6. Pirmamedov, I.T. (2009), “Calculation of parametric oscillations of a homogeneous thickness viscoelastic rod in visco elastic ground”, *Mezhdunarodnyy nauchno-tekhnicheskiy zhurnal, Ob"edinennyy institut mashinostroeniya NAN Belorusi*, no. 3(8), pp. 52-56.

7. Kairov, A.S., Latanskaya, L.A. and Kairov, V.A. (2009), “Experimental study of free oscillations of cylindrical shells reinforced with attached solids”, *Problemy obchyslyuval'noyi mekhaniky i mitsnosty konstruktsiy*, issue 13, pp. 107-113.

8. Latifov, F.S. (1999), “The asymptotic analysis of the problem of not axisymmetric free vibrations in an infinite elastic medium cylindrical shell filled with an ideal fluid”, *DAN Az. Respubliki*, vol. LV, no. 5-6, pp. 8-15.

9. Latifov, F.S. (1999), *Kolebaniya obolochek s uprugoy i zhidkoy sredoy* [Fluctuations shells with elastic and liquid media], Elm, Baku.

10. Amiro, I.Ya. and Zarutskiy, V.A. (1980), *Teoriya rebristykh obolochek. Metody rascheta obolochek* [The theory of ribbed shells. Methods of calculating shells], Naukova dumka, Kiev.

11. Vol'mir, A.S. (1980), *Obolochki v potoke zhidkosti i gaza. Zadachi gidrouprugosti* [Skins in the liquid flow and gas. Tasks hydroelasticity], Nauka, Moskow.

УДК 539.3

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РАЗРЫВНОГО РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Левада В. С., к. т. н., доцент, Левицкая Т. И., к. т. н., доцент, Хижняк В. К., к. ф.-м. н., доцент

Запорожский национальный технический университет,
ул. Жуковского, 64, г. Запорожье, 69063, Украина

tigr_lev@ukr.net

Опираясь на соотношения, связывающие производные перемещений, как обобщенные функции, с обычными производными, получена система линейных дифференциальных уравнений. В правых частях уравнений содержатся обобщенные функции, зависящие от скачков перемещений и напряжений. Решение системы получено в виде свертки матрицы фундаментальных решений со столбцом правых частей системы.

Ключевые слова: перемещения, напряжение, плоская задача, анизотропия, дефекты, разрывное решение, обобщенная функция, краевая задача.

ІНТЕГРАЛЬНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ РОЗРИВНОГО РОЗВ’ЯЗКА ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ АНІЗОТРОПНОГО СЕРЕДОВИЩА

Левада В. С., к. т. н., доцент, Левицька Т. І., к. т. н., доцент, Хижняк В. К., к. ф.-м. н., доцент

Запорізький національний технічний університет,
вул. Жуковського, 64, м. Запоріжжя, 69063, Україна

tigr_lev@ukr.net

Опираючись на співвідношення, що зв’язують похідні переміщень, як узагальнені функції, зі звичайними похідними, отримана система лінійних диференціальних рівнянь. У правих частинах рівнянь містяться узагальнені функції, що залежать від стрибків переміщень і напружень. Розв’язок системи отримано у вигляді згортки матриці фундаментальних рішень зі стовпцем правих частин системи.

Ключові слова: переміщення, напруга, плоска задача, анізотропія, дефекти, розривний розв’язок, узагальнена функція, крайова задача.

INTEGRAL REPRESENTATIONS OF DISCONTINUOUS SOLUTIONS OF PLANE PROBLEMS OF THEORY OF ELASTICITY FOR AN ANISOTROPIC MEDIUM

Levada V. S., Ph.D. of Technical Science, Associate Proffessor,
Levitskaya T. I., Ph.D. of Technical Science, Associate Proffessor,
Khizhnyak V. K., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Proffessor

Zaporizhzhya National Technical University,
Zhukovsky str., 64, Zaporozhye, 69063, Ukraine

tigr_lev@ukr.net

The research of stress-strain state of the solid deformable bodies containing defects is an important issue. At the same time the solution of corresponding boundary problems causing serious mathematical difficulties. To solve these problems earlier been proposed generalized method of integral transformations. S. Crouch proposed a method of discontinuous displacements as a variant of the boundary element method (BEM). The corresponding boundary elements for anisotropic media were obtained in [4, 5]. Used in this case the connection between ordinary and generalized derivatives regular generalized functions. This method is used in the present work.

