

УДК 539.3

## МІЖФАЗНА ЕЛЕКТРИЧНО ТА МАГНІТНО ПРОНИКНА ТРІЩИНА В П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОМУ/П'ЄЗОМАГНІТНОМУ БІМАТЕРІАЛІ

Гриневич А. А., Лобода В. В., д. ф.-м. н., професор

*Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара,  
просп. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49000, Україна*

alina.grynevych@gmail.com, loboda@mail.dsu.dp.ua

Пропонується точний аналітичний підхід до дослідження плоскої деформації п'єзоелектричного/п'єзомагнітного біматеріалу з електродованою і магнітно проникною електрично зарядженою тріщиною, розташованою на межі поділу його компонент. Вважається, що на нескінченності задано поле нормальних та дотичних напружень, електричне і магнітне поля, паралельні до берегів тріщини. Розглядається відкрита тріщина, для якої сформульована задача Гільберта. Її точний розв'язок отримано в замкнутому виді. Проведена числова ілюстрація одержаних розв'язків для різних значень електричного поля на нескінченності. Показано, що магнітне поле тріщини не впливає на електромеханічні характеристики в околі тріщини, та досліджено залежність цих характеристик від механічного навантаження та електричного поля.

*Ключові слова: електрично заряджена міжфазна тріщина, п'єзоелектричний/п'єзомагнітний біматеріал, магнітна індукція.*

## МЕЖФАЗНАЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИ И МАГНИТНО ПРОНИКАЮЩАЯ ТРЕЩИНА В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ/ПЬЕЗОМАГНИТНОМ БИМАТЕРИАЛЕ

Гриневич А. А., Лобода В. В., д. ф.-м. н., профессор

*Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара,  
просп. Гагарина, 72, г. Днепропетровск, 49000, Украина*

alina.grynevych@gmail.com, loboda@mail.dsu.dp.ua

Предлагается точный аналитический подход к исследованию плоской деформации пьезоэлектрического/пьезомагнитного биматериала с электродированой и магнитно проницаемой электрически заряженной трещиной, расположенной на границе раздела его компонент. Считается, что на бесконечности задано поле нормальных и касательных напряжений, электрическое и магнитное поля, параллельные к берегам трещины. Рассматривается открытая трещина, для которой сформулирована задача Гильберта. Её точное решение найдено в замкнутом виде. Проведена численная иллюстрация полученных решений для разных значений электрического поля на бесконечности. Показано, что магнитное поле трещины не влияет на электромеханические характеристики в окрестности трещины, и исследовано зависимость этих характеристик от механического нагружения и электрического поля.

*Ключевые слова: электрически заряженная межфазная трещина, пьезоэлектрический/пьезомагнитный биматериал, магнитная индукция.*

## AN INTERFACE ELECTRICALLY AND MAGNETICALLY PERMEABLE CRACK IN PIEZOELECTRIC/PIEZOMAGNETIC BIMATERIAL

Grynevych A. A., Loboda V. V.

*Dnipropetrovsk National University,  
ave. Gagarin, 72, Dnepropetrovsk, 49000, Ukraine*

alina.grynevych@gmail.com, loboda@mail.dsu.dp.ua

Exact analytical approach for plane stain investigation of piezoelectric/piezomagnetic bimaterial with an electroded and magnetically permeable electrically conducting crack located at the interface between its components is proposed. It is assumed that a normal and shear stresses field, the electric and magnetic fields paralleled to the crack faces are given at infinity. An open crack is considered, for which Hilbert problem has been derived. Its exact solution has been obtained in a closed form. A numerical illustration of the obtained solutions were done for different values of the electric field at infinity. It is shown that the magnetic field does not affect on the crack electromechanical characteristics, and the dependence of these parameters on the mechanical load and electric field were investigated.

*Key words: electrically conducting interface crack, piezoelectric/piezomagnetic bimaterial, magnetic induction.*

## ВСТУП

Волокнисті та ламіновані композити, виготовлені з п'єзоелектричних/п'єзомагнітних матеріалів, проявляють магнітоелектричний ефект, який відсутній в однофазних п'єзоелектричних чи п'єзомагнітних матеріалах. Вони знайшли широке інженерне застосування в смарт-структурах, наприклад, датчики, магнітні пристрої пам'яті та в інших галузях СВЧ: електронних, оптико-електронних та електронних приборів. Ці прилади мають звичайно шарову структуру; тому інтерфейсні відшарування можуть з'явитися в процесі виробництва чи при експлуатації таких приладів. Ці відшарування можуть призвести до появи міжфазних тріщин, які є найбільш небезпечним видом дефектів у таких структурах, і є основною причиною їх руйнування. Дуже часто м'які електроди можуть бути розташовані вздовж границі поділу двох п'єзоелектричних/п'єзомагнітних матеріалів. Розшарування таких електродів зазвичай призводить до появи інтерфейсних тріщин, які мають визначений електричний заряд. Більш того, електроди можуть бути виготовлені з сегнетоелектричних матеріалів з визначеними магнітними властивостями, такими, як залишкова індукція. Отже, дослідження електрично заряджених електрично провідних тріщин, що мають визначену магнітну залишкову індукцію, дуже важливо для кращого розуміння та прогнозування поведінки та відмови п'єзоелектричних/п'єзомагнітних приладів.

