УДК 531:383-62:50

СТАБІЛІЗАЦІЯ ТА РОБАСТНА СТІЙКІСТЬ НЕПЕРЕРВНИХ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНИХ СИСТЕМ

Новицький В. В., д. ф.-м. н., професор, Зінчук М. О., к. ф.-м. н., Тетерятник О. В.

Інститут математики НАН України,
вул. Терещенківська, 3, Київ-4, 01601, Україна

Novyc@imath.kiev.ua, E.Teteryatnik@gmail.com

У роботі досліджуються умови стабілізації майже консервативних систем, у яких матриця коефіцієнтів консервативної частини не має кратних власних значень. Крім того, знайдено інтервал, у якому виконуються умови стабілізації для параметра ε, який визначає майже консервативність системи. Наводяться приклади, які ілюструють теоретичний матеріал.

Ключові слова: майже консервативна система, керування, стабілізація, робастна стійкість.

СТАБИЛИЗАЦИЯ И РОБАСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НЕПРЕРЫВНЫХ ПОЧТИ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

Новицкий В. В., д. ф.-м. н., профессор, Зинчук Н. А., к. ф.-м. н., Тетерятник Е. В.

Институт математики НАН Украины,
ул. Терещенковская, 3, Киев-4, 01601, Украина

Novyc@imath.kiev.ua, E.Teteryatnik@gmail.com

В данной работе исследуются условия стабилизации почти консервативных систем, у которых матрица коэффициентов консервативной части не имеет кратных собственных значений. Кроме того, найден интервал, в котором выполняются условия стабилизации для параметра ε, определяющего почти консервативность системы. Приводятся примеры, которые иллюстрируют теоретический материал.

Ключевые слова: почти консервативная система, управление, стабилизация, робастная устойчивость.

STABILIZATION AND ROBUST STABILITY OF CONTINUOUS ALMOST CONSERVATIVE SYSTEMS

Novitsky V. V., D.Sc. in Physics and Maths, professor, Zinchuk M. O., Ph.D in Physics and Maths, Teteryatnik O. V.

In-t of Mathematics of NAS of Ukraine,
Tereschenkivska str., Kiev-4, 01601, Ukraine

Novyc@imath.kiev.ua, E.Teteryatnik@gmail.com

Since almost conservative systems research became actual in recent times, it significantly increased the information about the features of such systems and created new means of research. It became known that under certain restrictions on the matrix coefficients of almost conservative system there exists $\varepsilon_0 > 0$ at which the parameter ε from the interval $(0, \varepsilon_0)$ does not affect its stability.

We explored the stabilize conditions of continuous controlled almost continuous conservative system in which the control are occurred by means of linear feedback. A closed system is stabilized, if the coefficient matrix is asymptotically stable, i.e. Lyapunov matrix equation is satisfied. Positively defined matrices are chosen as a power series. Using a special approach, we found the system parameters under which it will be asymptotically stable for sufficiently small values of the parameter, formulated and proved the theorem. An example illustrates the results theorem.

Then it is found interval for parameterε, in which the conditions of stabilize of the given system are performed. For this, we find a solution Lyapunov matrix equation in a limited decomposition and interval for the parameter in which the matrices are positive definite and formulate another theorem with proof. Example complements the theoretical material.

Key words: almost conservative system, control, stabilization, robust stability.

1. ВСТУП

Оскільки дослідження майже консервативних систем стало актуальним останнім часом, то це значно розширило відомості про особливості таких систем, а також створило нові засоби досліджень. В [1] було показано, що при деяких обмеженнях на матричні коефіцієнти майже консервативної системи існує таке $\varepsilon_0 > 0$, при якому параметр ε з інтервалу $(0, \varepsilon_0)$ не впливає на її стійкість. Використаємо цей факт при дослідженні умов стабілізованості майже консервативних систем.