Based on the relations between the derivatives of displacements, as generalized functions with conventional derivatives, obtained a system of linear differential equations. In the right-hand sides of the equations contain generic functions, depending on the jumps of displacements and stresses. The system solution is obtained as of a convolution matrix of fundamental solutions with the column of the right parts of the system. Obtained an integral representation of a discontinuous solution of the plane problem of elasticity theory for an anisotropic medium containing defects (curves on which the discontinuities of the first kind of displacement or stresses). From the found representations integral equations can be obtained, which can be solved by the boundary element.

Key words: displacement, stress, plane problem, anisotropy defects, discontinuous solution, generalized function, the boundary value problem.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование напряженно-деформированного состояния твердых деформируемых тел, содержащих дефекты, является важной проблемой. В то же время решение соответствующих краевых задач вызывает серьезные математические затруднения. Для решения этих задач Г.Я. Поповым был предложен обобщенный метод интегральных преобразований [1]. Этот метод получил развитие в работах Г.А. Моραря [2] и других исследователей. С. Краучем был предложен метод разрывных смещений как вариант метода граничных элементов (МГЭ) [3]. Соответствующие граничные элементы для анизотропных сред были получены в работах [4, 5]. При этом использовалась связь между обычными и обобщенными производными регулярных обобщенных функций. Эта методика применяется и в данной работе.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается следующая задача

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где

$$L_{11} = c_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2c_{16}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + c_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad L_{12} = L_{21} = c_{16}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(c_{12} + c_{66}\right)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + c_{26}\frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$L_{22} = c_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2c_{26}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + c_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

c_{ij} – упругие постоянные, связывающие напряжения и деформации:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{26} \\ c_{16} & c_{26} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$u(x,y)$, $v(x,y)$ – перемещения вдоль осей $0x$ и $0y$, соответственно.

Рассматривается обобщенное плоское напряженное состояние. $(x,y) \in B \subset R^2$, B – ограниченная область, l_0 – кусочно-гладкая граница области B, $l_i = A_i B_i$ ($i = \overline{1,k}$) – гладкие кривые, лежащие в B. На l_0 задаются два граничных условия. Также по два условия задаются на l_i. Кривые l_i моделируют трещины или тонкие включения.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Введем следующие обозначения:

$n^{(0)} = \left(n_x^{(0)}, n_y^{(0)}\right)$ – единичный внешний нормальный вектор к l_0;

$n^{(i)} = \left(n_x^{(i)}, n_y^{(i)}\right)$ – произвольно направленный единичный внешний нормальный вектор к l_i ($i = \overline{1,k}$).

Если $\gamma \subset B$, то на γ определяется вектор напряжений

$$\sigma_x^n = \sigma_x \cos(n \hat{\ } x) + \tau_{xy} \cos(n \hat{\ } y), \quad \sigma_y^n = \tau_{xy} \cos(n \hat{\ } x) + \sigma_y \cos(n \hat{\ } y),$$

где n – нормальный вектор к γ.

