deformation of the roughness”, *Visnyk Zoporizkogo nationalnogo universytetu*, Fiz.-mat. Nauky, no. 2, pp. 105-113.

8. Alexandrov, A.I. and Grabko, E.V. (2011), “Algorithm of the numerical solution of three-dimensional contact problem, connected with the interaction between the elastic bodies with rough surfaces”, *Problemy obchyslyuval'noyi matematyky i mitsnosti konstruktsiy*, issue 17, pp. 23-34.
9. Alexandrov, V.M. and Mhitaryan, S.M. (1983), *Kontaktnye zadachi dlya tel s tonkimi pokrytiami i prosloykami* [Contact problems for bodies with thin coatings and layers], Nauka, Moskow, Russia.
10. Shishkanova, A.A. (2004), *O reshenii kontaktnoy zadachi s uchetom treniya i sherohovatosti dlya shtampa v forme dvusvyaznogo kvadrata v plane* [About the solution of a contact problem taking into account a friction and a roughness for a punch in the form of a doubly-connected square in the plan], *Visnik Denezkogo universitetu*, Pripodnichi nauki, issue 1, pp. 95-102.
11. Dyachenko, N.M. and Shashkova, Ye.V. (2006), “The decision of the problem about sliding of a punch with friction on border rough half-space by the linear law of deformation of a roughness”, *Visnyk Zoporizkogo nationalnogo universytetu*, Fiz.-mat. Nauky, no. 1, pp. 25-33.
12. Pauk, V and Zastrau, B. (2004), “Plane Contact Problems with Partial Slip for Rough Elastic Half-Space”, *J. Theor. Appl. Mech*, vol. 42, no. 1, pp. 107-124.
13. Fihtengolts, G.M. (2003), *Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya* [Kurs differential and integral calculus], vol. 1, Fismatlit, Moskow, Russia,
14. Kolmogorov, A.N. and Fomin, S.V. (1989), *Elementy teorii funktsiy i funktsionalnogo analiza* [Elements of the theory of functions and the functional analysis], Nauka, Moskow, Russia.
15. Kantorovich, L.V. and Akilov, G.P. (1984), *Funktsionalnyi analiz* [Functional Analysis], Nauka, Moskow, Russia.

УДК 512.552

ЖОРСТКІ ТА МАЙЖЕ ЖОРСТКІ САГАЙДАКИ

[1]Зеленський О. В., [2]Дармосюк В. М.

[1]*Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, вул. Огієнка, 61, м. Кам’янець-Подільський, Україна*

[2]*Миколаївський національний університет імені В.О. Сухомлинського, вул. Нікольська, 24, м. Миколаїв, Україна*

[1]zelik82@mail.ru, [2]darmosiuk@gmail.com

У роботі досліджуються жорсткі та майже жорсткі сагайдаки матриць показників. Знайдено умови того, що сагайдак одержується зі скінченної кількості матриць показників та знайдені всі жорсткі сагайдаки на 4 вершинах.

Ключові слова: матриця показників, допустимий сагайдак матриці показників, жорсткий сагайдак.

ЖЕСТКИЕ И ПОЧТИ ЖЕСТКИЕ КОЛЧАНЫ

[1]Зеленский А. В., [2]Дармосюк В. Н.

[1]*Каменец-Подольский национальный университет имени Ивана Огиенко, ул. Огиенко, 61, г. Каменец-Подольский, Украина*

[2]*Николаевский национальный университет имени А.В. Сухомлинского, ул. Никольская, 24, г. Николаев, Украина*

[1]zelik82@mail.ru, [2]darmosiuk@gmail.com

В работе исследуются жесткие и почти жесткие колчаны матриц показателей. Найдены условия того, что колчан получается из конечного числа матриц показателей и найдены все жесткие колчаны на 4 вершинах.

Ключевые слова: матрица показателей, допустимый колчан матрицы показателей, жесткий колчан.

RIGID QUIVERS AND ALMOST RIGID QUIVERS

[1]Zelenskiy O. V., [2]Darmosiuk V. M.

[1]*Kamianets-Podilskyi Ivan Ohienko National University,*
Ohienko str., 61, Kamianets-Podilsky, Ukraine

[2]*Mykolayiv National Sukhomlynsky University,*
Nikolska str., 24, Mykolaiv, Ukraine

[1]zelik82@mail.ru, [2]darmosiuk@gmail.com

One of the most important classes, which appear in various questions of the ring theory and the image theory, is the class of the tiled orders. In terms of the abstract ring theory tiled order is primary Noetherian, semi-perfect and semi-distributive Noetherian ring with non-zero Jacobson radical.