Нижче будуть знайдені умови стабілізації майже консервативної системи при достатній малості параметра ε і матриці коефіцієнтів консервативної частини загального вигляду, яка не має кратних власних значень. Далі буде знайдено інтервал для параметра ε, в якому виконуються умови стабілізації даної системи.

2. СТАБІЛІЗАЦІЯ НЕПЕРЕРВНИХ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНИХ СИСТЕМ

Розглянемо неперервну керовану майже консервативну систему вигляду

$$\dot{x} = (A_0 + \varepsilon A_1)x + \varepsilon B u,\ x(t_0) = x_0, \tag{2.1}$$

де $x \in \mathfrak{R}_{2n}$ – вектор стану, $A_0 = -A_0^T \in \mathfrak{R}_{2n\times 2n}$ – кососиметрична невироджена матриця, $A_1 \in \mathfrak{R}_{2n\times 2n}$ – довільна стала матриця, $u \in \mathfrak{R}_m$ – вектор керування, $B \in \mathfrak{R}_{2n\times m}$ – матриця при керуванні, ε – малий параметр.

Будемо вважати, що керування системою (2.1) відбувається за допомогою лінійного зворотного зв'язку за станом

$$u = Kx, \tag{2.2}$$

де $K \in \mathfrak{R}_{m\times 2n}$ – деяка невідома матриця зі сталими коефіцієнтами.

Замкнена система (2.1), (2.2) буде стабілізованою, якщо за допомогою вибору матриці K матриця коефіцієнтів $A_0 + \varepsilon(A_1 + BK)$ стане асимптотично стійкою, тобто буде справедливим матричне рівняння Ляпунова [2]

$$P[A_0 + \varepsilon(A_1 + BK)] + [A_0 + \varepsilon(A_1 + BK)]^T P = -2Q, \tag{2.3}$$

де P, Q – додатно визначені матриці.

В [3] показано, що матриці P і Q можна вибрати у вигляді степеневих рядів за малим параметром ε

$$P = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \cdots,\ Q = Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + \cdots. \tag{2.4}$$

Будемо вважати, що ці матричні ряди збіжні.

Позначимо $G = \{g_{ij}\} = [G_1, G_2]$, $H = \{h_{ij}\}$; $G_1, G_2, H \in \mathfrak{R}_{n\times n}$, де

$$g_{ij} = \textstyle\sum_{k=1}^{2n} (a_{jk}^{i-1})^2,\ |A_0^{i-1}| \neq 0,\ A_0^{i-1} = \{a_{jk}^{i-1}\},\ i = \overline{1,n},\ j,k = \overline{1,2n},$$

$$h_{ij} = tr\left[A_0^{2(j-1)}\,(A_1 + BK)A_0^{i-1}(A_0^T)^{i-1}\right],\ i,j = \overline{1,n}. \tag{2.5}$$

Справедливою є наступна теорема.

Теорема 2.1. Нехай загального вигляду кососиметрична матриця A_0 системи (2.1) не має кратних власних значень і $rank\ G_1 = n$. Тоді, якщо матриця K і коефіцієнти розкладу

$$P_0 = \alpha_0 I_{2n} + \alpha_2 A_0^2 + \cdots + \alpha_{2(n-1)} A_0^{2(n-1)}, \tag{2.6}$$

задовольняють систему нерівностей:

$$0 > G_1^{-1} H\alpha \tag{2.7}$$

і одну з альтернатив

$$\alpha_0 > \max_i\{\textstyle\sum_{j=1(j\neq i)}^{2n} |v_{ij}| - v_{ii}\},\ i = \overline{1,2n} \tag{2.8}$$

або

$$\alpha_0 > -\lambda_{min}(V), \tag{2.9}$$

де $\lambda_{min}(V)$ – мінімальне власне значення матриці V,

$$\alpha = \left[\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_{2(n-1)}\right]^T,$$

$$V = \{v_{ij}\} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n = 1, \\ \alpha_2 A_0^2 + \dots + \alpha_{2(n-1)} A_0^{2(n-1)}, & \text{якщо } n \geq 2. \end{cases} \tag{2.10}$$

то замкнена система (2.1), (2.2) – стабілізована. Тут через I_{2n} позначена одинична матриця розміру $2n$.

