

УДК 004.942: 519.6

## МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ: СТРУКТУРИРОВАННЫЕ И БЛОЧНО-СТРУКТУРИРОВАННЫЕ СЕТКИ

Чопоров С. В., к. т. н., доцент, Гоменюк С. И., д. т. н., профессор, Алатамнех Х. Х., аспирант,  
Оспищев К. С., аспирант

*Запорожский национальный университет,  
ул. Жуковского, 66, Запорожье, 69600, Украина*

s.choporoff@znu.edu.ua

В статье проведен обзор актуальных подходов и методов построения структурированных и блочно-структурированных дискретных моделей. В частности, выполнен анализ методов на основе алгебраических преобразований и методов на основе дифференциальных уравнений. Также рассмотрены методы построения блочно-структурированных моделей.

*Ключевые слова: дискретная модель, сетка, конечный элемент, структурированная сетка, блочно-структурированная сетка.*

## МЕТОДИ ПОБУДОВИ ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЕЙ: СТРУКТУРОВАНИ ТА БЛОЧНО-СТРУКТУРОВАНИ СІТКИ

Чопоров С. В., к. т. н., доцент, Гоменюк С. И., д. т. н., профессор, Алатамнех Х. Х., аспирант,  
Оспищев К. С., аспирант

*Запорізький національний університет,  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, 69600, Україна*

s.choporoff@znu.edu.ua

У статті проведено огляд актуальних підходів і методів побудови структурованих і блочно-структурованих дискретних моделей. Зокрема, виконано аналіз методів на основі алгебраїчних перетворень і методів на основі диференціальних рівнянь. Також розглянуто методи побудови блочно-структурованих дискретних моделей.

*Ключові слова: дискретна модель, сітка, скінченний елемент, структурована сітка, блочно-структурована сітка.*

## DISCRETE MODELS GENERATION METHODS: STRUCTURED AND BLOCK-STRUCTURED GRIDS

Choporov S. V., PhD in Engineering, Gonenyuk S.I., DSc in Engineering, Alathamneh H. K.,  
postgraduate, Ospishchev K.S., postgraduate

*Zaporizhzhya National University,  
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, Ukraine, 69600*

s.choporoff@znu.edu.ua

Numerical simulations are now widely employed in various engineering fields. A lot of numerical simulations uses models based on partial differential equations (PDE). In the most frequently used numerical methods (e.g. the finite element method), a continuous problem is replaced by a discrete model. The discrete model approximates solution of the initial partial differential equations. Thus the first step of a discrete simulation involves mesh generation techniques.

A mesh (aka grid) is a set of points distributed over a calculation field. A mesh is a replacement of a continuous region by a finite union of simple element such as triangles, quads, tetrahedrons, hexahedrals, etc. The mesh can be structured or unstructured. In the first case points neighborhood is similar to the neighborhood of elements in a matrix. In the second case points arbitrary connected into edges. In structured meshes edges are related to coordinate directions a curvilinear coordinate system. In contrast, unstructured meshes are usually formed with no relation to coordinate directions. Structured grids usually consist of quadrilaterals or hexahedrals (topological cubes). Unstructured meshes also use triangles and tetrahedrons.

Structured grids are usually formed using an algebraic grid generation or a PDE-based grid generation. The first one is a transformation from a rectangular computational domain into an arbitrary shaped

physical domain. It widely uses transfinite interpolation. Transfinite interpolation is an interpolation procedure that generates conformed to specified boundaries grids. Linear, Lagrangian and Hermit blending functions are used to interpolate in the coordinate directions. Grid spacing can be controlled using an intermediate control domain between the computational domain and the physical domain. An algebraic grid generation is easily programmed and computationally effective.

A PDE-based grid generation uses partial differential equations to obtain correspondence between a computational domain and a physical domain. Grids are computed by solving the system of partial differential equations. PDE-based methods can be classified into three types: elliptic, parabolic and hyperbolic. The most widely used is elliptic second order partial differential equations are so-called Poisson systems.

This article is a review of automatic grid generation approaches. Particularly, the review includes following approaches: an algebraic grid generation, an elliptic generation and a hyperbolic generation.

The approaches to block-structured grid generation are described also.

*Key words: discrete model, mesh, grid, structured, block-structured.*

## ВВЕДЕНИЕ

Современное проектирование активно применяет методы математического моделирования для исследования свойств разрабатываемого объекта. Многие математические модели, используемые в проектировании, основаны на решении систем дифференциальных уравнений в частных производных. При этом в наиболее распространенных численных методах (например, методе конечных элементов) непрерывная модель заменяется ее дискретным аналогом. Дискретная модель аппроксимирует решение исходной системы дифференциальных уравнений в частных производных. Соответственно, на первом шаге такого моделирования задействуются методы построения дискретных моделей.

Дискретная модель геометрического объекта (или сетка) – это множество точек, распределенных в исследуемой области, и связей между ними. По сути, дискретная модель геометрического объекта – это замена исходной непрерывной области конечным объединением простейших фигур: треугольников, четырехугольников, тетраэдров, шестигранников и т. п. По размерности пространства дискретные модели делятся на одномерные, двумерные и трехмерные. Также дискретные модели бывают структурированными и неструктурированными (рис. 1). В первом случае соседство между точками аналогично соседству элементов в матрице, во втором – ребра могут произвольным образом соединять узлы. В структурированных дискретных моделях ребра соответствуют координатным направлениям некоторой (в общем случае криволинейной) системы координат. Напротив, в неструктурированных дискретных моделях выбор ребер не имеет привязки к координатным направлениям. В структурированных дискретных моделях наибольшее распространение получили четырехугольники и шестигранники, а в неструктурированных часто используются треугольники и тетраэдры. Существенным преимуществом структурированных дискретных моделей является относительная простота их программирования, а также их высокая вычислительная эффективность.