Exponent matrices appear in the theory of tiled orders. Each tiled order is completely determined by its exponent matrix and discrete valuation ring. Many of the properties of these rings are completely determined by their exponent matrix, such as quivers of rings. The exponent matrix quiver coincides with the tiled order quiver. In order to research the exponent matrices and their quivers there can be applied the combinatorial and geometric methods.

This article deals with the question of exponent matrices and their rigid and almost rigid quivers. Properties of admissible quivers have also been discovered. The authors have proved that a unit quiver is rigid or almost rigid. If there is a weight function, for which quiver is not a unit quiver, so there is an infinite number of pairwise nonequivalent exponent matrices, from which quiver is derived. A rigid quiver cannot have loops. There are only four rigid not isomorphic quivers with four vertices. But there doesn’t exist almost rigid quiver with four vertices.

Key words: exponent matrix, admissible quiver, rigid quiver.

ВСТУП

Одним із аспектів теорії кілець є вивчення властивостей кілець за допомогою теорії графів. Кожний черепичний порядок повністю визначається своєю матрицею показників і дискретно нормованим кільцем [1]. Багато властивостей таких кілець повністю визначаються їх матрицями показників [2, 3], зокрема, сагайдаки таких кілець [1]. Порівняно недавно матриці показників стали окремим об’єктом вивчення. Нежорсткість допустимого сагайдака, який має хоча б одну петлю, доведено в [4]. З появою вагових функцій з’явилося більше можливостей для дослідження допустимих сагайдаків [5]. Опис деяких класів жорстких сагайдаків започатковано в [6]. У [7] встановлено властивості одиничних циклів та одиничних сагайдаків, зокрема знайдено обмеження для елементів матриці показників одиничного сагайдака. У роботі продовжуються дослідження матриць показників та їх сагайдаків, зокрема жорстких та майже жорстких сагайдаків матриць показників.

ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ

Нехай $M_n(\mathbb{Z})$ – це кільце матриць розмірності n з цілими елементами.

Означення 1 [1, с. 353]. Матриця $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$, для якої виконуються умови:

1) $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для всіх $i, j, k = 1, \dots, n$;

2) $\alpha_{ii} = 0$ для всіх $i = 1, \dots, n$, називається *матрицею показників*.

Матриця показників, для якої виконується умова

3) $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} \geq 1$ для всіх $i, j \in \{1, \dots, n\}$ $(i \neq j)$ називається *зведеною матрицею показників*.

Нехай $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ – зведена матриця показників. Введемо матрицю $\mathcal{E}^{(1)} = (\beta_{ij}) = \mathcal{E} + E_n \in$ $\in M_n(\mathbb{Z})$, де E_n – одинична матриця. Введемо матрицю $\mathcal{E}^{(2)} = (\gamma_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$: $\gamma_{ij} =$ $= \min_k\{\beta_{ik} + \beta_{kj}\}$.

Означення 2 [1, с.357]. Сагайдаком зведеної матриці показників $Q = Q(\mathcal{E})$ називається сагайдак, матриця суміжності якого задається формулою $[Q] = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)}$.

Означення 3 [1]. Зведені матриці показників $\mathcal{E}_1$ і $\mathcal{E}_2$ називається еквівалентними, якщо одну можна отримати з іншої за допомогою елементарних перетворень двох типів:

1) відняти ціле число t від елементів i-го рядка та додати це число до елементів i-го стовпчика;

2) поміняти місцями два рядки і поміняти місцями два стовпчика з такими ж номерами.

Означення 4 [1, с.357]. Сагайдак Q називається *допустимим*, якщо існує зведена матриця показників $\mathcal{E}$, така, що $Q(\mathcal{E}) = Q$.

Означення 5 [5]. Сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ називається зваженим, якщо визначена функція $\omega: AQ \to \mathbb{R}$. Функція ω називається ваговою, а її значення на стрілці називається вагою стрілки.

Сума ваг усіх стрілок шляху називається вагою шляху.

Теорема 1 [5] Сильнозв'язний сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ є допустимим тоді і тільки тоді, коли існує вагова функція $\omega: AQ \to \mathbb{N} \cup \{\emptyset\}$, яка задовольняє умовам:

1) вага стрілки з точки i у точку j менша за вагу шляху з точки i у точку j довжини $l \geq 2$;
2) вага петлі в точці i менше за вагу будь-якого циклу, що проходить через точку i, довжини $l \geq 2$;
3) вага будь-якого циклу більше або дорівнює 1;
4) вага петлі дорівнює 1;
5) через кожну точку без петлі проходить цикл довжини $l \geq 2$, вага якого дорівнює 1.

