УДК 517.983.27

УМОВИ ФОРМУВАННЯ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНОЇ СИСТЕМИ ЗА ДОПОМОГОЮ ВЕКТОРА КЕРУВАННЯ

[1]Новицький В. В., д. ф.-м. н., професор, [2]Зінчук М. О., к. техн. н., [3]Святовець І. Ф.

[1,2]*Інститут математики НАН України,*
вул. Терещенківська, Київ-4, 301601, Україна

[3]*Запорізька державна інженерна академія,*
просп. Соборний, 226, Запоріжжя, 69006, Україна

[1,2]novyc@imath.kiev.ua, [3]sv.irina0702@gmail.com

Вивчаються умови побудови майже консервативної системи за допомогою зворотного зв’язку. Наведено приклад формування майже консервативної системи та дослідження її стійкості.

Ключові слова: майже консервативна система, зворотній зв’язок, вектор керувань, стійкість.

УСЛОВИЯ ФОРМИРОВАНИЯ ПОЧТИ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ ВЕКТОРА УПРАВЛЕНИЯ

[1]Новицкий В. В., д. ф.-м. н., профессор, [2]Зинчук Н. А., к. техн. н., [3]Святовец И. Ф.

[1,2]*Институт математики НАН Украины,*
ул. Терещенковская, Киев-4, 301601, Украина

[3]*Запорожская государственная инженерная академия,*
просп. Соборный, 226, Запорожье, 69006, Украина

[1,2]novyc@imath.kiev.ua, [3]sv.irina0702@gmail.com

Изучаются условия построения почти консервативной системы с помощью обратной связи. Приведен пример конструирования почти консервативной системы и исследования ее устойчивости.

Ключевые слова: почти консервативная система, обратная связь, вектор управления, устойчивость.

THE CONDITIONS OF CONSTRUCTING OF THE ALMOST CONSERVATIVE SYSTEM USING CONTROLLING VECTOR

[1]Novitsky V. V., D.Sc. in Physics and Maths, professor, Zinchuk, M. O., Ph.D.in Engineering, [3]Svyatovets I. F.

[1,2]*In-t of Mathematics of NAS of Ukraine,*
Tereschenkivska str., Kiev-4, 301601, Ukraine

[3]*Zaporizhzhya State Engineering Academy,*
Soborny Ave., 226, Zaporizhzhya, 69006, Ukraine

[1,2]novyc@imath.kiev.ua, [3]sv.irina0702@gmail.com

Controlled linear stationary system even order is considered in this article. Matrix of coefficients of the variable has the form $\tilde{A}_0 + \varepsilon \tilde{A}_1$ where ε is a small parameter. The system is not almost conservative, i.e. conditions of skew and/or nonsingularity of A_0 are not satisfied. To obtain an almost conservative system, the feedback on state in form of two terms sum is constructed. After substitution of the controlling vector into the original system, the closed system is obtained. We use the approach, which is used to stabilize the linear differential system with coefficient matrix in the form of Frobenius, i.e. first construct the necessary matrix of coefficients, and then calculates the vector of feedback.

It was obtained necessary and sufficient conditions on the matrix A_0 elements to produce the desired non-degenerate skew-symmetric matrix, if the matrix at controlling is known.

An example of the transition to almost conservative system by using feedback is shown and the stability of the closed system with the use of the Lyapunov matrix equation is tested.

The approach with an asymptotic decomposition on the small parameter of the matrix which is the solution of the Lyapunov equation was applied.

To find an approximate solution we use an infinite system of matrix equations which is solved by mathematical computer algebra system Maple V.

Key words: almost conservative system, feedback, controlling vector, stability.

ВСТУП

У [1] започатковано дослідження деякого класу лінійних диференціальних систем парного порядку з малим параметром, які можна звести до майже консервативних систем [2] за допомогою зворотного зв'язку. Такий підхід дозволяє застосувати до майже консервативних систем напрацьовані раніше методи визначення стійкості [2, 3], побудови оптимального регулятора [4, 5] та стабілізації системи [6].

1. ОДИН ПІДХІД ДО ФОРМУВАННЯ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНОЇ СИСТЕМИ

Розглянемо повністю керовану лінійну диференціальну систему парного порядку з малим параметром

$$\dot{x} = A(\varepsilon)x + Bu = \left(\tilde{A}_0 + \varepsilon\tilde{A}_1\right)x + Bu\,, \tag{1}$$

причому виконується, принаймні, одна з умов

$$\tilde{A}_0 \neq -\tilde{A}_0^T, \quad \det\tilde{A}_0 = 0, \tag{2}$$

де $x = \left[x_1, x_2, ..., x_{2n}\right]^T \in \Re_{2n}$ – вектор стану, $u = \left[u_1, u_2, ..., u_m\right]^T \in \Re_m$ – вектор керувань, $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1 \in \Re_{2n\times 2n}$, $B \in \Re_{2n\times m}$, $rangB = m$, ε – малий параметр. З умов (2) випливає, що система (1) не є майже консервативною [2], а для отримання такої побудуємо зворотній зв'язок по стану.