У роботі [1] розглядалася проблема електричного поля навколо електрично провідної тріщини в діелектриках. Проблема електрично провідної тріщини в однорідному п'єзоелектричному матеріалі була розглянута [2-4], а така ж тріщина між двома різними п'єзоелектричними матеріалами була розглянута [5] в рамках відкритої моделі тріщини.

Тим не менш, наскільки відомо, електропровідна міжфазна тріщина в п'єзоелектричному біматеріалі, яка має визначений електричний заряд і магнітну залишкову індукцію, не вивчена, не дивлячись на можливість появи значних напружень для таких тріщин під дією електричного та магнітного полів. Указана проблема і розглядається в нашій роботі з метою аналізу впливу електричних та магнітних полів на особливості деформування п'єзоелектромагнітних елементів з міжфазними тріщинами.

## ЗАГАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ОСНОВНИХ РІВНЯНЬ

У прямокутній системі координат  $x_j$  ( $j=1,2,3$ ) рівняння стану для пружного матеріалу, які враховують його п'єзоелектричні та п'єзомагнітні властивості, можуть бути записані у вигляді:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = c_{ijkl}\gamma_{kl} - e_{ij}E_l - h_{ij}H_l, \\ D_i = e_{ikl}\gamma_{kl} + \alpha_{il}E_l + d_{il}H_l, \\ B_i = h_{ikl}\gamma_{kl} + d_{il}E_l + \mu_{il}H_l, \end{cases} \quad (1)$$

де  $\sigma_{ij}$ ,  $\gamma_{ij}$  – відповідно поля механічних напружень та деформації;  $D_i$ ,  $B_i$  – відповідно поля електричної та магнітної індукції;  $E_i$ ,  $H_i$  – відповідно компоненти електричного та магнітного полів. Також  $c_{ijkl}$ ,  $e_{ikl}$ ,  $h_{ikl}$ ,  $d_{il}$  – відповідно компоненти пружної, п'єзоелектричної, п'єзомагнітної та магнітоелектричної матриць;  $\alpha_{il}$ ,  $\mu_{il}$  – діелектрична та магнітна проникність;  $i, j, k, l$  набувають значення  $\{1,2,3\}$  і приймається підсумовування за індексами, що повторюються.

Рівняння рівноваги за відсутності в середовищі масових сил, електричних та магнітних зарядів, такі:

$$\sigma_{ij,i} = 0, \quad D_{i,i} = 0, \quad B_{i,i} = 0, \quad (2)$$

де кома означає похідні по відповідним координатним змінним.

Вирази для деформації, електричного та магнітного полів такі:

$$\gamma_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad E_i = -\varphi_{,i}, \quad H_i = -\psi_{,i}, \quad (3)$$

де  $u_i$  – компоненти механічного переміщення,  $\varphi$ ,  $\psi$  – відповідно електричний та магнітний потенціали.

З (1)-(3) отримуємо рівняння:

$$\begin{cases} (c_{ijkl}u_k + e_{ij}\varphi + h_{ij}\psi)_{,li} = 0, \\ (e_{ikl}u_k - \alpha_{il}\varphi - d_{il}\psi)_{,li} = 0, \\ (h_{ikl}u_k - d_{il}\varphi - \mu_{il}\psi)_{,li} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Введемо вектори:

$$\mathbf{V} = \{u_1, u_2, u_3, \varphi, \psi\}^T, \quad \mathbf{t} = \{\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}, D_3, B_3\}^T. \quad (5)$$

Оскільки всі поля не залежать від координати  $x_2$ , то розв’язок рівнянь (4) відповідно до методу, запропонованого в [6] для анізотропного матеріалу, може бути представлено у вигляді [7]:

$$\mathbf{V} = \mathbf{af}(z), \quad (6)$$

де  $z = x_1 + px_3$ , вектор  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5]^T$  знаходиться з рівняння:

$$[\mathbf{Q} + p(\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}^T) + p^2\mathbf{T}]\mathbf{a} = 0, \quad (7)$$

а елементи матриць  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{\Pi}$  та  $\mathbf{T}$  розмірності  $5 \times 5$  визначаються як

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1121} & c_{1131} & e_{111} & h_{111} \\ c_{1211} & c_{1221} & c_{1231} & e_{121} & h_{121} \\ c_{1311} & c_{1321} & c_{1331} & e_{131} & h_{131} \\ e_{111} & e_{121} & e_{131} & -\alpha_{11} & -d_{11} \\ h_{111} & h_{121} & h_{131} & -d_{11} & -\mu_{11} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} c_{1112} & c_{1122} & c_{1132} & e_{211} & h_{211} \\ c_{1212} & c_{1222} & c_{1232} & e_{221} & h_{221} \\ c_{1312} & c_{1322} & c_{1332} & e_{231} & h_{231} \\ e_{112} & e_{122} & e_{132} & -\alpha_{12} & -d_{12} \\ h_{112} & h_{122} & h_{132} & -d_{12} & -\mu_{12} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_{2112} & c_{1122} & c_{1132} & e_{212} & h_{212} \\ c_{2212} & c_{1222} & c_{1232} & e_{222} & h_{222} \\ c_{2312} & c_{1322} & c_{1332} & e_{232} & h_{232} \\ e_{212} & e_{222} & e_{232} & -\alpha_{22} & -d_{22} \\ h_{212} & h_{222} & h_{232} & -d_{22} & -\mu_{22} \end{bmatrix}.$$