Доведення. Матричне рівняння (2.3) еквівалентне нескінченній системі рівнянь [1]:

$$\begin{gathered} A_0 P_0 - P_0 A_0 = 0, \\ A_0 P_1 - P_1 A_0 = P_0(A_1 + BK) + (A_1 + BK)^T P_0 + 2Q_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_0 P_i - P_i A_0 = P_{i-1}(A_1 + BK) + (A_1 + BK)^T P_{i-1} + 2Q_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{gathered} \tag{2.11}$$

Перше рівняння системи (2.11) показує перестановність матриць A_0 і P_0. За умовою теореми матриця A_0 не має кратних власних значень, тому матрицю P_0 можна зобразити у вигляді (2.6) [3, 4]. Розклад (2.6) задає симетричну матрицю, тому що кожний елемент цього розкладу симетричний. Дійсно, маємо $(A_0^{2i})^T = (A_0^T)^{2i} = (-A_0)^{2i} = A_0^{2i}$, $i = \overline{0, n-1}$.

Для отримання умови (2.7), використаємо підхід, наведений в [3]. Розглянемо друге рівняння системи (2.11), вибравши додатно визначену матрицю Q_1 діагональної структури

$$Q_1 = diag\{q_1, \dots, q_{2n}\}. \tag{2.12}$$

Візьмемо сліди від обох його частин, отримаємо

$$0 = tr[P_0(A_1 + BK)] + trQ_1.$$

Далі будемо домножувати вибране рівняння послідовно $n-1$ разів зліва на A_0^T і справа на A_0 та брати після кожного такого домноження відповідні сліди. Сліди лівої частини отриманих рівнянь нульові, тому приходимо до наступної системи:

$$tr\left[P_0(A_1 + BK)A_0^{i-1}(A_0^T)^{i-1}\right] + tr\left[(A_0^T)^{i-1} Q_1 A_0^{i-1}\right] = 0, \; i = \overline{1, n}. \tag{2.13}$$

Підставимо в (2.13) замість P_0 його розклад (2.6), отримаємо

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{2(j-1)}\, tr\left[A_0^{2(j-1)}(A_1 + BK)A_0^{i-1}(A_0^T)^{i-1}\right] + tr\left[\left(A_0^{i-1}\right)^T Q_1 A_0^{i-1}\right] = 0, \; i = \overline{1, n}$$

або в матричній формі

$$H\alpha = -q, \tag{2.14}$$

де

$$q = \left[trQ_1, tr[A_0^T Q_1 A_0], \dots, tr[(A_0^{n-1})^T Q_1 A_0^{n-1}]\right]^T, \tag{2.15}$$

а H і α описані вище (формули (2.5), (2.10)). Вектор q, елементи якого знаходяться з виразів

$$tr\left[\left(A_0^{i-1}\right)^T Q_1 A_0^{i-1}\right] = \sum_{k=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} q_j (a_{jk}^{i-1})^2, \left|A_0^{i-1}\right| \neq 0, A_0^{i-1} = \left\{a_{jk}^{i-1}\right\}, i = \overline{1, n}, \tag{2.16}$$

– додатній, тому ліва частина (2.14) завжди має бути від'ємною.

Нерівність (2.7) дозволяє знайти множину додатно визначених матриць Q_1 при довільному векторі $G_1^{-1} H\alpha$. Дійсно, з (2.16) і (2.5) випливає, що

$$q = G\gamma, \gamma^T = [\gamma_1^T, \gamma_2^T] = \left[[q_1, \dots, q_n], [q_{n+1}, \dots, q_{2n}]\right].$$