Як і в [1], вектор керування оберемо у вигляді зворотного зв'язку

$$u = -\left(K_0 + \varepsilon K_1\right)x. \tag{3}$$

Після підстановки (3) в (1), отримаємо замкнену систему:

$$\dot{x} = \left(A_0 + \varepsilon A_1\right)x, \tag{4}$$

де, якщо існує відповідна матриця K_0, то

$$A_0 = \tilde{A}_0 - BK_0 = -A_0^T, \quad \det A_0 \neq 0, \quad A_1 = \tilde{A}_1 - BK_1. \tag{5}$$

З умов (5) випливає, що замкнена система (4) є майже консервативною.

Далі використаємо підхід, який застосовується для стабілізації лінійної диференціальної системи з матрицею коефіцієнтів у формі Фробеніуса [7]. У цьому випадку спочатку будується необхідна матриця коефіцієнтів (обмежень на матрицю не має), а потім обчислюється вектор зворотного зв'язку.

Якщо вважати, що невироджена кососиметрична матриця A_0 рівняння (4) задана, то з першого рівняння (5) легко знаходимо матрицю K_0, оскільки матриця B повного рангу ($rangB = m$). Отже, маємо

$$K_0 = \left(B^T B\right)^{-1} B^T\left(\tilde{A}_0 - A_0\right). \tag{6}$$

Тепер підставимо вираз для K_0 з (6) в перше рівняння (5) і отримаємо таку рівність

$$\left(I - B\left(B^T B\right)^{-1} B^T\right)\tilde{A}_0 = \left(I - B\left(B^T B\right)^{-1} B^T\right)A_0. \tag{7}$$

Зазначимо, що не для всіх кососиметричних матриць A_0 (7) є тотожністю.

Таким самим способом можна отримати матрицю K_1, якщо задати матрицю A_1

$$K_1 = \left(B^T B\right)^{-1} B^T \left(\tilde{A}_1 - A_1\right). \tag{8}$$

Далі підставимо (8) у друге рівняння (5) і отримаємо рівність, аналогічну (7), якщо матриця A_1 допустима

$$\left(I - B\left(B^T B\right)^{-1} B^T\right)\tilde{A}_1 = \left(I - B\left(B^T B\right)^{-1} B^T\right)A_1. \tag{9}$$

Як і у випадку з матрицею A_0, не всі матриці A_1 будуть допустимими, тобто тільки деякий клас матриць задовольняє (9).

Матриця $H = B\left(B^T B\right)^{-1} B^T$ є матрицею проектування, вона симетрична та ідемпотентна, тобто її власні значення одиничні та нульові [8]. У [9] показано, що $rangH = rangB$. Отже, отримана матриця проектування має m власних значень рівних одиниці. Ліва і права частини (7) виконують проектування векторів-стовпців матриць $\tilde{A}_0$, A_0 на ортогональне доповнення простору стовпців матриці B. Формула (7) буде тотожністю тоді, коли хоча б для однієї кососиметричної матриці A_0 проекції всіх відповідних векторів-стовпців збігаються.

Матрицею проектування буде також матриця $I - H$ [8]. Тоді з рівностей (7), (9) випливає, що матриці коефіцієнтів розімкненої та замкненої динамічних систем пов'язані між собою за допомогою метода найменших квадратів [8]. Цей факт сформулюємо для матриць $\tilde{A}_0$, A_0 у вигляді наступного твердження, яке виконується також для $\tilde{A}_1$, A_1.