Ненульовий розв’язок системи (7) існує, якщо  $p$  є коренем рівняння:

$$\det[\mathbf{Q} + p(\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}^T) + p^2\mathbf{T}] = 0. \quad (8)$$

Оскільки рівняння (8) не має дійсних коренів [7], позначимо корені цього рівняння з додатною уявною частиною через  $p_\alpha$  і відповідні власні вектори (6) через  $\mathbf{a}_\alpha$  (нижній індекс  $\alpha$  тут і далі набуває значення від 1 до 5). Тоді загальний розв’язок рівнянь (4) може бути поданий у вигляді [7]:

$$\mathbf{V} = \mathbf{Af}(z) + \overline{\mathbf{Af}}(\bar{z}), \quad (9)$$

де  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5]$  – матриця, складена з власних векторів системи (7),  $\mathbf{f}(z) = [f_1(z_1), f_2(z_2), f_3(z_3), f_4(z_4), f_5(z_5)]^T$  – довільна аналітична вектор-функція,  $z_\alpha = x_1 + p_\alpha x_3$ , а риска означає комплексно-спряжену величину.

З використанням рівнянь (1) вектор  $\mathbf{t}$ , введений в (5), може бути поданий у вигляді:

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}\mathbf{f}'(z) + \overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{f}}'(\bar{z}), \quad (10)$$

де матриця  $\mathbf{B}$  розмірності  $5 \times 5$  визначається як

$$\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5],$$

$$\mathbf{b}_\alpha = (\mathbf{\Pi}^T + p_\alpha \mathbf{T})\mathbf{a}_\alpha \text{ (сумування по } \alpha \text{ не проводиться),}$$

$$\mathbf{f}'(z) = \left[ \frac{df_1(z_1)}{dz_1}, \frac{df_2(z_2)}{dz_2}, \frac{df_3(z_3)}{dz_3}, \frac{df_4(z_4)}{dz_4}, \frac{df_5(z_5)}{dz_5} \right]^T.$$

Далі, вводячи вектори  $\mathbf{L} = [u'_1, u'_2, u'_3, D_3, B_3]^T$  та  $\mathbf{P} = [\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}, E_1, H_1]^T$  на основі (9) та (10), будемо представлення:

$$\mathbf{L} = \mathbf{M}\mathbf{f}'(z) + \overline{\mathbf{M}}\overline{\mathbf{f}}'(\bar{z}),$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{N}\mathbf{f}'(z) + \overline{\mathbf{N}}\overline{\mathbf{f}}'(\bar{z}),$$

де матриці  $\mathbf{M}$  та  $\mathbf{N}$  знаходяться за допомогою перетворення матриць  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  і мають вигляд:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ b_{4j} \\ b_{5j} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ -a_{4j} \\ -a_{5j} \end{bmatrix}.$$

Проводячи далі аналіз, аналогічний до статті [8], отримуємо

$$\langle \mathbf{L}(x_1) \rangle = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1), \quad (11)$$

$$\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{S}\mathbf{W}^+(x_1) - \overline{\mathbf{S}}\mathbf{W}^-(x_1), \quad (12)$$

де  $\mathbf{S} = \mathbf{N}^{(1)}\mathbf{D}^{-1}$ ,  $\mathbf{D} = \mathbf{M}^{(1)} - \overline{\mathbf{M}}^{(2)}(\overline{\mathbf{N}}^{(2)})^{-1}\mathbf{N}^{(1)}$ .

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається плоска деформація біматеріалу, складеного з півпросторів  $x_3 > 0$  та  $x_3 < 0$ , поляризованих за напрямком осі  $x_3$  і зчеплених по інтерфейсу  $x_3 = 0$ . На відріжку  $x_1 \in (c, b)$  інтерфейсу розташована електродована тріщина (рис. 1), яка вважається відкритою, електрично- та магнітнопровідною, тобто на її берегах електричний та магнітний потенціали розподіляються рівномірно, а значить електричне та магнітне поля мають вигляд

$$E_1^{(1)}(x_1, 0) = E_1^{(2)}(x_1, 0) = 0 \quad \text{та} \quad H_1^{(1)}(x_1, 0) = H_1^{(2)}(x_1, 0) = 0 \quad \text{для} \quad x_1 \in (c, b). \quad (13)$$

Крім того, на тріщині задано сумарний електричний заряд величини  $D_0$  та сумарну магнітну індукцію  $B_0$ . Така ситуація часто виникає на практиці внаслідок розшарування механічно

м'якого внутрішнього електроду, виготовленого із феромагнітного матеріалу. При цьому електрод може бути попередньо намагніченим та підключеним до позитивного або негативного електричного джерела живлення. У таких випадках треба враховувати ненульові значення  $D_0$  та  $B_0$ . У часткових випадках, коли електрод заземлено і його намагніченість відсутня, відповідні значення  $D_0$  або  $B_0$  треба прийняти рівними нулю.

