национальный университет,  
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

fateevajulia@gmail.com

В статье на основе методов возмущений и фазовых интегралов исследуется влияние начальных несовершенств геометрической формы на динамическое поведение оболочечных конструкций, выполненных из функционально-градиентных материалов (ФГМ). В духе работ [1, 2] физически нелинейное движение конструкции описывается с помощью классической теории оболочек. Особое внимание уделяется исследованию влияния свойств материалов, которые оцениваются по направлению толщины в соответствии с заданным законом, на характер поведения конструкции при заданных начальных условиях. Нелинейные отношения деформации смещения основаны на теории Кармана для умеренно больших нормальных отклонений. Задача сводится к сингулярному нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка с переменными во времени коэффициентами. Дается сравнение полученного аналитического решения для некоторых параметров конструкции и начальных несовершенств геометрической формы срединной поверхности с прямым численным интегрированием исходного уравнения задачи.

*Ключевые слова: приближенное аналитическое решение, нелинейная проблема, функционально-градиентные материалы, оболочечные конструкции, метод возмущений, метод фазовых интегралов.*