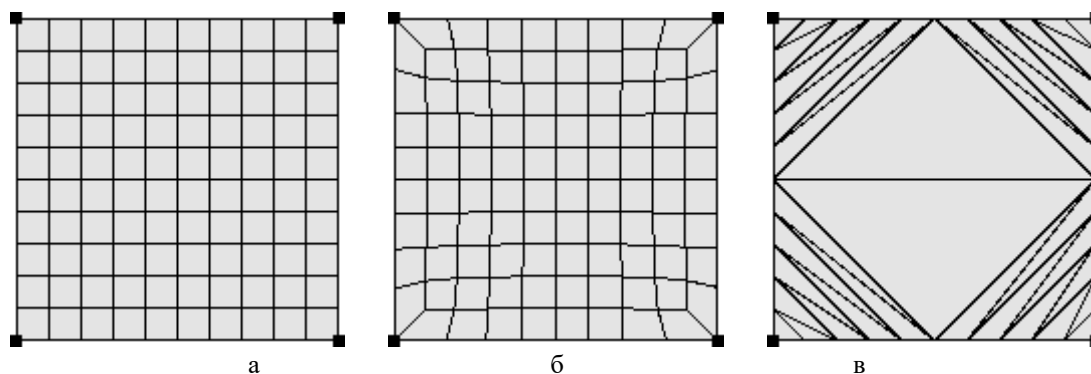


Рис. 1. Дискретные модели: а – структурированная, б – неструктурированная (четыреугольники), в – неструктурированная (треугольники)

Таким образом, целью данной работы является исследование актуального состояния проблемы автоматического построения структурированных дискретных моделей.

## ОСНОВНЫЕ ПОДХОДЫ К ПОСТРОЕНИЮ СТРУКТУРИРОВАННЫХ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ

Структурированные дискретные модели возникли в качестве основы метода конечных разностей. Они используют идею трансформации сетки, определенной на единичном квадрате (кубе в трехмерном случае), в геометрию объекта при помощи отображения  $F : [0, 1]^n \rightarrow \Omega$  ( $n$  – размерность пространства). Отображение  $F$  может быть определено явно (изопараметрическое или конформное отображение) или неявно (решение эллиптических или гиперболических уравнений в частных производных). Актуальные научные исследования в области построения таких сеток сосредоточены на поиске отображения  $F$ .

При построении структурированных сеток принято рассматривать две координатные области: физическую и расчетную. Физическая область – это область  $\Omega$ , для которой строится дискретная модель. Расчетной областью выступает единичный квадрат (куб). Можно принять, что в расчетной области определена прямоугольная система координат, а в физической – криволинейная. Если физическая область является прямоугольником, то построение расчетной сетки является тривиальным:

$$x_i = x_0 + \frac{w}{n}(i-1), \quad i = \overline{1, n},$$

$$y_j = y_0 + \frac{h}{m}(j-1), \quad j = \overline{1, m},$$

где  $(x_0, y_0)$  – координаты нижнего левого угла прямоугольника;  $w$  – ширина прямоугольника;  $h$  – высота прямоугольника;  $n$  – количество узлов вдоль оси абсцисс;  $m$  – количество узлов вдоль оси ординат.

Для криволинейных областей необходимо находить соответствующие преобразования координат. Например, если принять, что физическая область ограничена двумя радиусами  $r_0 \leq r \leq r_1$  и углами  $0 \leq \alpha \leq \theta$ , то преобразование

$$x(\xi, \eta) = [r_0 + (r_1 - r_0)\eta] \cos(\theta\xi),$$

$$y(\xi, \eta) = [r_0 + (r_1 - r_0)\eta] \sin(\theta\xi)$$

установит соответствие с расчетной областью в системе координат  $(\xi, \eta)$  (рис. 2).

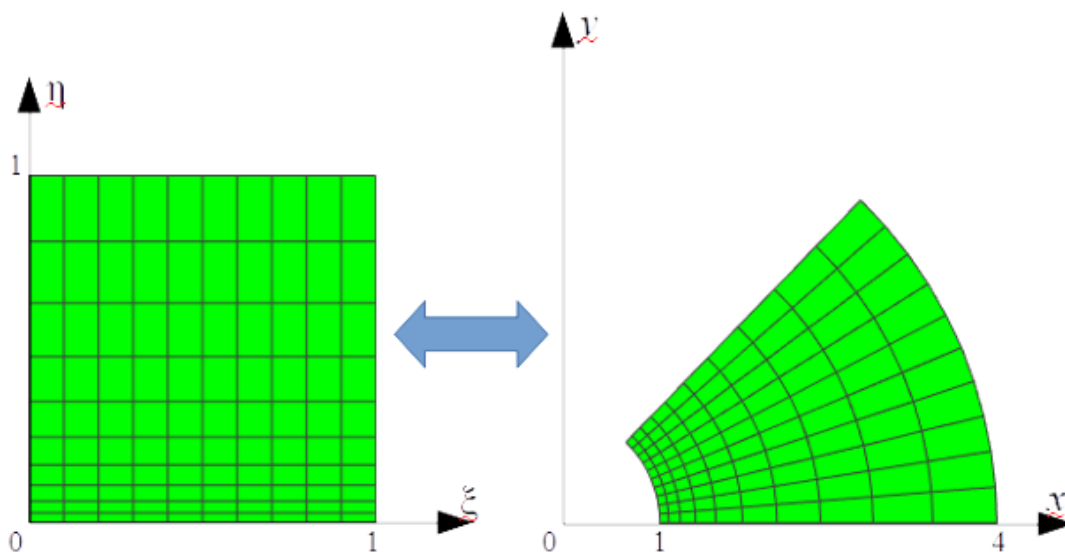


Рис. 2. Расчетная и физическая область для кольцевого объекта

В случаях, когда подобную аналитическую связь между расчетной и физической областями установить затруднительно, используют методы интерполяции. Например, если область ограничена двумя параметрическими кривыми, то для установления соответствия между физической и расчетной областями, может быть использована однонаправленная интерполяция:

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= (1 - \xi)x_l(\eta) + \xi x_r(\eta), \\ y(\xi, \eta) &= (1 - \xi)y_l(\eta) + \xi y_r(\eta), \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\begin{cases} x_l(\eta), \\ y_l(\eta) \end{cases}$  и  $\begin{cases} x_r(\eta), \\ y_r(\eta) \end{cases}$  – параметрическое представление, соответственно, «левой» и

«правой» кривых для случая, когда интерполяция носит горизонтальный характер (рис. 3, а). Если интерполяция носит вертикальный характер (рис. 3, б), то формулы будут аналогичными.