Теорема 1.1 *Нехай* $\tilde{y}_i^0, y_i^0 \in \Re_m$ *розв'язки відповідних лінійних алгебраїчних рівнянь*

$$B\tilde{y}_i = \tilde{a}_i,\ By_i = a_i,\ i = 1,...,2n, \tag{10}$$

$$\tilde{A}_0 = \left[\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_{2n}\right],\ A_0 = \left[a_1, a_2, ..., a_{2n}\right],\ \tilde{a}_i, a_i \in \Re_{2n},$$

знайдені за методом найменших квадратів. Тоді для всіх матриць коефіцієнтів A_0, *які можна отримати за допомогою зворотного зв'язку (3), вектори-нев'язки для розв'язків лінійних алгебраїчних рівнянь (10) збігаються*

$$B\tilde{y}_i^0 - \tilde{a}_i = By_i^0 - a_i,\ i = 1,...,2n. \tag{11}$$

Відзначимо, що формула (11) – це формула (7) у векторному вигляді. Дійсно, обчислюючи розв'язки рівнянь (10) за методом найменших квадратів, отримаємо:

$$\tilde{y}_i^0 = \left(B^T B\right)^{-1} B^T \tilde{a}_i, \quad y_i^0 = \left(B^T B\right)^{-1} B^T a_i, \quad i = 1,...,2n \tag{12}$$

і, підставляючи їх в (11), прийдемо до (7).

Оскільки зворотній зв'язок дає матрицю, для якої завжди виконується (11), то на неї можна накладати додаткові умови, тобто вибирати її з певного класу матриць (наприклад, кососиметричних). Так, відомо [11], що при повній керованості лінійної диференціальної системи завжди можна побудувати оптимальний регулятор зворотного зв'язку, який стабілізує систему, тобто матриця коефіцієнтів замкненої системи вибирається з класу асимптотично стійких матриць.

Для обчислення параметрів кососиметричної матриці A_0 необхідно сформувати систему рівнянь з відповідних елементів матриць $\left(I - H\right)\tilde{A}_0 = \left\{\tilde{m}_{ij}\right\}_1^{2n}$, $\left(I - H\right)A_0 = \left\{m_{ij}\right\}_1^{2n}$ рівняння (7)

$$\tilde{m}_{jk} = m_{jk}, \ \ j,k = 1,...,2n. \tag{13}$$

У системі (13) щонайменше $2nm$ лінійно залежних рівнянь. Ранг матриці $I-H$ дорівнює $2n-m$ і матриця $\tilde{A}_0$ необов'язково невироджена, тому в кососиметричній невиродженій матриці A_0 загального вигляду з $n(2n-1)$ вільних параметрів не всі можуть бути зв'язаними рівністю (7) (рівняннями (13)). Вільні параметри матриці A_0 можуть набувати довільних значень у рамках її невиродженості. Якщо таким чином досягти кососиметричності та невиродженості шуканої матриці не можливо, то це можна зробити, якщо є можливість, або переставленням рядків матриці B, або збільшенням числа керувань, що зменшує число зв'язаних параметрів.

Умова однакових проекцій відповідних стовпців матриць $\tilde{A}_0$, A_0 при загальному вигляді матриці B, як видно з (13), не дає ефективного способу отримання кососиметричної матриці. Тому розглянемо випадок, коли в матриці повного рангу B стовпці є одиничними векторами, тобто $B = \begin{bmatrix} e_{i_1} & e_{i_2} & ... & e_{i_m} \end{bmatrix}$, де $e_j \in \Re_{2n}$ – вектор з одиницею на j-му місці і нулями на інших місцях. Із структури матриці B випливає рівність $B^T B = I_m$. Запишемо матрицю B також у такому вигляді $B = \begin{bmatrix} \tilde{e}_1^T \\ ... \\ \tilde{e}_{2n}^T \end{bmatrix}$, $B^T = \begin{bmatrix} \tilde{e}_1 & ... & \tilde{e}_{2n} \end{bmatrix}$, $\tilde{e}_i \in \Re_m$, причому тільки вектори $\tilde{e}_{i_l} = e_l$, $l = 1,...,m$ є одиничні розмірності m, а інші – нульові. Тоді елементи матриці $H = BB^T = \{h_{ij}\}_1^{2n}$ дорівнюють $h_{ij} = \tilde{e}_i^T \tilde{e}_j = \begin{cases} 1 \ \text{ при } \ i = j \in \{i_1,...,i_m\}, \\ 0 \ \text{ в інших випадках.} \end{cases}$