Вважаємо також, що на нескінченості задані рівномірно розподілені механічні напруження і електричне та магнітне поля

$$\sigma_{13}^\infty = \tau^\infty, \quad \sigma_{33}^\infty = \sigma^\infty, \quad E_1^\infty = e^\infty, \quad H_1^\infty = h^\infty. \quad (14)$$

Окрім (13), інші умови на інтерфейсі  $x_1 \in (c, b)$  (рис. 1) набувають вигляду:

$$\sigma_{i3}^{(1)}(x_1, 0) = \sigma_{i3}^{(2)}(x_1, 0), \quad E_1^{(1)}(x_1, 0) = E_1^{(2)}(x_1, 0), \quad H_1^{(1)}(x_1, 0) = H_1^{(2)}(x_1, 0) \quad \text{для } x_1 \in L, \quad (15)$$

$$D_3^{(1)}(x_1, 0) = D_3^{(2)}(x_1, 0), \quad u_i^{(1)}(x_1, 0) = u_i^{(2)}(x_1, 0), \quad B_3^{(1)}(x_1, 0) = B_3^{(2)}(x_1, 0) \quad \text{для } x_1 \in L, \quad (16)$$

$$\sigma_{i3}^{(m)}(x_1, 0) = 0 \quad \text{для } x_1 \in (c, b), \quad (17)$$

де  $m=1, 2$ ,  $u_i$ ,  $E_i$ ,  $H_i$ ,  $\sigma_{ij}$ ,  $D_i$ ,  $B_i$  – відповідно компоненти вектора переміщень, електричного та магнітного полів, механічних напружень, електричної та магнітної індукції;  $i, j = 1, 3$ ,  $L = (-\infty, \infty) \setminus (c, b)$ .

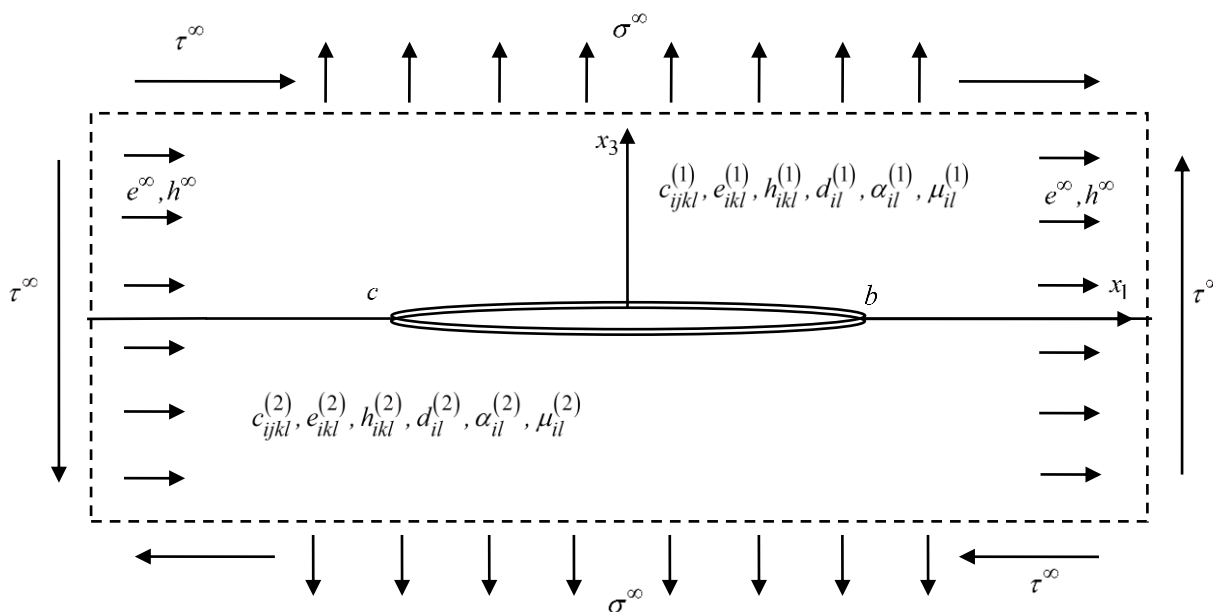


Рис. 1. Електро- та магнітно-провідна відкрита тріщина в біматеріалі

Оскільки розглядаємо задачу плоскої деформації, тому  $W_2$  виключаємо з розгляду. З цієї причини з розгляду виключаємо другі рядки та стовбці матриць та векторів у наступному аналізі.

Враховуючи, що  $\mathbf{W}^+(x_1) = \mathbf{W}^-(x_1) = \mathbf{W}(x_1)$  при  $x_1 \rightarrow \infty$ , отримуємо з (12) та (14) при  $x_1 \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}^\infty = (\mathbf{S} - \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{W}^\infty, \quad (18)$$

де  $\mathbf{P}^\infty = [\tau^\infty, \sigma^\infty, e^\infty, h^\infty]$ , та  $\mathbf{W}^\infty = \mathbf{W}(z)$  для  $z \rightarrow \infty$ .