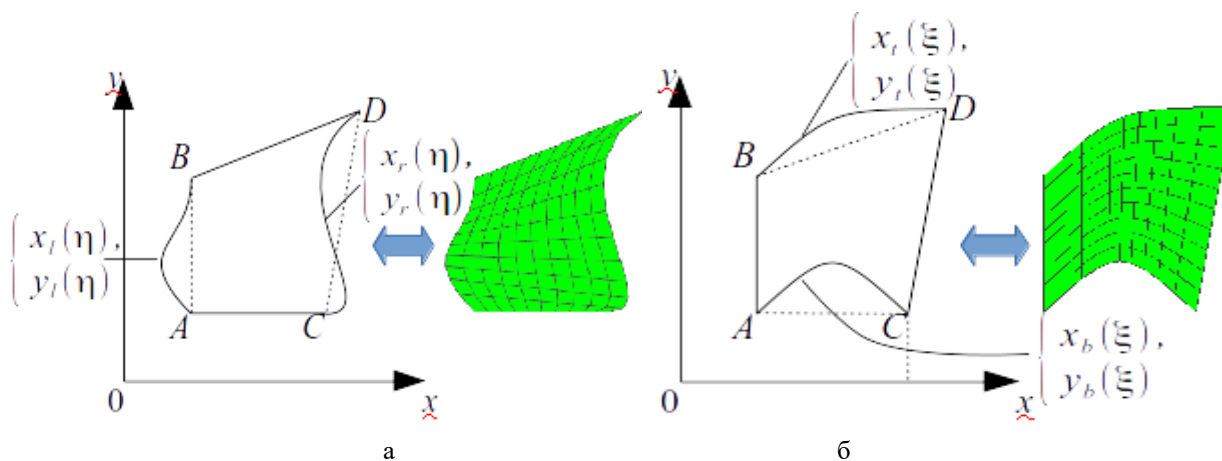


Рис. 3. Однонаправленная интерполяция: а – горизонтальная, б – вертикальная

Если область ограничена четырьмя кривыми, то возможно определить отображение, которое ставит в соответствие квадрат  $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ , определенный в расчетной системе координат, физической области  $ABCD$  (рис. 4). Такое отображение может быть получено последовательным применением отображений вида (1) в каждом координатном направлении с вычитанием результатов билинейной интерполяции:

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= (1 - \xi)x_l(\eta) + \xi x_r(\eta) + (1 - \eta)x_b(\xi) + \eta x_t(\xi) - \\ &\quad - (1 - \xi)(1 - \eta)x_b(0) - (1 - \xi)\eta x_t(0) - \xi(1 - \eta)x_b(1) - \xi\eta x_t(1), \\ y(\xi, \eta) &= (1 - \xi)y_l(\eta) + \xi y_r(\eta) + (1 - \eta)y_b(\xi) + \eta y_t(\xi) - \\ &\quad - (1 - \xi)(1 - \eta)y_b(0) - (1 - \xi)\eta y_t(0) - \xi(1 - \eta)y_b(1) - \xi\eta y_t(1). \end{aligned} \tag{2}$$

Формулы, аналогичные (1) и (2), могут быть получены для интерполяции трехмерных физических областей как на основе трилинейной интерполяции, так и на основе интерполяции Лагранжа или Эрмита [1]. Методы на основе подобных преобразований называются алгебраическими, один из первых таких подходов, основанный на обобщенных криволинейных координатах, был предложен в работе [2]. Аналогичные формулы для построения трехмерных структурированных дискретных моделей на базе трансфинитной интерполяции рассмотрены в работах [3-5].

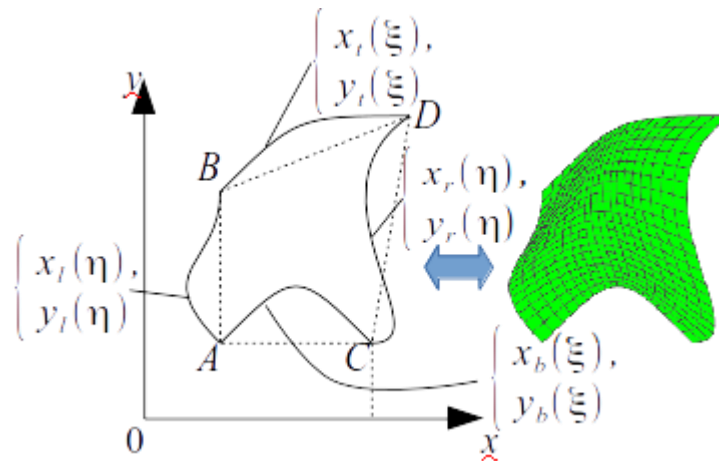


Рис. 4. Билинейная трансфинитная интерполяция

Для контроля распределения внутренних узлов при построении дискретных моделей на основе алгебраических методов используются различные функции растяжения [6] (например, экспоненциальные, гиперболические и другие [1]), а также методы, основанные на методе многих поверхностей [7, 1], в которых вводятся промежуточные поверхности (кривые) для построения интерполяционных схем более высокого порядка.

Также в работах [8-11] предлагаются алгебраические методы, основанные на использовании барицентрических координат, для построения и оптимизации дискретных моделей. Такие схемы преимущественно используются для разбиения на элементы областей, определенных многоугольниками (пример, на рис. 5) или многогранниками. Для разбиения областей, определенных невыпуклыми многоугольниками, разрабатывается аппарат обобщенных барицентрических координат [10].

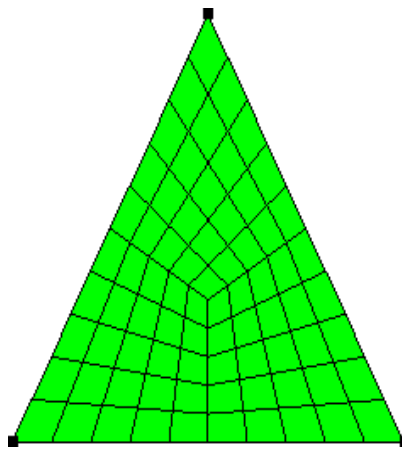


Рис. 5. Пример разбиения треугольной области на базе барицентрических координат

Основными недостатками алгебраических методов является в общем случае отсутствие ортогональности и сложность контроля размера соседних ячеек. Все это отрицательно влияет на точность решений, полученных с использованием таких дискретных моделей.