Визначимо для яких матриць $\tilde{A}_0$ рівняння (7) буде мати розв'язком, необов'язково невироджену кососиметричну матрицю A_0. Оскільки матриця H має ненульовими тільки елементи (i_1,i_1), $(i_2,i_2),\ldots,(i_m,i_m)$, то в матриці $I-H$ будуть ненульовими тільки елементи (j,j), $j \in \{1,...,2n\} \setminus \{i_1,i_2,...,i_m\}$. Тоді матриці $(I-H)\tilde{A}_0$, $(I-H)A_0$ матимуть нульовими рядки $i_1,i_2,...,i_m$, причому це будуть відповідно матриці $\tilde{A}_0$, A_0 з обнуленими цими рядками. Виходячи з загальної структури невиродженої кососиметричної матриці [10], для виконання (7), очевидно, необхідно і достатньо, щоб для всіх елементів $\tilde{a}_{lj}$, $l, j \in \{1,...,2n\} \setminus \{i_1,i_2,...,i_m\}$ матриці $\tilde{A}_0 = \{\tilde{a}_{ij}\}_1^{2n}$ виконувалась умова: $\tilde{a}_{lj} = -\tilde{a}_{jl}$. Тоді зв'язані елементи матриці $A_0 = \{a_{ij}\}_1^{2n}$ такі: $a_{lj} = \tilde{a}_{lj}$, $l \in \{1,...,2n\} \setminus \{i_1,i_2,...,i_m\}$, $j = 1,...,2n$. Інші елементи залишаються вільними параметрами, але такими, що не порушують кососиметричність і невиродженість матриці A_0.

Отже, виконується твердження.

Теорема 1.2 *Нехай матриця при керуванні системи (1) має вигляд* $B = \begin{bmatrix} e_{i_1} & e_{i_2} & ... & e_{i_m} \end{bmatrix}$, $rang B = m$.

За допомогою зворотного зв'язку (3) можна отримати деяку кососиметричну матрицю $A_0 = \{a_{ij}\}_1^{2n}$ *в замкненій системі (4) тоді і тільки тоді, коли елементи* $\tilde{a}_{lj}$, $l, j \in \{1,...,2n\} \setminus \{i_1,i_2,...,i_m\}$ *матриці коефіцієнтів* $\tilde{A}_0 = \{\tilde{a}_{ij}\}_1^{2n}$ *вихідної системи задовольняють* *умови* $\tilde{a}_{lj} = -\tilde{a}_{jl}$ *. При цьому елементи шуканої матриці обчислюються таким чином:* $a_{lj} = \tilde{a}_{lj}$ *,* $l \in \{1,...,2n\} \setminus \{i_1, i_2, ..., i_m\}$ *,* $j = 1,...,2n$*, а інші елементи, не порушуючи кососиметричності та невиродженості матриці* A_0 *, можуть бути довільними.*

Розглядаючи рівняння (9), структуру матриці A_1 (також K_1) вибираємо, виходячи з практичної доцільності, наприклад, для стабілізації замкненої системи. З іншого боку – матрицю K_1 можна отримати не з рівняння (8), а при побудові оптимального регулятора зворотного зв'язку для майже консервативної системи [4, 5] чи з системи нерівностей для її стабілізації [6].

2. ЗАСТОСУВАННЯ РОЗГЛЯНУТОГО ВИЩЕ ПІДХОДУ НА ПРАКТИЦІ

Наведемо приклад переходу до майже консервативної системи за допомогою зворотного зв'язку та перевіримо стійкість замкненої системи.

Приклад 2.1 Розглянемо систему (1) з матрицею коефіцієнтів

$$A(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon s_1 & \varepsilon s_2 & \omega_3 & \omega_4 + \varepsilon a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ \varepsilon s_3 & -\omega_4 - \varepsilon a_2 & 0 & -\varepsilon a_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\omega_1 \neq \omega_2, \; a_1, a_2, a_3 > 0.$$

Тут ε – малий параметр. Необхідно побудувати майже консервативну систему (4) та дослідити її на стійкість за допомогою рівняння Ляпунова.

Зобразимо матрицю $A(\varepsilon)$ у вигляді суми двох матриць $A(\varepsilon) = \tilde{A}_0 + \varepsilon \tilde{A}_1$, де

$$\tilde{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 & \omega_4 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ 0 & -\omega_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & s_2 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_3 & -a_2 & 0 & -a_3 \end{bmatrix}.$$

Неважко переконатися за допомогою перевірки, що задана система повністю керована. Матриці B і $\tilde{A}_0$ задовольняють умови теореми 1.2, тому існує кососиметрична матриця A_0, яка перетворює рівняння (7) в тотожність.