Домножимо зліва обидві частини рівняння (2.14) на обернену матрицю G_1^{-1}отримаємо

$$G_1^{-1}H\alpha = -\gamma_1 - G_1^{-1}G_2\gamma_2. \tag{2.17}$$

Отже, завжди існує діагональна додатно визначена матриця Q_1 (2.12) така, що $G_1^{-1}H\alpha = -G_1^{-1}q < 0$, тому що при довільному векторі $\gamma_2 > 0$ вибором $\gamma_1 > 0$ завжди можна отримати $-\gamma_1 - G_1^{-1}G_2\gamma_2 < 0$. З іншої сторони, якщо знайдено вектор $G_1^{-1}H\alpha < 0$, то послідовно спочатку з нерівності $G_1^{-1}H\alpha < -G_1^{-1}G_2\gamma_2$ визначаємо додатний вектор γ_2, а потім додатний вектор $\gamma_1 = -G_1^{-1}H\alpha - G_1^{-1}G_2\gamma_2$.

Обмеження $rank\, G_1 = n$ несуттєве, якщо $rank\, G = n$. За допомогою деякої матриці перестановки $L \in \Re_{2n\times 2n}$ завжди можна переставити стовпці матриці G так, щоб виконувалось $rank\widetilde{G_1} = n$, де $\left[\widetilde{G_1}, \widetilde{G_2}\right] = [G_1, G_2]L$. При цьому елементи вектора γ також будуть переставлені, і він дорівнюватиме $L^T\gamma$.

Матриця $P_0 = \left\{p_{ij}\right\}_1^{2n}$ має бути додатно визначеною, тому що необхідно побудувати асимптотично стійку матрицю коефіцієнтів замкненої системи (2.1), (2.2). Умови додатної визначеності випливають з теореми Гершгоріна [5]

$$p_{ii} > \sum_{j=1(j\neq i)}^{2n}\left|p_{ij}\right|,\ i = \overline{1,2n}. \tag{2.18}$$

По аналогії з (2.18) достатню умову для матриці $P_0 = \alpha_0 I_{2n} + V > 0$ можна зобразити через домінуючу діагональ $\alpha_0 I_{2n}$, а саме нерівністю (2.8).

Умову на параметр α_0 можна також записати інакше. Відомо [5], що власні значення додатно визначеної матриці всі додатні, тобто

$$\lambda(P_0) = \lambda(\alpha_0 I_{2n} + V) = \alpha_0 + \lambda(V) > 0,$$

де $\lambda(\cdot)$ - довільне власне значення матриці. Звідси отримуємо умову додатної визначеності матриці P_0 (2.9), яка задає точну нижню грань для параметра α_0, а умова (2.8) може визначати завищену грань.

Отже, невідомі параметри матриці K і вектора α можна визначити з умов (2.7)-(2.9). Якщо самих параметрів матриці K достатньо для задоволення нерівності (2.7), то спочатку знаходимо конкретну додатно визначену матрицю P_0 з умов (2.8) або (2.9), а потім обчислюємо матрицю К з нерівності (2.7) і вектору $G_1^{-1}H\alpha < 0$ відповідає додатно визначена матриця Q_1.

Таким чином, маємо додатно визначені матриці P_0, Q_1 і виконується рівність (2.14), тому, у відповідності з розкладами (2.3), матриці P_i, Q_{i+1}, $i = 1,2, \ldots$ не вплинуть на додатну визначеність матриць-розв'язків P, Q. Отже, якщо матриця K задовольняє нерівність (2.7), то матриця коефіцієнтів $A_0 + \varepsilon(A_1 + BK)$ замкненої системи (2.1), (2.2) буде асимптотично стійкою. ■

Відзначимо, що для пошуку матриці K більш підходять формули (2.7), (2.9), коли дані задані в числовому вигляді, а (2.7), (2.8) — в символьному і (або) числовому.

Проілюструємо результати теореми 2.1 на прикладі.

Приклад 2.1. Нехай задана система (2.1), (2.2) з такими параметрами:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},\ A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ K \in \Re_{2\times 4}.$$

Необхідно стабілізувати задану неперервну майже консервативну систему.