Альтернативой алгебраическим методам для построения структурированных дискретных моделей являются подходы, основанные на решении краевой задачи для дифференциальных уравнений в частных производных. Такие методы иногда называют дифференциальными, их в зависимости от типа базовой системы дифференциальных уравнений можно разделить на эллиптические, параболические и гиперболические.

Один из наиболее общих подходов к построению дискретных моделей с использованием уравнений в частных производных основан на решении уравнения Пуассона [12-21], записанного в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} &= P(\xi, \eta), \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} &= Q(\xi, \eta),\end{aligned}\tag{3}$$

где  $P$  и  $Q$  – некоторые функции, используемые для контроля сгущения внутренних точек сетки. Решение уравнения (3) находится в расчетной области системы координат  $(\xi, \eta)$ , поэтому оно преобразуется к виду [7]

$$\begin{aligned}g_{22} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + g_{11} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + g \left( P \frac{\partial x}{\partial \xi} + Q \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) &= 0, \\ g_{22} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + g_{11} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} + g \left( P \frac{\partial y}{\partial \xi} + Q \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) &= 0,\end{aligned}\tag{4}$$

где

$$\begin{aligned}g_{11} &= \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2, \\ g_{12} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \\ g_{22} &= \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2, \\ g &= \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2.\end{aligned}$$

Уравнение (4) решается численно, как правило, используя конечно-разностные схемы, с граничными условиями, соответствующим значениям координат узлов на границах физической области. Дискретные модели, полученные на основе таких систем дифференциальных уравнений, называются эллиптическими. Также возможно строить структурированные модели путем решения гиперболических или параболических систем [1]. Аналогичные уравнения могут быть записаны для трехмерных тел (начальными данными будут положения узлов на граничных поверхностях) [13-16]. При этом для неравномерного начального распределения узлов на границах физической области часто используются алгебраические методы для дискретизации кривых [22] и/или двумерные дифференциальные уравнения для дискретизации поверхностей [1].

Одним из наиболее существенных преимуществ использования уравнений в частных производных является возможность обеспечения ортогональности линий сетки границам области [12, 19-21, 23], совпадения с линиями тока эквивалентной задачи потенциального обтекания [7], а также гладкости внутренней части сетки при наличии разрывов границ. В результате методы генерации сеток, основанные на решении дифференциальных уравнений, получили распространение в задачах исследования динамики газов и жидкостей [4, 7, 13-16].

Описанные выше методы применимы для кубоподобных тел (в топологическом смысле). В случае, если тело обладает геометрической конфигурацией, которую невозможно отобразить на куб, то используют методы блочной декомпозиции (рис. 6). Основная идея таких методов – разделение исходной геометрии объекта на кубоподобные области, к каждой из которых применяются методы генерации структурированных дискретных моделей.

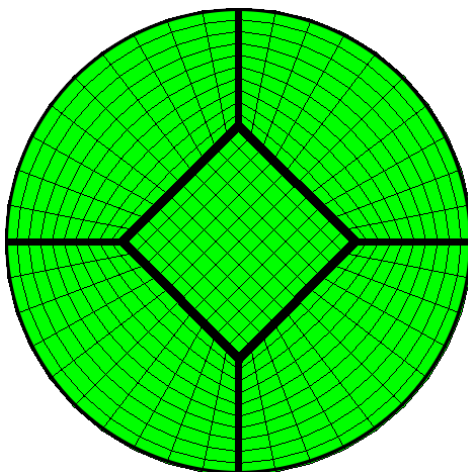


Рис. 6. Блочно-структурированная дискретная модель

Один из первых методов блочной декомпозиции основан на использовании октодеревьев и шаблонов для адаптации блоков [24]. Область рекурсивно разбивается на кубоподобные блоки, которые в литературе часто называют октантами. Итерация по глубине рекурсии выполняется, как правило, в окрестности особой точки (например, рис. 7) или границы с высокой кривизной. На заключительном шаге при помощи специальных шаблонов восстанавливается корректность топологии и производится построение структурированных сеток для каждого из блоков. Развитие этой идеи представлено в [25-27], обобщение для дискретизации трехмерных объектов в [28-32].

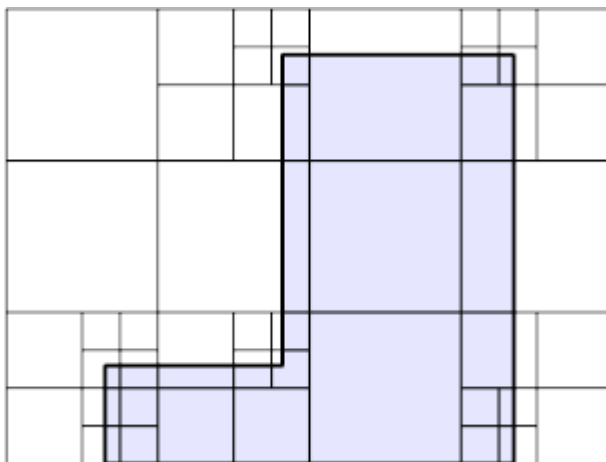


Рис. 7. Общая идея рекурсивного разбиения на блоки

Другим весьма распространенным способом декомпозиции на блоки является использование метода срединных осей [33-35]. Срединные оси связаны с определением «скелет многоугольника», под которым понимается геометрическое место точек кривой, образованной центрами вписанных окружностей максимального радиуса, касающихся границ объекта. Вписанная окружность должна касаться, по меньшей мере, двух точек границы объекта. В противном случае – должна существовать другая вписанная окружность, полностью удовлетворяющая этим требованиям. Представление области в виде срединных осей является исходным, расщепление на блоки производится в области излома срединной оси (пример на рис. 8). Этот подход имеет обобщение для трехмерного случая под названием срединные поверхности. Стоит отметить, что построение срединных осей или поверхностей является самостоятельной весьма сложной задачей, методы решения которой часто используют триангуляцию Делоне или диаграммы Воронова.