Зауваження [7]. Згідно з умовами (4) та (5) через кожну точку допустимого сагайдака проходить цикл ваги 1.

Означення 7 [5]. Вагову функцію, яка задовольняє всі умови теореми 1, будемо називати допустимою ваговою функцією.

За сагайдаком Q та допустимій ваговій функції ω можна побудувати матрицю показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ таким чином: якщо сагайдак Q містить стрілку σ_{ij}, то $\alpha_{ij} = \omega(\sigma_{ij})$ у протилежному випадку α_{ij} дорівнює вазі найлегшого шляху із вершини v_i у вершину v_j.

Означення 8 [7]. Простий цикл у сагайдаку $Q = (VQ, AQ)$, вага якого дорівнює 1, будемо називати *одиничним.*

Твердження 1 [7]. У допустимому сагайдаку $Q = (VQ, AQ)$, між вершинами одиничного циклу не існує інших стрілок, окрім стрілок цього циклу.

Твердження 2 [7]. Допустимий сагайдак Q не може містити двох стрілок (v_i, v_a) та (v_j, v_a), де вершини v_i, v_j належать одному одиничному циклу.

Твердження 3 [7]. Допустимий сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ не може містити стрілки (v_a, v_i), (v_a, v_j), де вершини v_i, v_j належать деякому одиничному циклу.

В орієнтованому графі Q позначимо через $d(v_1, v_2)$ мінімальну кількість одиничних циклів, через вершини яких потрібно пройти, щоб з вершини v_1 потрапити у вершину v_2. Будемо вважати $d(v, v) = 0$.

Лема 1 [7].

1. $d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$, для всіх $v_i, v_j \in Q$,
2. $d(v_i, v_j) + d(v_j, v_k) \geq d(v_i, v_j)$ для всіх $v_i, v_j, v_k \in Q$.

Лема 2 [7]. В одиничному сагайдаку Q існує вершина v_1 така, що для довільної вершини $v_k \in VQ$ має місце нерівність $d(v_1, v_k) \leq \left[\frac{n}{2}\right]$.

Означення 14 [7]. Допустимий сагайдак Q будемо називати *одиничним*, якщо об'єднання одиничних циклів допустимого сагайдака Q утворює сильнозв'язний сагайдак Q_1, такий, що $VQ = VQ_1$.

Означення 15 [6]. Допустимий сагайдак $\boldsymbol{Q}$ називається *жорстким*, якщо існує з точністю до еквівалентності єдина зведена матриця показників $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ така, що $\boldsymbol{Q(\mathcal{E}) = Q}$.

Означення 16. Нежорсткий допустимий сагайдак $\boldsymbol{Q}$, який одержується зі скінченної кількості (з точністю до еквівалентності) матриць показників, називається *майже жорстким*.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Теорема 2. Якщо для довільної вагової функції допустимий сагайдак одиничний, то він жорсткий або майже жорсткий. Якщо існує вагова функція, для якої сагайдак не є одиничним, то існує нескінченна кількість попарно нееквівалентних матриць показників, з яких він одержується.

Доведення. Спочатку доведемо першу частину теореми. Нехай $\boldsymbol{Q}$ – допустимий сагайдак, який для довільної вагової функції є одиничним. Доведемо, що $\boldsymbol{Q}$ одержується зі скінченної кількості матриць показників.

Нехай $Q = Q(\mathcal{E})$, $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$. Доведемо, що $\alpha_{1j} \leq n$. З леми 2 випливає, що в сагайдаку Q існує вершина v_1 така, що для довільної вершини $v_k \in VQ$ має місце нерівність $d(v_1, v_k) \leq \left[\frac{n}{2}\right]$:

$$\alpha_{ij} \leq d(v_i, v_j) \leq d(v_i, v_1) + d(v_1, v_j) \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n.$$

Отже, $0 \leq \alpha_{ij} \leq n$, тобто елемент α_{ij} може приймати не більше, ніж $n+1$ різних значень. Тобто кількість матриць показників, з яких одержується сагайдак Q (за комбінаторним правилом добутку), не перевищує $(n+1)^{\frac{n}{2}}$. Отже, сагайдак Q одержується зі скінченної кількості матриць, тому він жорсткий або майже жорсткий.