Легко побачити, що кососиметрична матриця канонічної форми [10]

$$A_0 = diag\left\{ \begin{bmatrix} 0 & \omega_1 \\ -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \omega_2 \\ -\omega_2 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \det A_0 \neq 0,$$

задовольняє рівняння $(I - H)\tilde{A}_0 = (I - H)A_0$, $H = diag\{0,1,0,1\}$. При цьому, матриця K_0 буде такою:

$$K_0 = \left(B^T B\right)^{-1} B^T \left(\tilde{A}_0 - A_0\right) = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \omega_3 & \omega_4 \\ 0 & -\omega_4 & \omega_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для матриці $\tilde{A}_1$ справедливо $(I - H)\tilde{A}_1 = 0$, тому як матрицю збурення можна вибрати

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & -a_3 \end{bmatrix},$$

при цьому $\left(I-H\right)\tilde{A}_1 \equiv \left(I-H\right)A_1$ і

$$K_1 = \left(B^T B\right)^{-1} B^T \left(\tilde{A}_1 - A_1\right) = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & 0 & 0 \\ s_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отже, ми отримали наступну майже консервативну систему

$$\dot{x} = \left(\begin{bmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & 0 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ 0 & 0 & -\omega_2 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & -a_3 \end{bmatrix} \right) x. \tag{14}$$

Перевіримо побудовану систему на асимптотичну стійкість за допомогою матричного рівняння Ляпунова [11]

$$\left(A_0 + \varepsilon A_1\right)^T P + P\left(A_0 + \varepsilon A_1\right) = -2Q\,, \tag{15}$$

де $P, Q \in \Re_{2n\times 2n}$ – деякі симетричні матриці, причому для асимптотично стійкої матриці $A_0 + \varepsilon A_1$ вони додатно визначені. Для пошуку розв'язку матричного рівняння (15) будемо використовувати алгоритм описаний в [3]. Матриці P, Q будемо шукати у вигляді розкладень за малим параметром ε

$$P = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + ..., \quad Q = Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + ... \tag{16}$$

Покажемо, що для сформованої майже консервативної системи (14) існує розв'язок рівняння (15) у рамках розкладень (16) з додатно визначеною матрицею P_0. Запишемо матричне рівняння Ляпунова у вигляді нескінченної системи рівнянь:

$$A_0 P_0 - P_0 A_0 = 0, \tag{17}$$

$$\begin{gathered} A_0 P_1 - P_1 A_0 = P_0 A_1 + A_1^T P_0 + 2Q_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_0 P_i - P_i A_0 = P_{i-1} A_1 + A_1^T P_{i-1} + 2Q_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{gathered} \tag{18}$$

Тут $Q_0 = 0$.

Далі за алгоритмом [3] послідовно розв'язуємо рівняння (17), (18). Власні значення A_0 різні, тому $P_0 = diag\left\{p_{10}, p_{10}, p_{20}, p_{20}\right\}$, $p_{10}, p_{20} > 0$. Виберемо $Q_1 = diag\left\{q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{14}\right\}$, $q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{14} \geq 0$. Перейдемо до розгляду правої частини першого рівняння (18):

$$D_1 = P_0 A_1 + A_1^T P_0 + 2Q_1 = V_1 + 2Q_1,$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{10}a_1 - p_{20}a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{10}a_1 - p_{20}a_2 & 0 & -2a_3 p_{20} \end{bmatrix}.$$

Запишемо умови на діагональні елементи матриці $D_1 = \{d_{ij}\}_1^4$:

$$d_{11} + d_{22} = 2q_{11} + 2q_{12} = 0,$$

$$d_{33} + d_{44} = 2q_{13} + 2q_{14} - 2a_3 p_{20} = 0. \tag{19}$$

Звідси $q_{11} = q_{12} = 0$. Якщо покладемо $p_{10} = a_2$, $p_{20} = a_1$, $Q_1 = diag\{0,0,0,a_1a_3\}$, то $D_1 \equiv 0$ (випливає зі структури матриці V_1). Матриця Q_1 – невід'ємно визначена, а P_0 – додатно визначена, тому матриці P_k, Q_{k+1}, $k = 1,2,...$ можна покласти рівними нулю (див. теорему з [3]).

Отже, розв'язком задачі буде

$$P = diag\{a_2, a_2, a_1, a_1\} > 0, \quad Q = \varepsilon diag\{0,0,0,a_1a_3\} \geq 0. \tag{20}$$

З розв'язку (20) випливає, що система (14) з сформованими матрицями A_0, A_1 стійка [11]. Для того, щоб показати, що ця система асимптотично стійка, необхідно знайти матрицю – розв'язок $P > 0$ при $Q > 0$.

За допомогою комп'ютерної системи аналітичних обчислень *Maple* будемо шукати розв'язок цієї задачі, коли матриця Q (сума другого ряду (16)) додатно визначена. З рівняння (19) знаходимо: $q_{11} = q_{12} = 0$, $p_{20} = (q_{13} + q_{14})/a_3$, $q_{13}, q_{14} > 0$. Отже, маємо:

$$P_0 = diag\left\{p_{10}, p_{10}, \frac{q_{13}+q_{14}}{a_3}, \frac{q_{13}+q_{14}}{a_3}\right\}, \quad Q = diag\{0,0,q_{13},q_{14}\},$$

де p_{10} залишається вільним параметром.