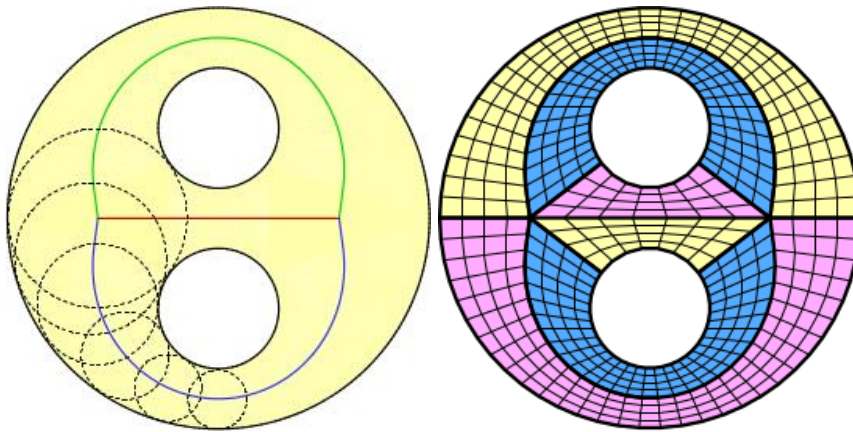


Рис. 8. Срединные оси: исходная область и полученные блоки [35]

Также разрабатываются методы декомпозиции области на блоки на основе нечеткой логики [36-38], методы на основе закругления (coarsening) исходной сетки [39] и их развитие [40-41]. Алгоритмы на основе нечеткой логики выглядят весьма перспективными, однако их практическое применение усложняется трудностью их формализации. Методы на основе закругления в качестве исходных данных используют начальную достаточно густую дискретную модель, в которой блоки формируются путем объединения соседних элементов на основе некоторых правил, что позволяет их использовать для перестроения модели по результатам расчета.

Одним из преимуществ блочной декомпозиции является возможность использования технологий параллельных вычислений при обработке блоков (особенности реализации таких методов для различных типов параллельных компьютерных систем рассмотрены в [42-44]).

### ВЫВОДЫ

Таким образом, можно выделить ряд преимуществ и недостатков использования структурированных дискретных моделей. К преимуществам можно отнести возможность использования более высокого порядка аппроксимации (в приложениях к задачам газодинамики и исследования течений жидкостей и газов), необходимость использования меньшего количества вычислительных ресурсов (не требуются хранение и обработка информации о соседних вершинах, ребрах, гранях и т.п., необходимой для неструктурированных моделей). Однако, адаптация структурированных или блочно-структурированных моделей к сложным телам весьма трудоемка и возможно появление вырожденных элементов. Декомпозиция на блоки применима при использовании методов твердотельной геометрии (блоки и границы представлены явным образом). Однако, в случае тел очень сложной формы или при функциональном представлении тела, методы декомпозиции на блоки практически не применимы (ввиду слабой формализации блоков и отсутствия явного представления границ), а их вычислительная сложность при этом становится сравнимой с вычислительной сложностью методов получения неструктурированных моделей.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Thompson J. F. Handbook of grid generation / J. F. Thompson, B. Sony, N. Weatherill. – New York : CRC Press, 1999. – 1136 p.
2. Gordon W. N. Construction of curvilinear coordinate systems and application to mesh generation / W. N. Gordon, C. A. Hall // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1973. – Vol. 7. – P. 461-477.
3. Cook W. A. Body oriented (natural) co-ordinates for generating three dimensional meshes / W. A. Cook // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1974. – Vol. 8. – P. 27-43.



4. Haber R. A general two-dimensional, graphical finite element preprocessor utilizing discrete transfinite mapping / R. Haber, M. S. Shephard, J. F. Abel, R. H. Gallagher, D. P. Greenberg // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 1982. – Vol. 17. – P. 1015-1044.
5. Haber R. Discrete transfinite mappings for description and meshing of three-dimensional surfaces using interactive computer graphics / R. Haber, J. F. Abel // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 1982. – Vol. 18. – P. 41-66.
6. Eiseman P. R. A multi-surface method of coordinate generation / P. R. Eiseman // *Journal of Computational Physics*. – 1979. – Vol. 33, iss. 1. – P. 118-150.
7. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей / К. Флетчер. – М. : Мир, 1991. – Т. 2 : Методы расчета различных течений. – 552 с.
8. Floater M. S. Parametrization and smooth approximation of surface triangulations / M. S. Floater // *Computer Aided Geometric Design*. – 1997. – Vol. 14, iss. 3. – P. 231-250.
9. Floater M. S. A general construction of barycentric coordinates over convex polygons / M. S. Floater, K. Hormann, G. Kós // *Advances in Computational Mathematics*. – 2006. – Vol. 24, iss. 1. – P. 311-331.
10. Meyer M. Generalized barycentric coordinates on irregular polygons / M. Meyer, A. Barr, H. Lee, M. Desbrun // *Journal of Graphics Tools*. – 2002. – Vol. 7, iss. 1. – P. 13-22.
11. Warren J. Barycentric coordinates for convex polytopes / J. Warren // *Advances in Computational Mathematics*. – 1996. – Vol. 6, iss. 1. – P. 97-108.
12. Akinlar M. A. A Method for Orthogonal Grid Generation / M. A. Akinlar, S. Salako, G. Liao // *General Mathematics Notes*. – 2011. – Vol. 3. – No 1. – P. 55-72.
13. Мартюшов С. Н. Расчет пространственных задач обтекания на основе TVD схемы Хартена / С. Н. Мартюшов // *Вычислительные технологии*. – 1995. – Т. 14. – № 12. – С. 219-228.
14. Мартюшов С. Н. Построение дву- и трехмерных сеток для задач газодинамики на основе уравнения Пуассона / С. Н. Мартюшов // *Известия высших учебных заведений. Математика*. – 1997. – № 4. – С. 108-110.
15. Мартюшов С. Н. Численное моделирование струйных течений методом конечного объема на основе TVD-схемы 2-го порядка точности / С. Н. Мартюшов, Я. Г. Мартюшова // *Вычислительные технологии*. – 2004. – Т. 9. – № 4. – С. 57-65.
16. Мартюшов С. Н. Численное моделирование течений детонации газовых смесей методом конечного объема / С. Н. Мартюшов, Я. Г. Мартюшова // *Вычислительные технологии*. – 2008. – Т. 13. – № 1. – С. 88-98.
17. Ashrafizadeh A. Direct Design Solution of the Elliptic Grid Generation Equations / A. Ashrafizadeh, G. D. Raithby // *Numerical Heat Transfer*. – 2006. – Vol. 50. – P. 217-230.
18. Ashrafizadeh A. Structured Grid Generation Via Constraint on Displacement of Internal Nodes / A. Ashrafizadeh, R. Jalalabadi // *International Journal of Basic & Applied Science*. – 2011. – Vol. 11, No 4. – P. 79-87.
19. Zhang Y. 2D Nearly Orthogonal Mesh Generation / Y. Zhang, Y. Jia, S. S. Y. Wang // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. – 2004. – Vol. 46, iss. 7. – P. 685-707.
20. Zhang Y. 2D Nearly Orthogonal Mesh Generation with Controls of Distortion Function / Y. Zhang, Y. Jia, S. S. Y. Wang // *Journal of Computational Physics*. – 2006. – Vol. 218, iss. 2. – P. 549-571.
21. Zhang Y. Structured Mesh Generation with Smoothness Controls / Y. Zhang, Y. Jia, S. S. Y. Wang // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. – 2006. – Vol. 51, iss. 11. – P. 1255-1276.
22. Lehtimaki R. An Algebraic Boundary Orthogonalization Procedure for Structured Grids / R. Lehtimaki // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. – 2000. – Vol. 32, iss. 5. – P. 605-618.
23. Zhou Q. A Simple Grid Generation Method / Q. Zhou // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. – 1998. – Vol. 26, iss. 6. – P. 713-724.
24. Yerry M. A. A modified quadtree approach to finite element mesh generation / M. A. Yerry, M. S. Shephard // *IEEE Computer Graphics and Applications*. – 1983. – Vol. 3, iss. 1. – P. 39-46.
25. Baehmann P. L. Robust, geometrically based, automatic two-dimensional mesh generation / P. L. Baehmann, S. L. Wittchen, M. S. Shephard, K. R. Grice, M. A. Yerry // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 1987. – Vol. 24, iss. 6. – P. 1043-1078.