Доведемо другу частину теореми. Нехай $\boldsymbol{\omega}$ – вагова функція, для якої сагайдак $\boldsymbol{Q}$ – не одиничний. Тоді множину $\boldsymbol{VQ}$ можна розбити на дві частини $\boldsymbol{VQ_1}$ та $\boldsymbol{VQ_2}$ так, щоб не існувало одиничного циклу, який містить вершини з обох частин. Оскільки сагайдак $\boldsymbol{Q}$ сильнозв'язний, то є стрілки (або стрілка), які починаються в $\boldsymbol{VQ_1}$ та закінчуються в $\boldsymbol{VQ_2}$. За ваговою функцією $\boldsymbol{\omega}$ побудуємо вагову функцію $\boldsymbol{\omega_k}$, у якій вага стрілок, що починаються в $\boldsymbol{VQ_1}$ та закінчуються в $\boldsymbol{VQ_2}$, збільшена на $\boldsymbol{k}$. Очевидно, що вагова функція $\boldsymbol{\omega_k}$ є допустима, тобто вона задовольняє всі умови теореми 1. Оскільки збільшилась вага стрілок, які не належать одиничним циклам, то умови 2-5 виконуються. Умова (1) теореми 1 виконується тому, що якщо вага стрілки збільшилась на $\boldsymbol{k}$, то вага шляху збільшилась не менше, ніж на $\boldsymbol{k}$.

Оскільки для різних $\boldsymbol{k}$ ми одержуємо різні сагайдаки (сума елементів різна), то сагайдак $\boldsymbol{Q}$ одержується з нескінченної кількості матриць.

Наслідок. Допустимий сагайдак $\boldsymbol{Q}$ з петлями не є жорстким або майже жорстким.

Доведення. Одиничний сагайдак не має петель, бо кожна його вершина належить деякому одиничному циклу. Сагайдак $\boldsymbol{Q}$ має петлі, тому не є одиничним для довільної допустимої вагової функції. За теоремою 2 сагайдак $\boldsymbol{Q}$ одержується з нескінченної кількості матриць.

Теорема 3 [2]. Дві зведені матриці показників еквівалентні тоді і тільки тоді, коли вони мають ізоморфні сагайдаки, вага відповідних простих циклів яких однакова.

Теорема 4. На чотирьох вершинах існує тільки чотири жорстких не ізоморфних сагайдака та жодного майже жорсткого.

Доведення. Оскільки жорсткий або майже жорсткий сагайдак не має петель, то через кожну вершину має проходити одиничний цикл. За твердженням 1 одиничний цикл не може містити інших стрілок, крім стрілок самого циклу. Тому в сагайдаку з чотирма вершинами одиничний цикл складається мінімум з двох, максимум з чотирьох стрілок. Розглянемо три різних випадки:

а) Найбільший одиничний цикл складається з чотирьох стрілок. Оскільки за твердженням 1 сагайдак не може містити інших стрілок, крім циклу, то у випадку а) є тільки один жорсткий сагайдак:

$$[\boldsymbol{Q_1}] = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

б) Найбільший одиничний цикл складається з трьох стрілок. Нехай цей цикл проходить через вершини (1-2-3). Оскільки четверта вершина без петлі, то через неї також проходить одиничний цикл. Можливі два випадки: одиничний цикл, який проходить через четверту вершину, проходить ще через одну або через дві вершини.

У першому випадку ми одержимо $[\boldsymbol{Q_2}] = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, якщо четверта вершина утворює одиничний цикл не з третьою, а з другою або з першою вершиною, то ми одержуємо сагайдаки ізоморфні $\boldsymbol{Q_2}$.

У другому випадку ми одержимо $[\boldsymbol{Q_3}] = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, якщо четверта вершина утворює одиничний цикл не з стрілкою $\boldsymbol{\sigma_{31}}$, а з стрілкою $\boldsymbol{\sigma_{12}}$ або з стрілкою $\boldsymbol{\sigma_{23}}$, ми одержимо сагайдаки, аналогічні до $\boldsymbol{Q_3}$.

Зауважимо, що четверта вершина не може утворити одиничний цикл з двома стрілками, оскільки одержується одиничний цикл, який складається з чотирьох вершин та містить стрілку всередині циклу, що суперечить твердженню 1.

в) Найбільший одиничний цикл складається з двох стрілок. Тобто всі одиничні цикли складаються з двох стрілок.

Якщо для сагайдака $\boldsymbol{Q}$ можна підібрати вагову функцію, для якої в сагайдаку є два одиничних цикли, які складаються з різних вершин (наприклад (1, 2), (3, 4)), то за теоремою 2 такий сагайдак одержується з нескінченної кількості матриць показників.