Вибираємо матрицю Q_1 діагональної структури $Q_1 = diag\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ і знаходимо вектор q та матрицю G

$$q = \begin{bmatrix} q_1 + q_2 + q_3 + q_4 \\ q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4 \end{bmatrix}, \quad G = [G_1, G_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матриця A_0 має різні власні значення $\lambda_{1,2} = \pm 1.618033989i$, $\lambda_{3,4} = \pm 0.6180339887i$ і $rank\ G_1 = 2$, тому для стабілізації даної системи можна застосувати теорему 2.1.

Далі обчислюємо матриці G_1^{-1} та $G_1^{-1}G$

$$G_1^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_1^{-1}G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Знаходимо матрицю H і вектор $r = G_1^{-1}H\alpha$, де $K = \{k_{ij}\}$,

$$H = \begin{bmatrix} k_{12} + k_{24} & -2k_{12} - k_{22} - k_{14} - k_{24} \\ 2k_{12} + k_{22} + k_{14} + k_{24} & -5k_{12} - 3k_{22} - 3k_{14} - 2k_{24} \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_2 \end{bmatrix},$$

$$r = \begin{bmatrix} k_{24} - k_{22} - k_{14})\alpha_0 + (k_{12} + k_{22} + k_{14})\alpha_2 \\ (k_{12} + k_{22} + k_{14})\alpha_0 - (3k_{12} + 2k_{22} + 2k_{14} + 2k_{24})\alpha_2 \end{bmatrix}.$$

З умов $\alpha_0 > -\lambda_{min}(V)$, $r < 0$ визначаємо матрицю K і вектор α.

$$r = \begin{bmatrix} -10 \\ -12 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Матриця коефіцієнтів замкненої системи має вигляд

$$A = A_0 + \varepsilon(A_1 + BK) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -6\varepsilon & -1 + \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 + \varepsilon & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5\varepsilon \end{bmatrix}.$$

Остаточно знаходимо матрицю $P_0 = \alpha_0 I_4 + \alpha_2 A_0 = diag\{2,2,2,2\}$, а з рівняння $r = -G_1^{-1}G[q_1, q_2, q_3, q_4]^T$ – матрицю $Q_1 = diag\{6,7,5,4\}$.

3. РОБАСТНА СТІЙКІСТЬ НЕПЕРЕРВНИХ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНИХ СИСТЕМ

Таким чином, ми знайшли параметри системи (2.1), (2.2), за яких вона буде асимптотично стійкою при достатньо малих значеннях параметра ε. Але бажано знайти інтервал для ε, в якому система асимптотично стійка. Для цього, виходячи з теореми 2.1, необхідно знайти розв'язок матричного рівняння Ляпунова (2.3) в обмеженому розкладі (2.4) та інтервал для параметра ε, в якому матриці P і Q додатно визначені.

Розв'язок цієї задачі дає наступне твердження.

Теорема 3.1. Нехай загального вигляду кососиметрична матриця A_0 не має кратних власних значень, параметри стабілізації системи (2.1), (2.2), знайдені за теоремою 2.1 і симетричні матриці

$$P = P_0 + \varepsilon P_1,\ Q = \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2, \tag{3.1}$$

задовольняють матричне рівняння Ляпунова (2.3), де матриця $P_0 > 0$ визначається за розкладом (2.6), а $Q_1 > 0$ – з (2.17). Тоді для довільного $\varepsilon \in r(P_0^{-\frac{1}{2}} P_1 P_0^{-\frac{1}{2}}) \cap r(Q_1^{-\frac{1}{2}} Q_2 Q_1^{-\frac{1}{2}})$, де

$$r(\cdot) = \begin{cases} (0, \infty), & \text{якщо } \lambda_{min}(\cdot) \geq 0, \\ (0, -\lambda_{min}^{-1}(\cdot)) & \text{якщо } \lambda_{min}(\cdot) < 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

матриці P, Q будуть додатно визначеними. Тут $\lambda_{min}(\cdot)$ – мінімальне власне значення матриці.