Учитывая (2), получаем:

$$\sigma_x^n(u,v) = c_{11} \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n \hat{\ } x) + c_{16} \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n \hat{\ } x) + c_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \cos(n \hat{\ } x) +$$

$$+ c_{16} \frac{\partial v}{\partial x} \cos(n \hat{\ } x) + c_{16} \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n \hat{\ } y) + c_{66} \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n \hat{\ } y) + c_{26} \frac{\partial v}{\partial y} \cos(n \hat{\ } y) + c_{66} \frac{\partial v}{\partial x} \cos(n \hat{\ } y);$$

$$\sigma_y^n(u,v) = c_{16} \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n \hat{\ } x) + c_{66} \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n \hat{\ } x) + c_{26} \frac{\partial v}{\partial y} \cos(n \hat{\ } x) +$$

$$+ c_{66} \frac{\partial v}{\partial x} \cos(n \hat{\ } x) + c_{12} \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n \hat{\ } y) + c_{26} \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n \hat{\ } y) + c_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \cos(n \hat{\ } y) + c_{26} \frac{\partial v}{\partial x} \cos(n \hat{\ } y).$$

Положим $u(x,y) \equiv 0$, $v(x,y) \equiv 0$, $(x,y) \notin B \bigcup l_0$. Будем рассматривать u и v как регулярные обобщенные функции. $u \in D'(R^2)$, $v \in D'(R^2)$ [6].

Обозначим: $D^\alpha f(x,y)$ – производная порядка α регулярной обобщенной функции $f(x,y) \in D'(R^2)$; $\{D^\alpha f(x,y)\}$ – обычная производная порядка α функции $f(x,y)$.

Используя связь между $D^\alpha f(x,y)$ и $\{D^\alpha f(x,y)\}$, где $f(x,y) = u(x,y)$ или $f(x,y) = v(x,y)$, получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}\right\} + \sum_{i=0}^{k} [f_i] n_x^{(i)} \delta(l_i); \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \left\{\frac{\partial f}{\partial y}\right\} + \sum_{i=0}^{k} [f_i] n_y^{(i)} \delta(l_i);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right\}+\sum_{i=0}^{k}\left(\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]n_x^{(i)}\delta(l_i)+\frac{\partial}{\partial x}\left([f]n_x^{(i)}\delta(l_i)\right)\right);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right\}+\sum_{i=0}^{k}\left(\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]n_x^{(i)}\delta(l_i)+\frac{\partial}{\partial x}\left([f]n_y^{(i)}\delta(l_i)\right)\right)=$$

$$=\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right\}+\sum_{i=0}^{k}\left(\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]n_y^{(i)}\delta(l_i)+\frac{\partial}{\partial y}\left([f]n_x^{(i)}\delta(l_i)\right)\right).$$

Здесь: $\left[g(x,y)\right]$ – скачок функции $g(x,y)$ на кривой l_i в направлении нормали $n^{(i)}$; $\delta(l_i)$ – дельта-функция, сосредоточенная на l_i ($i=\overline{0,k}$).

Учитывая (4), получаем:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где

$$g_1=\sum_{i=0}^{k}\Bigg(\Bigg(c_{11}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]n_x^{(i)}+c_{16}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]n_x^{(i)}+c_{16}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]n_y^{(i)}+c_{66}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]n_y^{(i)}+$$

$$+c_{16}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]n_x^{(i)}+c_{12}\left[\frac{\partial v}{\partial y}\right]n_x^{(i)}+c_{66}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]n_y^{(i)}+c_{26}\left[\frac{\partial v}{\partial y}\right]n_y^{(i)}\Bigg)\delta(l_i)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(c_{11}[u]n_x^{(i)}+c_{16}[u]n_y^{(i)}+c_{16}[v]n_x^{(i)}+c_{12}[v]n_y^{(i)}\right)\delta(l_i)\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(c_{16}[u]n_x^{(i)}+c_{66}[u]n_y^{(i)}+c_{66}[v]n_x^{(i)}+c_{26}[v]n_y^{(i)}\right)\delta(l_i)\right)\Bigg);$$

$$g_2=\sum_{i=0}^{k}\Bigg(\Bigg(c_{16}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]n_x^{(i)}+c_{12}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]n_x^{(i)}+c_{66}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]n_y^{(i)}+c_{26}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]n_y^{(i)}+$$