Далі, підставляємо P_0 в рівняння

$$A_0P_1 - P_1A_0 = P_0A_1 + A_1^T P_0 + 2Q_1,$$

і знаходимо елементи матриці $P_1 = \{p_{ij}\}_1^4$

$$p_{14} = \frac{\omega_1\left(p_{10}a_1a_3 - a_2q_{13} - a_2q_{14}\right)}{a_3\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right)}, \quad p_{22} = p_{11}, \quad p_{44} = p_{33},$$

$$p_{23} = \frac{\omega_2\left(p_{10}a_1a_3 - a_2q_{13} - a_2q_{14}\right)}{a_3\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)}, \quad p_{34} = \frac{q_{13}}{\omega_2}, \quad p_{12} = p_{13} = p_{24} = 0,$$

а p_{11}, p_{33} – вільні параметри.

Виберемо матрицю Q_2 діагональної структури $Q_2 = diag\{q_{21}, q_{22}, q_{23}, q_{24}\}$, $q_{21}, q_{22}, q_{23}, q_{24} \geq 0$ і обчислимо $D_2 = \{d_{ij}^2\}_1^4 = P_1A_1 + A_1^T P_1 + 2Q_2$ (через громіздкість у явному вигляді її не наводимо). Тепер запишемо умови на діагональні елементи знайденої матриці

$$d_{11}^2 + d_{22}^2 = 2q_{21} + 2q_{22} = 0,$$

$$d_{33}^2 + d_{44}^2 = 2q_{23} + 2q_{24} - 2p_{33}a_3 = 0.$$

З першого рівняння знаходимо $q_{21} = q_{22} = 0$, а в другому рівнянні покладаємо $p_{33} = 0$ і обчислюємо $q_{23} = q_{24} = 0$. Параметри p_{11}, p_{10} залишаємо вільними. Далі підставляємо матрицю P_1 в рівняння $A_0P_2 - P_2A_0 = P_1A_1 + A_1^TP_1 + 2Q_2$ і знаходимо елементи матриці $P_2 = \{v_{ij}\}$:

$$v_{13} = \frac{\omega_1\left(\omega_2^2 p_{10}a_1a_3 - 2\omega_2^2 a_2q_{13} - \omega_2^2 a_2 q_{14} + \omega_1^2 a_2 q_{13}\right)}{\omega_2\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)},$$

$$v_{24} = \frac{\omega_1^2 p_{10}a_1a_3 - \omega_1^2 a_2 q_{14} - \omega_2^2 a_2 q_{13}}{\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)^2}, \quad v_{14} = -\frac{\omega_1 p_{11}a_1}{\omega_1^2 - \omega_2^2},$$

$$v_{22} = v_{11} + \frac{\left(p_{10}a_1a_3 - a_2q_{13} - a_2q_{14}\right)a_2}{a_3\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)}, \quad v_{23} = \frac{\omega_2 p_{11}a_1}{\omega_1^2 - \omega_2^2},$$

$$v_{44} = v_{33} + \frac{\omega_2^2 a_1^2 p_{10}a_3 - \omega_2^2 a_1 a_2\left(q_{13} + q_{14}\right) - q_{13}a_3^2\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)}{a_3\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)\omega_2^2},$$

$$v_{12} = 0, \quad v_{34} = 0,$$

де v_{11}, v_{33} – вільні параметри.

Тепер вибираємо діагональну матрицю $Q_3 = diag\{q_{31}, q_{32}, q_{33}, q_{34}\}$, $q_{31}, q_{32}, q_{33}, q_{34} \ge 0$ і обчислюємо $D_3 = \{d_{ij}^3\}_1^4 = P_2A_1 + A_1^TP_2 + 2Q_3$. Умови на діагональні елементи матриці D_3 набудуть вигляду:

$$\frac{d_{11}^3 + d_{22}^3}{2} = q_{31} - \frac{\left(\omega_1^2 p_{10}a_1a_3 - \omega_1^2 a_2 q_{14} - \omega_2^2 a_2 q_{13}\right)a_2}{\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)^2} + q_{32} = 0,$$

$$\frac{d_{33}^3 + d_{44}^3}{2} = q_{33} + q_{34} + \frac{\left(\omega_1^2 p_{10}a_1a_3 - \omega_1^2 a_2 q_{14} - \omega_2^2 a_2 q_{13}\right)a_1}{\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)^2} -$$

$$-\frac{\omega_2^2 a_1^2 p_{10}a_3 - \omega_2^2 a_1 a_2\left(q_{13} + q_{14}\right) - q_{13}a_3^2\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)}{2\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)\omega_2^2} - v_{33}a_3 = 0.$$