Доведення. Покажемо, що матриці-розв'язки (3.1) існують.

Матрицю P_0 визначаємо за (2.6) з обчисленими в теоремі 2.1 параметрами α_{2i}, $i=\overline{0,n-1}$ (нерівності (2.8), (2.9) показують її додатну визначеність). Елементи матриці K і вектора α обчислюються з нерівностей (2.7)-(2.9), тому отримуємо від'ємний вектор $G_1^{-1}H\alpha$. В теоремі 2.1 показано, що з рівняння (2.17) при $G_1^{-1}H\alpha<0$ завжди можна отримати додатно визначену діагональну матрицю Q_1.

Далі обчислюємо матрицю P_1 з другого рівняння системи (2.11) при відомій правій частині. Вільні параметри покладаємо рівними нулю і прирівнюємо до нуля матриці P_i, Q_{i+1}, $i=2,3,\ldots$, а матрицю Q_2 обчислюємо за формулою:

$$Q_2=-\frac{1}{2}P_1(A_1+BK)-\frac{1}{2}(A_1+BK)^TP_1, \tag{3.3}$$

Такий спосіб обчислення елементів розкладів (2.4) дає підстави стверджувати, що матриці $P=P_0+\varepsilon P_1$, $Q=\varepsilon Q_1+\varepsilon^2 Q_2$ задовольняють (2.3).

Тепер знайдемо умови на параметр ε, за яких матриці P, Q будуть додатно визначеними. Від пучка матриць $P_0+\varepsilon P_1>0$ перейдемо до пучка $\bar{P}(\varepsilon)=I+\varepsilon P_0^{-\frac{1}{2}}P_1P_0^{-\frac{1}{2}}>0$, який має з першим однакову область значень параметра ε. Дійсно, для будь-якого ненульового вектора $x\in\Re_{2n}$ маємо $x^T\bar{P}(\varepsilon)x=x^TP_0^{-\frac{1}{2}}PP_0^{-\frac{1}{2}}x=y^TPy$, де вектор $y=P_0^{-\frac{1}{2}}x\in\Re_{2n}$ може набувати довільних значень. Таким чином, знакова визначеність пучка матриць $\bar{P}(\varepsilon)$ випливає зі знакової визначеності пучка P. Зворотне також вірно, тому що $P=P_0^{\frac{1}{2}}\bar{P}(\varepsilon)P_0^{\frac{1}{2}}$.

Матриця $\bar{P}(\varepsilon)$ додатно визначена тоді і тільки тоді, коли всі її власні значення додатні, тобто

$$\lambda\big(\bar{P}(\varepsilon)\big)=1+\varepsilon\lambda\left(P_0^{-\frac{1}{2}}P_1P_0^{-\frac{1}{2}}\right)>0. \tag{3.4}$$

З (3.4) випливає наступне:

а) якщо $\lambda_{min}\left(P_0^{-\frac{1}{2}}P_1P_0^{-\frac{1}{2}}\right)<0$, то $0<\varepsilon\le-\lambda_{min}^{-1}\left(P_0^{-\frac{1}{2}}P_1P_0^{-\frac{1}{2}}\right)$;

б) якщо $\lambda_{min}(P_0^{-\frac{1}{2}}P_1P_0^{-\frac{1}{2}})\ge 0$, то $0<\varepsilon<\infty$.

Випадки а),б) описують інтервали (3.2).