З рівняння (18) отримуємо

$$\mathbf{W}^\infty = (\mathbf{S} - \bar{\mathbf{S}})^{-1} \mathbf{P}^\infty.$$

Задовольняючи граничним умовам на  $(c, b)$ , отримуємо:

$$\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = 0,$$

тоді

$$\mathbf{S}\mathbf{W}^+(x_1) - \bar{\mathbf{S}}\mathbf{W}^-(x_1) = 0 \quad \text{для } x_1 \in (c, b)$$

або

$$\mathbf{W}^+(x_1) - (\mathbf{S})^{-1} \bar{\mathbf{S}}\mathbf{W}^-(x_1) = 0 \quad \text{для } x_1 \in (c, b). \quad (19)$$

Розв'язок задачі лінійного спряження (19) може бути отриманий аналогічно [7], але ми розглядаємо інший підхід.

Розглянемо довільну однорядкову матрицю  $\mathbf{R} = [R_1, R_3, R_4, R_5]$ . На основі (12) маємо

$$\mathbf{R}\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{R}\mathbf{S}\mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{R}\bar{\mathbf{S}}\mathbf{W}^-(x_1). \quad (20)$$

Вводимо функцію

$$F(z) = \mathbf{T}\mathbf{W}(z), \quad (21)$$

де  $\mathbf{T} = [T_1, T_3, T_4, T_5] = \mathbf{R}\mathbf{S}$ .

Покладаючи  $\mathbf{R}\bar{\mathbf{S}} = -\gamma\mathbf{R}\mathbf{S}$ , рівняння (20) запишемо у вигляді:

$$\mathbf{R}\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = F^+(x_1) + \gamma F^-(x_1), \quad (22)$$

де  $\gamma$  та  $\mathbf{R}^T$  – власне значення та власний вектор системи:

$$(\gamma\mathbf{S}^T + \bar{\mathbf{S}}^T)\mathbf{R}^T = 0. \quad (23)$$

Для найбільш важливого п'єзоелектричного/п'єземагнітного матеріалу  $\text{BaTiO}_3\text{-CoFe}_2\text{O}_4$  матриця  $\mathbf{S}$  має структуру

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} i s_{11} & s_{13} & i s_{14} & i s_{15} \\ s_{31} & i s_{33} & s_{34} & s_{35} \\ i s_{41} & s_{43} & i s_{44} & i s_{45} \\ i s_{51} & s_{53} & i s_{54} & i s_{55} \end{bmatrix},$$

де всі  $s_{jk}$  дійсні та  $s_{31} = -s_{13}$ ,  $s_{14} = -s_{41}$ ,  $s_{43} = s_{34}$ ,  $s_{51} = -s_{15}$ ,  $s_{45} = s_{54}$ ,  $s_{35} = s_{53}$ . У цьому випадку корені рівняння  $\det(\gamma\mathbf{S}^T + \bar{\mathbf{S}}^T) = 0$  мають вигляд:

$$\gamma_1 = \frac{1 + \delta}{1 - \delta}, \quad \gamma_3 = \gamma_1^{-1}, \quad \gamma_4 = 1, \quad \gamma_5 = 1, \quad (24)$$

де

$$\delta^2 = \frac{-s_{51}t_1 + s_{53}t_3 - s_{54}t_5 + s_{55}t_7}{s_{51}t_2 + s_{54}t_4 - s_{55}t_6}, \quad t_1 = s_{13}s_{34}s_{45} + s_{14}s_{35}s_{43} - s_{15}s_{34}s_{43} - s_{13}s_{35}s_{44},$$

$$\begin{aligned}
 t_2 &= -s_{15}s_{33}s_{44} + s_{14}s_{33}s_{45}, & t_3 &= s_{11}s_{34}s_{45} + s_{14}s_{35}s_{41} + s_{15}s_{31}s_{44} - s_{15}s_{34}s_{41} - s_{14}s_{31}s_{45} - s_{35}s_{44}s_{11}, \\
 t_4 &= -s_{11}s_{33}s_{45} - s_{15}s_{33}s_{41}, & t_5 &= s_{13}s_{35}s_{41} + s_{15}s_{31}s_{43} - s_{11}s_{35}s_{43} - s_{45}s_{13}s_{31}, \\
 t_6 &= -s_{11}s_{33}s_{44} + s_{41}s_{33}s_{14}, & t_7 &= s_{13}s_{41}s_{34} + s_{31}s_{43}s_{14} - s_{31}s_{13}s_{44} - s_{11}s_{34}s_{43}.
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Власний вектор  $\mathbf{R}_j^T = [R_{j1}, R_{j3}, R_{j4}, R_{j5}]^T$ , пов'язаний з власним значенням  $\gamma_j$  ( $j=1,3,4,5$ ), може бути знайдений з системи (23). Аналіз показує, що для  $\delta^2 > 0$  матриця  $\mathbf{R}$ , складена з власних векторів  $\mathbf{R}_j^T$ , має структуру:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} ir_{11} & 1 & ir_{14} & ir_{15} \\ ir_{31} & 1 & ir_{34} & ir_{35} \\ ir_{41} & 0 & i & 0 \\ ir_{51} & 0 & 0 & i \end{bmatrix},$$

де всі  $r_{jk}$  дійсні та  $r_{41} = -\frac{s_{43}}{s_{13}}$ ,  $r_{51} = -\frac{s_{53}}{s_{13}}$ , а  $r_{11}, r_{14}, r_{15}$  та  $r_{31}, r_{34}, r_{35}$  визначаються з системи (23)

для  $\gamma_1$  та  $\gamma_3$ , відповідно.