$$+c_{66}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]n_x^{(i)}+c_{26}\left[\frac{\partial v}{\partial y}\right]n_x^{(i)}+c_{26}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]n_y^{(i)}+c_{22}\left[\frac{\partial v}{\partial y}\right]n_y^{(i)}\Bigg)\delta(l_i)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(c_{16}[u]n_x^{(i)}+c_{12}[u]n_y^{(i)}+c_{66}[v]n_x^{(i)}+c_{26}[v]n_y^{(i)}\right)\delta(l_i)\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(c_{66}[u]n_x^{(i)}+c_{26}[u]n_y^{(i)}+c_{26}[v]n_x^{(i)}+c_{22}[v]n_y^{(i)}\right)\delta(l_i)\right)\Bigg).$$

Учитывая (3), получаем:

$$g_1=\sum_{i=0}^{k}\Bigg(\left[\sigma_x^{n^{(i)}}(u,v)\right]\delta(l_i)+\frac{\partial}{\partial x}\Big(\Big(c_{11}[u]n_x^{(i)}+c_{16}[u]n_y^{(i)}+c_{16}[v]n_x^{(i)}+$$

$$+c_{12}[v]n_y^{(i)}\Big)\delta(l_i)\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(c_{16}[u]n_x^{(i)}+c_{66}[u]n_y^{(i)}+c_{66}[v]n_x^{(i)}+c_{26}[v]n_y^{(i)}\right)\delta(l_i)\right)\Bigg);$$

$$g_2=\sum_{i=0}^{k}\Bigg(\left[\sigma_y^{n^{(i)}}(u,v)\right]\delta(l_i)+\frac{\partial}{\partial x}\Big(\Big(c_{16}[u]n_x^{(i)}+c_{66}[u]n_y^{(i)}+c_{66}[v]n_x^{(i)}+$$

$$+c_{26}[v]n_y^{(i)}\Big)\delta(l_i)\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\Big(c_{12}[u]n_x^{(i)}+c_{26}[u]n_y^{(i)}+c_{26}[v]n_x^{(i)}+c_{22}[v]n_y^{(i)}\Big)\delta(l_i)\Big)\Big).$$

Решение (5) получаем сверткой матрицы фундаментальных решений $\begin{bmatrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22}\end{bmatrix}$ с матрицей $\begin{bmatrix}g_1\\ g_2\end{bmatrix}$. Матрица $\begin{bmatrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22}\end{bmatrix}$ – решение уравнения

$$\begin{bmatrix}L_{11} & L_{12}\\ L_{21} & L_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\delta(x)\delta(y), \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix}u(x,y)\\ v(x,y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Gamma_{11}(x,y) & \Gamma_{12}(x,y)\\ \Gamma_{21}(x,y) & \Gamma_{22}(x,y)\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}g_1(x,y)\\ g_2(x,y)\end{bmatrix}. \tag{7}$$

Выполнив (7), с учетом (3), получаем:

$$\begin{aligned}u(x,y)=\sum_{i=0}^{k}\Bigg(&\int_{l_i}\left[\sigma_\xi^{n_i}(u,v)\right]_{(\xi,\eta)}\Gamma_{11}(\mathrm{x}-\xi,\mathrm{y}-\eta)\,\mathrm{ds}_{(\xi,\eta)}+\\ &+\int_{l_i}\left[\sigma_\eta^{n_i}(u,v)\right]_{(\xi,\eta)}\Gamma_{12}(\mathrm{x}-\xi,\mathrm{y}-\eta)\,\mathrm{ds}_{(\xi,\eta)}-\\ &-\int_{l_i}[u]_{(\xi,\eta)}\sigma_\xi^{n_i}(u,v)\big(\Gamma_{11}(\mathrm{x}-\xi,\mathrm{y}-\eta),\Gamma_{21}(\mathrm{x}-\xi,\mathrm{y}-\eta)\big)\mathrm{ds}_{(\xi,\eta)}-\\ &-\int_{l_i}[v]_{(\xi,\eta)}\sigma_\eta^{n_i}(u,v)\big(\Gamma_{11}(\mathrm{x}-\xi,\mathrm{y}-\eta),\Gamma_{21}(\mathrm{x}-\xi,\mathrm{y}-\eta)\big)\mathrm{ds}_{(\xi,\eta)}\Bigg);\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}v(x,y)=\sum_{i=0}^{k}\Bigg(&\int_{l_i}\left[\sigma_\xi^{n_i}(u,v)\right]_{(\xi,\eta)}\Gamma_{21}(\mathrm{x}-\xi,\mathrm{y}-\eta)\,\mathrm{ds}_{(\xi,\eta)}+\\ &+\int_{l_i}\left[\sigma_\eta^{n_i}(u,v)\right]_{(\xi,\eta)}\Gamma_{22}(\mathrm{x}-\xi,\mathrm{y}-\eta)\,\mathrm{ds}_{(\xi,\eta)}-\\ &-\int_{l_i}[u]_{(\xi,\eta)}\sigma_\xi^{n_i}(u,v)\big(\Gamma_{12}(\mathrm{x}-\xi,\mathrm{y}-\eta),\Gamma_{22}(\mathrm{x}-\xi,\mathrm{y}-\eta)\big)\mathrm{ds}_{(\xi,\eta)}-\\ &-\int_{l_i}[v]_{(\xi,\eta)}\sigma_\eta^{n_i}(u,v)\big(\Gamma_{21}(\mathrm{x}-\xi,\mathrm{y}-\eta),\Gamma_{22}(\mathrm{x}-\xi,\mathrm{y}-\eta)\big)\mathrm{ds}_{(\xi,\eta)}\Bigg).\end{aligned} \tag{9}$$

Вид матрицы $\begin{bmatrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22}\end{bmatrix}$ зависит от вида корней алгебраического уравнения [7]

$$\begin{aligned}&\mu^4\left(c_{11}c_{66}-c_{16}^2\right)+2\mu^3\left(c_{11}c_{26}-c_{16}c_{12}\right)+\mu^2\left(c_{11}c_{22}+2c_{16}c_{26}-\right.\\ &\left.-c_{12}^2-2c_{12}c_{66}\right)+2\mu\left(c_{16}c_{22}-c_{12}c_{26}\right)+c_{66}c_{22}-c_{26}^2=0.\end{aligned} \tag{10}$$

Уравнение (10) может иметь следующие варианты корней:

1) $\mu_{1,2}=\alpha_1\pm i\beta_1$, $\mu_{3,4}=\alpha_2\pm i\beta_2$;

2) $\mu_{1,2}=\alpha+i\beta$, $\mu_{3,4}=\alpha-i\beta$; $\beta_1,\beta_2,\beta>0$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha\in R$.

Для первого варианта корней:

$$\Gamma_{11}=\frac{1}{2\pi\beta_1\beta_2D_1}\left(\beta_2H_1(\varphi-\tilde{\varphi})+\beta_2H_2\ln r_1+\beta_1\tilde{H}_2\ln\tilde{r}_1\right);$$

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = \frac{1}{2\pi\beta_1\beta_2 D_1}\left(\beta_2 H_3\left(\varphi - \tilde{\varphi}\right) + \beta_2 H_4 \ln r_1 + \beta_1 \tilde{H}_4 \ln \tilde{r}_1\right);$$

$$\Gamma_{22} = \frac{1}{2\pi\beta_1\beta_2 D_1}\left(\beta_2 H_5\left(\varphi - \tilde{\varphi}\right) + \beta_2 H_6 \ln r_1 + \beta_1 \tilde{H}_6 \ln \tilde{r}_1\right),$$