З першого рівняння знаходимо значення вільного параметра p_{10}

$$p_{10} = \frac{\left(q_{31} + q_{32}\right)\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)^2 + a_2^2\left(\omega_1^2 q_{14} + \omega_2^2 q_{13}\right)}{\omega_1^2 a_1 a_2 a_3} > 0,$$

тобто P_0 є додатно визначена матриця. Далі покладемо $q_{33} = q_{34} = 0$ і обчислимо з другого рівняння значення вільного параметра v_{33} матриці P_2

$$v_{33} = \frac{a_2q_{13}\left(a_3^2\omega_1^2 + a_1a_2\omega_2^2\right) + a_1\omega_2^4\left(q_{31} + q_{32}\right)}{a_2a_3\omega_1^2\omega_2^2},$$

а v_{11} залишається вільним параметром.

Отже, $Q_3 = diag\{q_{31}, q_{32}, 0, 0\}$ і матриця $\varepsilon Q_1 + \varepsilon^3 Q_3$ є додатно визначеною.

З рівняння $A_0 P_3 - P_3 A_0 = P_2 A_1 + A_1^T P_2 + 2Q_3$ знаходимо невідому матрицю $P_3 = \{h_{ij}\}_1^4$:

$$h_{13} = \frac{\omega_1 \omega_2 p_{11} a_1 a_3}{\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)^2}, \quad h_{24} = \frac{\omega_1^2 p_{11} a_1 a_3}{\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)^2}, \quad h_{12} = \frac{q_{31}}{\omega_1},$$

$$h_{22} = h_{11} + \frac{p_{11} a_1 a_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}, \quad h_{44} = h_{33} + \frac{p_{11} a_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}, \quad h_{34} = 0,$$

$$h_{14} = \frac{\left(a_3^2 \omega_1^2 + a_1 a_2 \omega_2^2\right)\left(q_{31} + q_{32}\right) + a_1 a_2 \left(a_2^2 q_{13} - v_{11} \omega_1^2 a_3\right)}{a_2 a_3 \left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right) \omega_1},$$

$$h_{23} = -\frac{\omega_2 \left(a_3^2 \omega_1^2 + a_1 a_2 \omega_2^2\right)\left(q_{31} + q_{32}\right) + \omega_2 a_1 a_2 \left(a_2^2 q_{13} - v_{11} \omega_1^2 a_3\right)}{a_2 a_3 \left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right) \omega_1}.$$

Оскільки P_0 і $\varepsilon Q_1 + \varepsilon^3 Q_3$ – додатно визначені матриці, то згідно з теоремою [3] завершуємо процес розв'язання рівнянь системи (18) і остаточно обчислюємо матрицю Q_4, зрівнявши з нулем вільні параметри h_{11}, h_{33} матриці P_3. Також покладемо рівними нулю вільні параметри p_{11}, v_{11}, що спростить обчислення матриць P і Q, але не вплине на їх додатну визначеність.

Отже, маємо:

$$Q_4 = \{s_{ij}\}_1^4 = -\frac{1}{2} P_3 A_1 - \frac{1}{2} A_1^T P_3,$$

де

$$s_{12} = \frac{\left(a_3^2 \omega_1^2 + a_1 a_2 \omega_2^2\right)\left(q_{31} + q_{32}\right) + a_1 a_2^3 q_{13}}{2 a_3 \left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right) \omega_1},$$

$$s_{14} = -\frac{a_1 q_{31}}{2\omega_1} + \frac{\left(a_3^2 \omega_1^2 + a_1 a_2 \omega_2^2\right)\left(q_{31} + q_{32}\right) + a_1 a_2^3 q_{13}}{2 a_3 \left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right) \omega_1},$$

$$s_{34} = \frac{\left(a_3^2 \omega_1^2 + a_1 a_2 \omega_2^2\right)\left(q_{31} + q_{32}\right) a_1 \omega_2 + a_1^2 a_2^3 \omega_2 q_{13}}{2 a_2 a_3 \left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right) \omega_1^2},$$

$$s_{11} = s_{13} = s_{22} = s_{23} = s_{24} = s_{33} = s_{44} = 0.$$

Таким чином, ми отримали за скінченне число кроків аналітичний розв'язок рівняння Ляпунова для сформованої асимптотично стійкої матриці $A_0 + \varepsilon A_1$:

$$P = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \varepsilon^3 P_3, \quad Q = \varepsilon Q_1 + \varepsilon^3 Q_3 + \varepsilon^4 Q_4.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Святовець І. Ф. Формування майже консервативної системи за допомогою вектора керування / І. Ф. Святовець, О. П. Коломійчук, В. В. Новицький // Аналітична механіка та її застосування : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2012. – Т. 9, № 1. – С. 301-307.