Чисельний аналіз показує, що для всіх п'єзоелектромагнітних керамік, поляризованих у напрямку  $x_3$ , нерівність  $\delta^2 > 0$  справедлива. Компоненти матриці

$$\mathbf{T} = \mathbf{RS}, \tag{26}$$

які складаються з однострокових матриць  $\mathbf{T}_j = [T_{j1}, T_{j3}, T_{j4}, T_{j5}] = \mathbf{R}_j \mathbf{S}$  ( $j=1,3,4,5$ ) для  $\delta^2 > 0$  можуть бути представлені у формі  $T_{j1} = t_{j1}$ ,  $T_{j3} = it_{j3}$ ,  $T_{j4} = t_{j4}$ ,  $T_{j5} = t_{j5}$ , де всі  $t_{jk}$  ( $j, k = 1,3,4,5$ ) є дійсними та  $t_{43} = 0$ ,  $t_{53} = 0$ .

Використовуючи співвідношення (21) та (22), ми отримуємо

$$\mathbf{R}_j \mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1), \tag{27}$$

де

$$F_j(z) = \mathbf{T}_j \mathbf{W}(z). \tag{28}$$

З останнього співвідношення витікає, що функції  $F_j(z)$  мають ті ж властивості, що і  $\mathbf{W}(z)$ . Зокрема, для граничних умов (15)-(17) вони аналітичні у всій площині за винятком області тріщини  $(c, b)$ . Тоді з (28) маємо

$$F_j(z) = t_{j1}W_1(z) + it_{j3}W_3(z) + t_{j4}W_4(z) + t_{j5}W_5(z).$$

Враховуючи представлення (11), з останнього рівняння отримуємо

$$t_{j1} \langle u_1'(x_1) \rangle + it_{j3} \langle u_3'(x_1) \rangle + t_{j4} \langle D_3(x_1) \rangle + t_{j5} \langle B_3(x_1) \rangle = F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1). \tag{29}$$

Розкриваючи далі ліву частину (27) та враховуючи структуру матриці  $\mathbf{R}$ , приходимо до співвідношення

$$ir_j \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) + r_{j3} \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + ir_{j4} E_1^{(1)}(x_1, 0) + ir_{j5} H_1^{(1)}(x_1, 0) = F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1), \tag{30}$$

де  $r_{ij}$  та  $t_{ij}$  ( $i, j = 1, 3, 4, 5$ ) – компоненти відомих матриць, а  $\gamma_j$  константи, які визначаються фізичними характеристиками матеріалів, причому  $r_{13} = r_{33} = r_{44} = r_{55} = 1$  та  $r_{43} = r_{45} = r_{53} = r_{54} = 0$ .

### РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Задовольняючи за допомогою представлень (30) граничним умовам (17), приходимо до таких задач лінійного спряження:

$$F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1) = 0 \quad \text{для } x_1 \in (c, b). \quad (31)$$

Використовуючи задані граничні умови на нескінченності (14), можемо записати:

$$F_j(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \tilde{\sigma}_j - i\tilde{\tau}_j, \quad (32)$$

де  $\tilde{\sigma}_j = \frac{r_{j3}\sigma^\infty}{g_j}$ ,  $\tilde{\tau}_j = -\frac{1}{g_j}(r_{j1}\tau^\infty + r_{j4}e^\infty + r_{j5}h^\infty)$ , ( $j = 1, 3, 4, 5$ ),  $g_k = 1 + \gamma_k$ , ( $k = 1, 3$ ),  $g_4 = g_5 = 2$ .

На основі (29), з урахуванням умов однозначності зміщень при обході контуру тріщини,

$$\int_c^b \langle u'_k(x_1) \rangle dx_1 = 0, \quad k = 1, 3,$$

і теореми Гауса, застосованої до контуру, співпадаючого з берегами тріщини,

$$\int_c^b \langle D_3(x_1) \rangle dx_1 = D_0, \quad \int_c^b \langle B_3(x_1) \rangle dx_1 = B_0 \quad (33)$$

отримуємо

$$\int_c^b \{F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1)\} dx_1 = t_{j4}D_0 + t_{j5}B_0, \quad j = 1, 3, 4, 5. \quad (34)$$

На основі [9] розв'язок задачі (31) знаходимо у вигляді

$$F_j(z) = \frac{c_{0j} + c_{1j}z}{\sqrt{(z-c)(z-b)}} \left( \frac{z-c}{z-b} \right)^{i\varepsilon_j}, \quad (35)$$

де  $\varepsilon_j = \frac{\ln(\gamma_j)}{2\pi}$ ,  $j = 1, 3, 4, 5$ .