26. Liang X. Guaranteed-quality all-quadrilateral mesh generation with feature preservation / X. Liang, M. S. Ebeida, Y. Zhang // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2010. – Vol. 199. – P. 2072-2083.
27. Yiu K. F. C. Quadtree grid generation: information handling, boundary fitting and CFD applications / K. F. C. Yiu, D. M. Greaves, S. Cruz, A. Saalehi, A. G. L. Borthwick // *Computers & Fluids*. – 1996. – Vol. 25, iss. 8. – P. 759-769.
28. Ito Y. Octree-based reasonable-quality hexahedral mesh generation using a new set of refinement templates / Y. Ito, A. M. Shih, B. K. Soni // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 2009. – Vol. 77. – P. 1809-1833.
29. Kolšek T. Generation of block-structured grids in complex computational domains using templates / T. Kolšek, M. Šubelj, J. Duhovnik // *Finite Elements in Analysis and Design*. – 2003. – Vol. 39. – P. 1139-1154.
30. Miranda A. C. O. Hierarchical template-based quadrilateral mesh generation / A. C. O. Miranda, L. F. Martha // *Engineering with Computers*. – 2015. – Vol. 31. – P. 1-15.
31. Yerry M. A. Automatic three-dimensional mesh generation by the modified-octree technique / M. A. Yerry, M. S. Shephard // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 1984. – Vol. 20, iss. 11. – P. 1965-1990.
32. Zhang H. Adaptive hexahedral mesh generation based on local domain curvature and thickness using a modified grid-based method / H. Zhang, G. Zhao // *Finite Elements in Analysis and Design*. – 2007. – Vol. 43, iss. 9. – P. 691-704.
33. Quadros W. R. LayTracks: a new approach to automated geometry adaptive quadrilateral mesh generation using medial axis transform / W. R. Quadros, K. Ramaswami, F. B. Prinz, B. Gurumoorthy // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 2004. – Vol. 61, iss. 2. – P. 209-237.
34. Tam T. K. H. 2D finite element mesh generation by medial axis subdivision / T. K. H. Tam, C. G. Armstrong // *Advances in Engineering Software and Workstations*. – 1991. – Vol. 13. – No 5-6. – P. 313-324.
35. Guoy D. Automatic Blocking Scheme for Structured Meshing in 2D Multiphase Flow Simulation / D. Guoy, J. Erickson // *The 13<sup>th</sup> International Meshing Roundtable: International Conference, Williamsburg, Virginia, USA, September 19-22, 2004: proceedings*. – Sandia: Sandia National Laboratories, 2004. – P. 121-132.
36. Taghavi R. Automatic block decomposition using fuzzy logic analysis / R. Taghavi // *The 9<sup>th</sup> International meshing roundtable: International Conference, New Orleans, Louisiana, USA, 2-5 October 2000: proceedings*. – Sandia: Sandia National Laboratories, 2000. – P. 187-192.
37. Takahashi H. A general purpose automatic mesh generation using shape recognition technique / H. Takahashi, H. Shimizu // *ASME Computers in Engineering*. – 1991. – Vol. 1. – P. 519-526.
38. Takahashi H. A Three-Dimensional Automatic Mesh Generation System Using Shape Recognition Technique / H. Takahashi, H. Shimizu, H. Moriyama, Y. Yamashita, N. Chiba // *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*. – 1993. – Vol. 59. – No 560. – Series A. – P. 1161-1167.
39. Müller-Hannemann M. High quality quadrilateral surface meshing without template restrictions: a new approach based on network flow techniques / M. Müller-Hannemann // *The International Journal of Computational Geometry and Applications*. – 1999. – Vol. 10, iss. 3. – P. 285-307.
40. Jablonowski C. Block-structured adaptive meshes and reduced grids for atmospheric general circulation models / C. Jablonowski, R. C. Oehmke, Q. F. Stout // *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. – 2009. – Vol. 367. – P. 4497-4522.
41. Zheng J. Z. X. Block-Based Adaptive Mesh Refinement Finite-volume Scheme for Hybrid Multi-Block Meshes / J. Z. X. Zheng, C. P. T. Groth // *Seventh International Conference on Computational Fluid Dynamics (ICCFD7): International Conference, Big Island, Hawaii, July 9-13, 2012: proceedings*. – Hawaii: 2012. – P. 1-19.
42. Ahusborde E. A 2D Block-structured Mesh Partitioner for Accurate Flow Simulations on Non-rectangular Geometries / E. Ahusborde, S. Glockner // *Computers & Fluids*. – 2011. – Vol. 43. – P. 2-13.
43. Steensland J. A partitioner-centric model for structured adaptive mesh refinement partitioning trade-off optimization: Part I / J. Steensland, J. Ray // *The International Journal of High Performance Computing Applications*. – 2005. – Vol. 19. – No 4. – P. 409-422.