Залишається розглянути випадок, коли всі одиничні цикли проходять через одну вершину. Нехай це буде вершина 1. Одержуємо сагайдак $[\boldsymbol{Q_4}] = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, який містить три одиничних цикли. Якщо до нього додати стрілки або стрілку, то він стане недопустимим (твердження 2 або твердження 3).

Оскільки всі прості цикли сагайдака $\boldsymbol{Q_1}$ - одиничні, то за теоремою 3 всі матриці показників, з яких одержується сагайдак $\boldsymbol{Q_1}$, попарно еквівалентні, тобто $\boldsymbol{Q_1}$ – жорсткий сагайдак. Аналогічно $\boldsymbol{Q_2}$, $\boldsymbol{Q_3}$, $\boldsymbol{Q_4}$ – жорсткі сагайдаки.

Отже, на чотирьох вершинах є чотири жорстких сагайдака, та жодного майже жорсткого. Теорема доведена.

ВИСНОВКИ

Знайдено умови того, що сагайдак одержується зі скінченної кількості матриць показників. Якщо для довільної вагової функції допустимий сагайдак одиничний, то він жорсткий або майже жорсткий. Якщо існує вагова функція, для якої сагайдак не є одиничним, то існує нескінченна кількість попарно нееквівалентних матриць показників, з яких він одержується. На чотирьох вершинах є чотири жорстких сагайдака, та жодного майже жорсткого.

ЛІТЕРАТУРА

1. Hazewinkel M. Algebras Rings and Modules, vol. 1 / M. Hazewinkel, N. Gubareni, V. V. Kirichenko. – Kluwer Academic Publisheers, 2004. – 380 p.

2. Hazewinkel M. Algebras Rings and Modules, vol. 2 / M. Hazewinkel, N. Gubareni, V. V. Kirichenko. – Kluwer Academic Publisheers, 2007. – 400 p.

3. Kirichenko V. V. Exponent Matrices and Tiled Order over Discrete Valuation Rings / V. V. Kirichenko, O. V. Zelenskiy, V. N. Zhuravlev // International Journal of Algebra and Computation. – 2005. – Vol. 15, № 5&6. – P. 1-16.

4. Зеленський О. В. Жорсткі сагайдаки зведених матриць показників / О. В. Зеленський // Вісник Київського університету. Серія : фізико-математичні науки. – 2007. – № 3. – С. 27-31.

5. Журавлев В. Н. Допустимые колчаны / В. Н. Журавлев // Фундаментальная и прикладная математика. – 2008. – Т. 14, №7. – С. 121-128.

6. Кириченко В. В. О жестких колчанах / В. В. Кириченко, В. Н. Журавлёв, И. Н. Цыгановская // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – Т. 12, вып. 8. – С. 105-120.

7. Журавльов В. М. Одиничні сагайдаки матриці показників / В. М. Журавльов, О. В. Зеленський, В. М. Дармосюк // Вісник Київського університету. Серія : фізико-математичні науки. – 2012. – № 4. – С. 27-31.

REFERENCES

1. Hazewinkel, M., Gubareni, N. and Kirichenko, V.V. (2004), Algebras Rings and Modules, vol. 1, Kluwer Academic Publisheers.

2. Hazewinkel, M., Gubareni, N. and Kirichenko, V.V. (2007), Algebras Rings and Modules, vol. 2, Kluwer Academic Publisheers.

3. Kirichenko, V.V., Zelenskiy, O.V. and Zhuravlev, V.N. (2005), "Exponent Matrices and Tiled Order over Discrete Valuation Rings", *International Journal of Algebra and Computation*, vol. 15, no. 5&6, pp. 1-16.

4. Zelenskiy, O.V. (2007), "Rigid quivers of reduced exponent matrices", *Visnyk Kyyivs'koho universytetu*, Seriya: fizyko-matematychni nauky, no.3, pp. 27-31.

5. Zhuravlev, V.N. (2008), "Admissible quivers", *Fundamental'naya i prikladnaya matematika*, vol. 14, no. 7, p. 121-128.

6. Kirichenko, V.V., Zhuravlev, V.N. and Tsyganivska, I.N. (2006), "On rigid quiver", *Fundamental'naya i prikladnaya matematika*, vol. 12, no. 8, pp. 105-120.

7. Zhuravlev, V.N., Zelenskiy, O.V. and Darmosiuk, V.M. (2012), "Unit quivers of exponent matrices", *Visnyk Kyyivs'koho universytetu*, Seriya: fizyko-matematychni nauky, no. 4, pp. 27-31.