2. Новицький В. В. Рівняння Ляпунова для майже консервативних систем / В. В. Новицький. – Препринт. – К. : Ін-т математики НАН України, 2004. – 34 с.
3. Зінчук М. О. Дослідження рівняння Ляпунова для неперервних майже консервативних систем / М. О. Зінчук, В. В. Новицький, Т. Г. Положий // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – Т. 2, № 1. – С. 84-96.
4. Новицкий В. В. Оптимальное управление почти консервативными системами / В. В. Новицкий, Хуан Чень // Сучасні проблеми аналітичної механіки : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2004. – Т. 1, № 2. – С. 152-157.
5. Зінчук М. О. Оптимальне керування неперервними майже консервативними системами / М. О. Зінчук, В. В. Новицький // Проблеми аналітичної механіки : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – Т. 3, № 1. – С. 75-89.
6. Зінчук М. О. Стійкість та стабілізація лінійних параметричних динамічних систем / М. О. Зінчук, В. В. Новицький // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2007. – Т. 4, № 2. – С. 58-71.
7. Стрейц В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления / В. Стрейц. – М. : Наука, 1985. – 296 с.
8. Стренг Г. Линейная алгебра и её применения / Г. Стренг. – М. : Мир, 1980. – 456 с.
9. Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М. : Мир, 1989. – 656 с.
10. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1988. – 552 с.
11. Barnett S. Introduction to Mathematical Control Theory, Second Edition / S. Barnett, R. G. Cameron. – Oxford : Clarendon press, 1985. – 404 p.

REFERENCES

1. Svyatovets, I.F., Kolomiychuk, O.P. and Novitskiy, V.V. (2012), “Formation almost conservative system using vector control”, *Analitychna mekhanika ta yiyi zastosuvannia*, *Zbirnyk prats In-tu matematyki NAN Ukrainy*, vol. 9, no. 1, pp. 301-307.
2. Novitskiy, V.V. (2004), “Lyapunov equation for almost conservative systems”, *Preprint*, *In-t matematyki NAN Ukrainy*, 34 p.
3. Zinchuk, M.O., Novitskiy, V.V. and Polozhyy, T.G. (2005), “Research Lyapunov equations for continuous almost conservative systems”, *Problemy dynamiky ta stiykosti bagatovymirnykh system*, *Zbirnyk prats In-tu matematyki NAN Ukrainy*, vol. 2, no. 1, pp. 84-96.
4. Novitskiy, V.V. and Khuan Chen (2004), “Optimal control almost conservative systems”, *Suchasni problemy analitychnoyi mekhaniky*, *Zbirnyk prats In-tu matematyki NAN Ukrainy*, vol. 1, no. 2, pp. 152-157.
5. Zinchuk, M.O. and Novitskiy, V.V. (2006), “Optimal control of continuous almost conservative systems”, *Problemy analitychnoyi mekhaniky*, *Zbirnyk prats In-tu matematyki NAN Ukrainy*, vol. 3, no. 1, pp. 75-89.
6. Zinchuk, M.O. and Novitskiy, V.V. (2007), “Stability and stabilization of parametric linear dynamical systems”, *Problemy dynamiky ta stiykosti bagatovymirnykh system*, *Zbirnyk prats In-tu matematyki NAN Ukrainy*, vol. 4, no. 2, pp. 58-71.
7. Streyts, V. (1985), *Metod prostranstva sostoyaniy v teorii diskretnykh lineynykh system upravleniya* [Method of state space in the theory of discrete linear control systems], Nauka, Moskow, Russia.
8. Streng, G. (1980), *Lineynaya algebra i eey primeneniya* [Linear algebra and its application], Mir, Moskow, Russia.
9. Khorn, R. and Dzhonson, Ch. (1989), *Matrichnyy analiz* [Matrix Analysis], Mir, Moskow, Russia.
10. Gantmakher, F.R. (1967), *Teoriya matrits* [Matrix theory], Nauka, Moskow, Russia.
11. Barnett, S. and Cameron, R.G. (1985), [Introduction to Mathematical Control Theory, Second Edition], Clarendon press, Oxford.