44. Steensland J. A partitioner-centric model for structured adaptive mesh refinement partitioning trade-off optimization: Part II / J. Steensland, J. Ray // *Parallel Processing Workshops : International Conference, Montreal, QC, Canada, 15-18 Aug 2004 : proceedings. – 2004. – P. 231-238.*

### REFERENCES

1. Thompson, J.F., Sony, B. and Weatherill, N. (1999), *Handbook of grid generation*, CRC Press, New York.
2. Gordon, W.N. and Hall, C.A. (1973), "Construction of curvilinear coordinate systems and application to mesh generation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 7, pp. 461-477.
3. Cook, W.A. (1974), "Body oriented (natural) co-ordinates for generating three dimensional meshes", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 8, pp. 27-43.
4. Haber, R., Shephard, M.S., Abel, J.F., Gallagher, R.H. and Greenberg, D.P. (1982), "A general two-dimensional, graphical finite element preprocessor utilizing discrete transfinite mapping", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 17, pp. 1015-1044.
5. Haber, R. and Abel, J.F. (1982), "Discrete transfinite mappings for description and meshing of three-dimensional surfaces using interactive computer graphics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 18, pp. 41-66.
6. Eiseman, P.R. (1979), "A multi-surface method of coordinate generation", *Journal of Computational Physics*, vol. 33, iss. 1, pp. 118-150.
7. Fletcher, C. (1991), *Computational techniques for fluid dynamics*, Springer, Berlin.
8. Floater, M.S. (1997), "Parametrization and smooth approximation of surface triangulations", *Computer Aided Geometric Design*, vol. 14, iss. 3, pp. 231-250.
9. Floater, M.S., Hormann, K. and Kós, G. (2006), "A general construction of barycentric coordinates over convex polygons", *Advances in Computational Mathematics*, vol. 24, iss. 1, pp. 311-331.
10. Meyer, M., Barr, A., Lee, H. and Desbrun, M. (2002), "Generalized barycentric coordinates on irregular polygons", *Journal of Graphics Tools*, vol. 7, iss. 1, pp. 13-22.
11. Warren, J. (1999), "Barycentric coordinates for convex polytopes", *Advances in Computational Mathematics*, vol. 6, iss. 1, pp. 97-108.
12. Akinlar, M.A., Salako, S. and Liao, G. (2011), "A Method for Orthogonal Grid Generation", *General Mathematics Notes*, vol. 3, no. 1, pp. 55-72.
13. Martyushov, S.N. (1995), "Calculation of spatial flow problems using TVD Harten scheme", *Vychislitel'nye tekhnologii*, vol. 14, no. 12, pp. 219-228.
14. Martyushov, S.N. (1997), "Construction of two- and three-dimensional grids for problems of gas dynamics using the Poisson equation", *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika*, no. 4, pp. 108-110.
15. Martyushov, S.N. and Martyushova, Ya.G. (2004), "Numerical simulation of jet flows using the finite volume method on the basis of second order accuracy TVD-scheme", *Vychislitel'nye tekhnologii*, vol. 9, no. 4, pp. 57-65.
16. Martyushov, S.N. and Martyushova, Ya.G. (2008), "Numerical simulation of gas mixtures detonations using the finite volume method", *Vychislitel'nye tekhnologii*, vol. 13, no. 1, pp. 88-98.
17. Ashrafizadeh, A. and Raithby, G.D. (2006), "Direct Design Solution of the Elliptic Grid Generation Equations", *Numerical Heat Transfer*, vol. 50, pp. 217-230.
18. Ashrafizadeh, A. and Jalalabadi, R. (2011), "Structured Grid Generation Via Constraint on Displacement of Internal Nodes", *International Journal of Basic & Applied Science*, vol. 11, no. 4, pp. 79-87.
19. Zhang, Y., Jia, Y. and Wang, S.S.Y. (2004), "2D Nearly Orthogonal Mesh Generation", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 46, iss. 7, pp. 685-707.
20. Zhang, Y., Jia, Y. and Wang, S.S.Y. (2006), "2D Nearly Orthogonal Mesh Generation with Controls of Distortion Function", *Journal of Computational Physics*, vol. 218, iss. 2, pp. 549-571.
21. Zhang, Y., Jia, Y. and Wang, S.S.Y. (2006), "Structured Mesh Generation with Smoothness Controls", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 51, iss. 11, pp. 1255-1276.