Довільні константи  $c_{0j}$ ,  $c_{1j}$  ( $j = 1, 3, 4, 5$ ) знаходяться з умов на нескінченності (32), та додаткових умов (34), що забезпечують виконання умов однозначності переміщень та теорему Гауса. При цьому відомо [10], що умови (34) буде виконано, якщо коефіцієнт при  $z^{-1}$  в розкладенні  $F_j(z)$  на нескінченності дорівнює  $i(t_{j4}D_0 + t_{j5}B_0)/(2\pi)$ . Після розкладення  $F_j(z)$  на нескінченності та використання рівнянь (32) та (34), знаходимо:

$$F_j(z) = i \frac{t_{j4}D_0 + t_{j5}B_0}{2\pi} \chi_j(z) + (z - 2ib\varepsilon_j)(\tilde{\sigma}_j - i\tilde{\tau}_j) \chi_j(z), \quad j = 1, 3, 4, 5,$$

де  $\chi_j(z) = (z-c)^{\frac{1}{2}+i\varepsilon_j} (z-b)^{\frac{1}{2}-i\varepsilon_j}$ .



Оскільки  $F_j^+(x_1) = F_j^-(x_1) = F_j(x_1)$  ( $j = 1, 3, 4, 5$ ) для  $x_1 > b$ , то з рівняння (30) одержуємо формулу для  $\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)$ :

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) = \frac{1 + \gamma_1}{r_{13}} \operatorname{Re} F_1(x_1) \quad \text{для } x_1 > b. \quad (36)$$

Уявна частина системи рівнянь (30) формує СЛАР для визначення  $\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0)$ ,  $E_1^{(1)}(x_1, 0)$  та  $H_1^{(1)}(x_1, 0)$ :

$$\begin{cases} r_{11}\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) + r_{14}E_1^{(1)}(x_1, 0) + r_{15}H_1^{(1)}(x_1, 0) = (1 + \gamma_1) \operatorname{Im} F_1(x_1), \\ r_{41}\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) + r_{44}E_1^{(1)}(x_1, 0) + r_{45}H_1^{(1)}(x_1, 0) = 2 \operatorname{Im} F_4(x_1), \\ r_{51}\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) + r_{54}E_1^{(1)}(x_1, 0) + r_{55}H_1^{(1)}(x_1, 0) = 2 \operatorname{Im} F_5(x_1) \end{cases} \quad \text{для } x_1 > b,$$

з якої для  $x_1 > b$  одержуємо:

$$\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \frac{(1 + \gamma_1)(r_{44}r_{55} - r_{45}r_{54}) \operatorname{Im} F_1(x_1) + 2(r_{54}r_{15} - r_{14}r_{55}) \operatorname{Im} F_4(x_1) + 2(r_{14}r_{45} - r_{44}r_{15}) \operatorname{Im} F_5(x_1)}{\Delta_1}, \quad (37)$$

$$E_1^{(1)}(x_1, 0) = \frac{(1 + \gamma_1)(r_{45}r_{51} - r_{41}r_{55}) \operatorname{Im} F_1(x_1) + 2(r_{11}r_{55} - r_{15}r_{51}) \operatorname{Im} F_4(x_1) + 2(r_{41}r_{15} - r_{11}r_{45}) \operatorname{Im} F_5(x_1)}{\Delta_1}, \quad (38)$$

$$H_1^{(1)}(x_1, 0) = \frac{(1 + \gamma_1)(r_{41}r_{54} - r_{51}r_{44}) \operatorname{Im} F_1(x_1) + 2(r_{14}r_{51} - r_{11}r_{54}) \operatorname{Im} F_4(x_1) + 2(r_{11}r_{44} - r_{14}r_{41}) \operatorname{Im} F_5(x_1)}{\Delta_1}, \quad (39)$$

де  $\Delta_1 = r_{11}(r_{44}r_{55} - r_{54}r_{45}) + r_{41}(r_{54}r_{15} - r_{14}r_{55}) + r_{51}(r_{14}r_{45} - r_{15}r_{44})$ .

Оскільки  $F_j^-(x_1) = -\frac{1}{\gamma_j} F_j^+(x_1)$  ( $j = 1, 3, 4, 5$ ) для  $x_1 \in (c, b)$ , то з рівняння (29) одержуємо

СЛАР для визначення електро- та магнітнотехнічних факторів:

$$\begin{cases} t_{11} \langle u_1'(x_1) \rangle + it_{13} \langle u_3'(x_1) \rangle + t_{14} \langle D_3(x_1) \rangle + t_{15} \langle B_3(x_1) \rangle = \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1} F_1(x_1), \\ t_{41} \langle u_1'(x_1) \rangle + t_{44} \langle D_3(x_1) \rangle + t_{45} \langle B_3(x_1) \rangle = 2F_4(x_1), \\ t_{51} \langle u_1'(x_1) \rangle + t_{54} \langle D_3(x_1) \rangle + t_{55} \langle B_3(x_1) \rangle = 2F_5(x_1), \end{cases} \quad \text{для } x_1 \in (c, b). \quad (40)$$

З першого рівняння (40) похідна розкриття тріщини матиме вигляд:

$$\langle u_3'(x_1) \rangle = \frac{\gamma_1 + 1}{t_{13}\gamma_1} \operatorname{Im} F_1(x_1), \quad (41)$$