Для пучка матриць $Q_1+\varepsilon Q_2$ отримуємо аналогічні інтервали. Перетин побудованих інтервалів дає шуканий інтервал. ■

Укажемо на те, що другий інтервал з (3.2) потребує знаходження матриці $P_0^{-\frac{1}{2}}$, що на практиці може бути пов'язане з обчислювальними труднощами. Але, якщо знайти мінімальне додатне власне значення $\lambda_{min}^{+}(P(\varepsilon))$ пучка матриць $P(\varepsilon)=P_0+\varepsilon P_1$, то інтервал $\left(0,-\lambda_{min}^{-1}\left(P_0^{-\frac{1}{2}}P_1P_0^{-\frac{1}{2}}\right)\right)$ можна замінити рівним йому $(0,\lambda_{min}^{+}(P(\varepsilon)))$. Дійсно, при достатньо малих значеннях параметра ε матриця $P(\varepsilon)$ додатно визначена, тому що для довільного вектора $0\ne x\in\Re_{2n}$ буде виконуватися нерівність $x^TP_0x+\varepsilon x^TP_1x>0$. Рухаючись від початку координат вправо по вісі ε до першого нуля $|P(\varepsilon)|$, визначеність матриці $P(\varepsilon)$ не зміниться, тому що власні значення матриці неперервно залежать від її елементів [5]. Якщо власні значення даного пучка відсутні на строго правій півосі ε, то маємо інтервал $(0,\infty)$. Додатно визначена матриця Q_1 має діагональну структуру (2.12), тому $Q_1^{-\frac{1}{2}}=diag\left\{\frac{1}{\sqrt{q_1}},\ldots,\frac{1}{\sqrt{q_{2n}}}\right\}$.

Продовжимо розгляд прикладу 2.1.

Приклад 3.1. Знайти інтервал для параметра ε, в якому знайдена в прикладі 2.1 матриця коефіцієнтів замкненої системи (2.1), (2.2) буде асимптотично стійкою.

З другого рівняння системи (2.11) при відомій правій частині

$$P_0(A_1+BK)+(A_1+BK)^T P_0+2Q_1=\begin{bmatrix}12&0&0&0\\0&-10&4&0\\0&4&10&0\\0&0&0&-12\end{bmatrix}$$

знаходимо матрицю $P_1=\begin{bmatrix}4&6&0&-5\\6&4&-1&0\\0&-1&0&6\\-5&0&6&0\end{bmatrix}$, а матрицю Q_2 обчислюємо за формулою (3.3) $Q_2=\begin{bmatrix}0&18&-3&-25/2\\18&25&-5&-3\\-3&-5&1&15\\-25/2&-3&15&0\end{bmatrix}$.

Далі знаходимо мінімальні додатні власні значення пучків матриць $P_0+\mu P_1$, $Q_1+\delta Q_2$

$$|P_0+\mu P_1| = 16-328\mu^2+64\mu-784\mu^3+385\mu^4,$$

$$|Q_1+\delta Q_2| = 840+3168\delta-21920.75\delta^2-37140\delta^3+62721\delta^4,$$

$$\mu_{min}^+ = 0.253342947,\ \delta_{min}^+ = 0.2431148113.$$

В інтервалах $\varepsilon\in(0,\mu_{min}^+)$ і $\varepsilon\in(0,\delta_{min}^+)$ відповідно матриці $P_0+\varepsilon P_1$, $Q_1+\varepsilon Q_2$будуть додатно визначеними. Їх спільний інтервал (0,0.2431148113) для параметра ε дасть асимптотично стійку матрицю коефіцієнтів замкненої системи.

ВИСНОВКИ

У роботі досліджено умови стабілізації неперервних керованих майже консервативних систем, у яких матриця коефіцієнтів консервативної частини не має кратних власних значень. Використовуючи спеціальний підхід та розклад в степеневі ряди, знайдено параметри системи, за яких вона буде асимптотично стійкою при достатньо малих значеннях параметра ε.

На основі рівняння Ляпунова знайдено інтервал для параметра ε, в якому виконуються умови стабілізації даних систем. Сформульовані та доведенні відповідні теореми.

Наведено приклади знаходження параметрів системи, при яких вона стабілізована, та знайдено інтервал для параметра ε, в якому замкнена система буде асимптотично стійкою.