22. Lehtimaki, R. (2000), "An Algebraic Boundary Orthogonalization Procedure for Structured Grids", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 32, iss. 5, pp. 605-618.
23. Zhou, Q. (1998), "A Simple Grid Generation Method", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 26, iss. 6, pp. 713-724.
24. Yerry, M.A. and Shephard, M.S. (1983), "A modified quadtree approach to finite element mesh generation", *IEEE Computer Graphics and Applications*, vol. 3, iss. 1, pp. 39-46.
25. Baehmann, P.L., Wittchen, S.L., Shephard, M.S., Grice, K.R. and Yerry, M.A. (1987), "Robust, geometrically based, automatic two-dimensional mesh generation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 24, iss. 6, pp. 1043-1078.
26. Liang, X., Ebeida, M.S. and Zhang, Y. (2010) "Guaranteed-quality all-quadrilateral mesh generation with feature preservation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, pp. 2072-2083.
27. Yiu, K.F.C., Greaves, D.M., Cruz, S., Saalehi, A. and Borthwick, A.G.L. (1996), "Quadtree grid generation: information handling, boundary fitting and CFD applications", *Computers & Fluids*, vol. 25, iss. 8, pp. 759-769.
28. Ito, Y., Shih, A.M. and Soni, B.K. (2009), "Octree-based reasonable-quality hexahedral mesh generation using a new set of refinement templates", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 77, pp. 1809-1833.
29. Kolšek, T., Šubelj, M. and Duhovnik, J. (2003), "Generation of block-structured grids in complex computational domains using templates", *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 39, pp. 1139-1154.
30. Miranda, A.C.O. and Martha, L.F. (2015), "Hierarchical template-based quadrilateral mesh generation", *Engineering with Computers*, vol. 31, pp. 1-15.
31. Yerry, M.A. and Shephard, M.S. (1984), "Automatic three-dimensional mesh generation by the modified-octree technique", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 20, iss. 11, pp. 1965-1990.
32. Zhang, H. and Zhao, G. (2007), "Adaptive hexahedral mesh generation based on local domain curvature and thickness using a modified grid-based method", *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 43, iss. 9, pp. 691-704.
33. Quadros, W.R., Ramaswami, K., Prinz, F.B. and Gurumoorthy, B. (2004), "LayTracks: a new approach to automated geometry adaptive quadrilateral mesh generation using medial axis transform", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 61, iss. 2, pp. 209-237.
34. Tam, T.K.H. and Armstrong, C.G. (1991), "2D finite element mesh generation by medial axis subdivision", *Advances in Engineering Software and Workstations*, vol. 13, no. 5-6, pp. 313-324.
35. Guoy, D. and Erickson, J. (2004), "Automatic Blocking Scheme for Structured Meshing in 2D Multiphase Flow Simulation", *Proceedings of the 13th International Meshing Roundtable*, Williamsburg, Virginia, USA, September 19-22, 2004, pp. 121-132.
36. Taghavi, R. (2000), "Automatic block decomposition using fuzzy logic analysis", *Proceedings of the 9th International meshing roundtable*, New Orleans, Louisiana, USA, 2-5 October 2000, pp. 187-192.
37. Takahashi, H. and Shimizu, H. (1991), "A general purpose automatic mesh generation using shape recognition technique", *ASME Computers in Engineering*, vol. 1, pp. 519-526.
38. Takahashi, H., Shimizu, H., Moriyama, H., Yamashita, Y. and Chiba, N. (1993), "A Three-Dimensional Automatic Mesh Generation System Using Shape Recognition Technique", *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, vol. 59, no. 560, series A, pp. 1161-1167.
39. Müller-Hannemann, M. (1999), "High quality quadrilateral surface meshing without template restrictions: a new approach based on network flow techniques", *The International Journal of Computational Geometry and Applications*, vol. 10, iss. 3, pp. 285-307.
40. Jablonowski, C., Oehmke, R.C. and Stout, Q.F. (2009), "Block-structured adaptive meshes and reduced grids for atmospheric general circulation models", *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, vol. 367, pp. 4497-4522.
41. Zheng, J.Z.X. and Groth, C.P.T. (2012), "Block-Based Adaptive Mesh Refinement Finite -vol. Scheme for Hybrid Multi-Block Meshes", *Proceedings of the Seventh International Conference on Computational Fluid Dynamics (ICCFD7)*, Big Island, Hawaii, July 9-13, 2012, pp. 1-19.

42. Ahusborde, E. and Glockner, S. (2011), "A 2D Block-structured Mesh Partitioner for Accurate Flow Simulations on Non-rectangular Geometries", *Computers & Fluids*, vol. 43, pp. 2-13.
43. Steensland, J. and Ray, J. (2005), "A partitioner-centric model for structured adaptive mesh refinement partitioning trade-off optimization: Part I", *The International Journal of High Performance Computing Applications*, vol. 19, no. 4, pp. 409-422.
44. Steensland, J. and Ray, J. (2004), "A partitioner-centric model for structured adaptive mesh refinement partitioning trade-off optimization: Part II", *Proceedings of Parallel Processing Workshops*, Montreal, QC, Canada, 15-18 Aug 2004, pp. 231-238.

УДК 519.17

## КРАТКИЙ ОБЗОР МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ ГРАЦИОЗНЫХ ГРАФОВ

Шерман З. А., аспирант

*Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины,  
просп. Академика Глушкова, 40, Киев, 03680 МСП, Украина*

sherman.zoya@rambler.ru

В данной работе предложен краткий обзор методов построения грациозной разметки деревьев, а также других классов графов с целью их систематизации. Выделены частные конструктивные методы для деревьев. Детально описан один из универсальных методов нахождения грациозной разметки графов, в основе которого лежат алгоритмы линейного целочисленного программирования. Рассмотрены методы с аналитическим подходом для графов, порожденных циклами.

*Ключевые слова: грациозная разметка, метод переноса ветвей и ребер, метод  $\Delta$ -построения, целочисленное программирование, циклы с хордами.*

## КОРОТКИЙ ОГЛЯД МЕТОДІВ ПОБУДОВИ ГРАЦІЙНОЇ РОЗМІТКИ ГРАФІВ

Шерман З. О., аспірант

*Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України,  
просп. Академіка Глушкова, 40, Київ, 03680 МСП, Україна*

sherman.zoya@rambler.ru

У наведеній роботі запропоновано огляд методів граційної розмітки дерев, а також інших класів графів з метою їх систематизації. Виділені приватні конструктивні методи для дерев. Детально описаний один з універсальних методів знаходження граційної розмітки графів, що має за основу алгоритми лінійного цілочисельного програмування. Розглянуті методи з аналітичним підходом для графів, породжених циклами.

*Ключові слова: граційна розмітка, метод перенесення гілок і ребер, метод  $\Delta$ -побудови, цілочисельне програмування, цикли з хордами.*

## A BRIEF REVIEW OF GRACEFUL GRAPHS CONSTRUCTION METHODS

Sherman Z. O.

*V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of National Academy of Sciences of Ukraine,  
40 Glushkov ave., Kyiv, Ukraine, 03187*

sherman.zoya@rambler.ru

The paper presents a brief review of methods for constructing graceful labeling of trees, as well as other classes of graphs for their systematization. For trees among the most famous and used methods those that are developing and have not lost their relevance are highlighted. They are method of transferring branches, edges and  $\Delta$ -construction method. Section 3 describes in detail one of the universal methods of finding a graceful labeling of small orders graphs. The basis of this method is in linear integer programming algorithms. Special attention in this paper is given to publications which deal with graphs generated by cycles. They all have a general similarity – analytical approach in labeling construction.