где

$$r_1(x,y) = \left(x^2\left(\alpha_1^2 + \beta_1^2\right) + 2\alpha_1 xy + y^2\right)^{1/2},$$

$$\varphi(x,y) = arctg\left(\frac{y}{x\beta_1} + \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right),$$

$$D_1 = \left(c_{11}c_{66} - c_{16}^2\right)\left(\beta_1^4 + \beta_2^4 + \alpha_1^4 + \alpha_2^4 + 6\alpha_1^2\alpha_2^2 -\right.$$

$$\left.-2\beta_1^2\beta_2^2 + 2\beta_1^2\alpha_1^2 + 2\beta_1^2\alpha_2^2 - 4\beta_1^2\alpha_1\alpha_2 + 2\beta_2^2\alpha_1^2 + 2\beta_2^2\alpha_2^2 - 4\beta_2^2\alpha_1\alpha_2 - 4\alpha_1^3\alpha_2 - 4\alpha_1\alpha_2^3\right);$$

$$H_1 = 2c_{66}p_1 - 2c_{26}p_2 - 2c_{22}p_3; \quad H_2 = c_{66}p_4 + 2c_{26}p_5 - c_{22}p_6;$$

$$H_3 = -2c_{16}p_1 + \left(c_{12} + c_{66}\right)p_2 + 2c_{26}p_3; \quad H_4 = -c_{16}p_4 - \left(c_{12} + c_{66}\right)p_5 + c_{26}p_6;$$

$$H_5 = 2c_{11}p_1 - 2c_{16}p_2 - 2c_{66}p_3; \quad H_6 = c_{11}p_4 + 2c_{16}p_5 - c_{66}p_6;$$

$$p_1 = -\beta_1^3\alpha_2 - \beta_1\alpha_1^2\alpha_2 + \beta_1\beta_2^2\alpha_1 + \beta_1\alpha_1\alpha_2^2; \quad p_2 = \beta_1^3 - \beta_1\beta_2^2 + \beta_1\alpha_1^2 - \beta_1\alpha_2^2;$$

$$p_3 = \beta_1\left(\alpha_1 - \alpha_2\right); \quad p_4 = \beta_1^4 - \beta_1^2\beta_2^2 + 2\beta_1^2\alpha_1^2 - \beta_1^2\alpha_2^2 - 2\beta_1^2\alpha_1\alpha_2 + \beta_2^2\alpha_1^2 + \alpha_1^4 + \alpha_1^2\alpha_2^2 - 2\alpha_1^3\alpha_2;$$

$$p_5 = \beta_1^2\alpha_1 - 2\beta_1^2\alpha_2 + \beta_2^2\alpha_1 + \alpha_1^3 + \alpha_1\alpha_2^2 - 2\alpha_1^2\alpha_2; \quad p_6 = \beta_1^2 - \beta_2^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2;$$

$$\tilde{f}\left(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\right) = f\left(\alpha_2,\alpha_1,\beta_2,\beta_1\right).$$

Для второго варианта корней:

$$\Gamma_{11} = \frac{1}{4\pi D_2}\left(K_1 \ln r - \frac{m_{23}}{r^2}\right);$$

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = \frac{1}{4\pi D_2}\left(K_4 \ln r - \frac{m_{56}}{r^2}\right);$$

$$\Gamma_{22} = \frac{1}{4\pi D_2}\left(K_7 \ln r - \frac{m_{89}}{r^2}\right),$$

где

$$r(x,y) = \left(x^2\left(\alpha^2 + \beta^2\right) + 2\alpha xy + y^2\right)^{1/2}, \quad m_{ij} = \left(K_j\alpha - K_i\beta\right)x^2 + K_j xy;$$

$$D_2 = \beta^3\left(c_{11}c_{66} - c_{16}^2\right);$$

$$K_1 = c_{66}\left(\beta^2 + \alpha^2\right) + 2c_{26}\alpha + c_{22}; \quad K_2 = c_{66}\left(\beta^3 - \beta\alpha^2\right) - 2c_{26}\beta\alpha - c_{22}\beta;$$

$$K_3 = -2c_{66}\beta^2\alpha - 2c_{26}\beta^2; \quad K_4 = -c_{16}\left(\beta^2 + \alpha^2\right) - \left(c_{12} + c_{66}\right)\alpha - c_{26};$$