Запропоновані теореми та приклади можуть бути використані при дослідженні різних механічних систем, математичними моделями яких є неперервні майже консервативні системи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Зінчук М. О. Стійкість та стабілізація лінійних параметричних динамічних систем / М. О. Зінчук, В. В. Новицький // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2007. – Т. 4, № 2. – С. 58-71.
2. Barnett S. Introduction to Mathematical Control Theory. Second Edition / S. Barnett, R. G. Cameron. – Oxford : Clarendon press, 1985. – 404 p.
3. Новицький В. В. Рівняння Ляпунова для майже консервативних систем / В. В. Новицький. – Київ, 2004. – 34 с. – (Препр. / НАН України. Ін-т математики; 2004.7).
4. Прасолов В. В. Задачи и теоремы линейной алгебры / В. В. Прасолов. – М. : Наука, 1996. – 304 с.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1988. – 552 с.

REFERENCES

1. Zinchuk, M.O. and Novytsʹkyy, V.V. (2007), “Stability and stabilization linear parametric dynamic systems”, *Zb. prats' In-tu matematyky NAN Ukrayiny*, vol. 4, no. 2, pp. 58-71.
2. Barnett, S. and Cameron, R.G. (1985), [Introduction to Mathematical Control Theory. Second Edition], Clarendon press, Oxford.
3. Novytsʹkyy, V.V. (2004), *Rivnyannya Lyapunova dlya mayzhe konservatyvnykh system* [Lyapunov equations for almost conservative systems], Prepr. In-t matematyky NAN Ukrayiny, Kyiv, Ukraine.
4. Prasolov, V.V. (1996), *Zadachy y teoremy lyneynoy alhebry* [Problems and theorems of linear algebra], Nauka, Moscow, Russia.
5. Hantmakher, F.R. (1988), *Teoryya matryts* [Matrix theory], Nauka, Moscow, Russia.

УДК 539.3

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ БИФУРКАЦИЙ В ТЕОРИИ ТОНКОСТЕННЫХ СИСТЕМ

Ободан Н. И., д. техн. н., профессор, Адлуцкий В. Я., к. ф.-м. н., с. н. с.,
Громов В. А., к. ф.-м. н., с. н. с.

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара,
просп. Гагарина, 72, Днепропетровск, Украина*

stroller@rambler.ru

В статье рассматривается обратная задача теории бифуркаций в теории тонкостенных систем как задача диагностики предбифуркационного состояния возмущённой тонкостенной системы. Используется топологический предвестник бифуркации, построенный на основе характерных последовательностей форм деформации, полученных путём кластеризации обучающей выборки, сгенерированной на основе закритических решений нелинейной краевой задачи теории оболочек. Предложенный метод решения был применён к идентификации предбифуркационного состояния цилиндрической оболочки, находящейся под действием внешнего давления, близкого к критическому, подвергнутой импульсному воздействию.

Ключевые слова: обратная задача теории бифуркаций, топологический предвестник, структура ветвления решения, тонкостенная оболочка.

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ БІФУРКАЦІЙ У ТЕОРІЇ ТОНКОСТІННИХ СИСТЕМ

Ободан Н. І., д. техн. н., професор, Адлуцький В. Я., к. ф.-м. н., с. н. с.,
Громов В. О., к. ф.-м. н., с. н. с

*Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара,
просп. Гагаріна, 72, Дніпропетровськ, Україна*

stroller@rambler.ru

У статті розглянуто обернену задачу теорії біфуркацій у теорії тонкостінних систем як задачу діагностики передбіфуркаційного стану збуреної тонкостінної системи. Використовується топологічний передвісник біфуркації, побудований на основі характерних послідовностей форм деформації, одержаних за допомогою навчальної вибірки, згенерованої з закритичних розв’язків нелінійної крайової задачі теорії оболонок. Запропонований метод розв’язання застосовано до ідентифікації передбіфуркаційного стану циліндричної оболонки, що знаходиться під дією зовнішнього тиску, близького до критичного, що піддана імпульсному впливу.

Ключові слова: обернена задача теорії біфуркацій, топологічний передвісник, структура галуження розв’язку, тонкостінна оболонка.