$$K_5 = c_{16}\left(\beta\alpha^2 - \beta^3\right) + \left(c_{12} + c_{66}\right)\alpha\beta + c_{26}\beta; \quad K_6 = 2c_{16}\beta^2\alpha + \left(c_{12} + c_{66}\right)\beta^2;$$

$$K_7 = c_{11}\left(\beta^2 + \alpha^2\right) + 2c_{16}\alpha + c_{66}; \quad K_8 = c_{66}\left(\beta^3 - \alpha^2\beta\right) - 2c_{16}\alpha\beta - c_{66}\beta;$$

$$K_9 = -2c_{11}\alpha\beta^2 - 2c_{16}\beta^2.$$

Устремляя в (8, 9) точку (x, y) к l_i ($i = \overline{0,k}$) и учитывая заданные условия на l_i, получаем сильно сингулярную систему граничных интегральных уравнений, которую можно решать МГЭ.

ВЫВОДЫ

Получено интегральное представление разрывного решения плоской задачи теории упругости для анизотропной среды, содержащей дефекты (кривые, на которых терпят разрывы первого рода перемещения или напряжения). Полученное представление позволяет свести краевую задачу к системе интегральных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – М. : Наука, 1982. – 344 с.
2. Морарь Г. А. Метод разрывных решений в механике деформируемых тел / Г. А. Морарь. – Кишинев : Штинца, 1990. – 130 с.
3. Крауч С. Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд. – М. : Мир, 1987. – 326 с.
4. Левада В. С. О разрывных решениях в теории анизотропных пластин / В. С. Левада, В. К. Хижняк // Прикладная механика. – 1997. – Т. 33, № 8. – С. 89-91.
5. Левада В. С. О концевом граничном элементе трещины в плоской задаче теории упругости для анизотропных сред (случай разных корней) / В. С. Левада, П. В. Цокотун // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2004. – № 2. – С. 99-102.
6. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1976. – 280 с.
7. Левада В. С. Построение матрицы фундаментальных решений для анизотропной упругой плоскости / В. С. Левада. – Запорожье, 1996. – 13 с. – Рукопись. Деп. в ГНТБ Украины №475–Ук96.

REFERENCES

1. Popov, G.Ya. (1982), *Kontsentratsiya uprugih napryazheniy vozle shtampov, razrezov, tonkih vklyucheniy i podkrepleniy* [The elastic stress concentration near the cliches, incisions, thin inclusions and reinforcements], Nauka, Moskow, Russia.
2. Morar, G.A. (1990), *Metod razryivnyih resheniy v mehanike deformiruemyih tel* [The method of discontinuous solutions in the mechanics of deformable bodies], Shtiintsa, Kishinev, Moldova.
3. Crouch, S. and Starfield, A. (1987), *Metody granichnyih elementov v mehanike tverdogo tela* [Boundary element methods in solid mechanics], Mir, Moskow, Russia.
4. Levada, V.S., Khizhnyak, V. K. (1997), “On discontinuous solutions in the theory of anisotropic plates”, *Prikladnaya mekhanika*, vol. 33, no. 8, pp. 89-91.
5. Levada, V.S. and Tsokotun, P.V. (2004) “About the end-capping border element of crack in the flat task of theory of resiliency for anisotropic environments (case of different roots)”, *Novi materialy i tehnologiyi v metalurgiyi ta mashinobuduvanni*, no. 2, pp. 99-102.
6. Vladimirov, V.S. (1976), *Obobschennyie funktsii v matematicheskoy fizike* [Generalized functions in mathematical physics], Nauka, Moskow, Russia.
7. Levada, V.S. (1996), *Postroenie matritsyi fundamentalnyih resheniy dlya anizotropnoy uprugoy ploskosti* [Construction of a matrix of fundamental solutions for anisotropic elastic plane], Manuscript. Dep. in the GNTB, no. 475, Zaporozhye, Ukraine.