тобто розкриття тріщини на основі (41) записується у формі

$$\langle u_3(x_1) \rangle = \frac{\gamma_1 + 1}{t_{13}\gamma_1} \int_c^{x_1} \operatorname{Im} F_1(x_1) dx_1 \quad \text{для } x_1 \in (c, b). \quad (42)$$

Дійсні частини системи рівнянь (40) формують СЛАР для визначення  $\langle u_1'(x_1) \rangle$ ,  $\langle D_3(x_1) \rangle$  та  $\langle B_3(x_1) \rangle$ :

$$\begin{cases} t_{11} \langle u_1'(x_1) \rangle + t_{14} \langle D_3(x_1) \rangle + t_{15} \langle B_3(x_1) \rangle = \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1} F_1(x_1), \\ t_{41} \langle u_1'(x_1) \rangle + t_{44} \langle D_3(x_1) \rangle + t_{45} \langle B_3(x_1) \rangle = 2F_4(x_1), \\ t_{51} \langle u_1'(x_1) \rangle + t_{54} \langle D_3(x_1) \rangle + t_{55} \langle B_3(x_1) \rangle = 2F_5(x_1) \end{cases} \quad \text{для } x_1 \in (c, b).$$

З цієї системи для  $x_1 \in (c, b)$  отримуємо:

$$\langle u_1'(x_1) \rangle = \frac{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}(t_{44}t_{55} - t_{45}t_{54})\text{Re } F_1(x_1) + 2(t_{54}t_{15} - t_{14}t_{55})\text{Re } F_4(x_1) + 2(t_{14}t_{45} - t_{44}t_{15})\text{Re } F_5(x_1)}{\Delta_2}, \quad (43)$$

$$\langle D_3(x_1) \rangle = \frac{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}(t_{45}t_{51} - t_{41}t_{55})\text{Re } F_1(x_1) + 2(t_{11}t_{55} - t_{15}t_{51})\text{Re } F_4(x_1) + 2(t_{41}t_{15} - t_{11}t_{45})\text{Re } F_5(x_1)}{\Delta_2}, \quad (44)$$

$$\langle B_3(x_1) \rangle = \frac{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}(t_{41}t_{54} - t_{51}t_{44})\text{Re } F_1(x_1) + 2(t_{14}t_{51} - t_{11}t_{54})\text{Re } F_4(x_1) + 2(t_{11}t_{44} - t_{14}t_{41})\text{Re } F_5(x_1)}{\Delta_2}, \quad (45)$$

де  $\Delta_2 = t_{11}(t_{44}t_{55} - t_{54}t_{45}) + t_{41}(t_{54}t_{15} - t_{14}t_{55}) + t_{51}(t_{14}t_{45} - t_{15}t_{44})$ .

Тобто всі шукані компоненти  $\sigma_{33}$ ,  $\sigma_{13}$ ,  $E_1$ ,  $H_1$  вздовж інтерфейсу для  $x_1 > b$  визначені відповідно в (36), (37), (38), (39); розкриття ж тріщини  $\langle u_3 \rangle$  та стрибки компонент  $D_3$  і  $B_3$  для  $x_1 \in (c, b)$  – визначені формулами (43), (44) та (45) відповідно.

### ВІЗУАЛІЗАЦІЯ РЕЗУЛЬТАТІВ

Розглянемо вплив зовнішніх механічних, електричних та магнітних навантажень, а також загального електричного заряду тріщини та магнітної індукції на напруження, електричне та магнітне поля. Біматеріал складений з  $\text{BaTiO}_3\text{-CoFe}_2\text{O}_4$  композитів з об'ємною долею (Vf) п'єзоелектрика  $\text{BaTiO}_3$  рівного 0.5 (верхній матеріал) та 0.1 (нижній матеріал) [11] був вибраний для численних розрахунків. Для області тріщини вибиралось  $c = -0,01$  м та  $b = 0,01$  м.

На рис. 2 показано нормальне напруження на продовженні тріщини. Ці результати отримані для  $\sigma^\infty = 10$  МПа;  $\tau^\infty = 0.0$  Па,  $D_0 = 0.0$  Кл/м та  $B_0 = 1.0$  Н/А. Крім того, лінія I отримана для  $e^\infty = 0$ ,  $h^\infty = 0$ ; лінія II – для  $e^\infty = 0.4 \times 10^7$  В/м,  $h^\infty = 0$ ; лінія III – для  $e^\infty = 0$ ,  $h^\infty = -0,25 \times 10^6$  А/м. Можна побачити з отриманих результатів, що електричні та магнітні поля, а також загальний електричний заряд тріщини та сумарна магнітна індукція суттєво впливають на нормальне напруження на продовженні тріщини.

На рис. 3 для різних  $e^\infty$  та  $h^\infty$  наведені графіки зміни електричного поля для відкритої тріщини на її продовженні (I –  $e^\infty = 0$ ,  $h^\infty = 0$ ; II –  $e^\infty = 0.4 \times 10^7$  В/м,  $h^\infty = 0$ ; III –  $e^\infty = 0$ ,  $h^\infty = -0,25 \times 10^6$  А/м). На рис. 4 для різних значень  $e^\infty$  та  $h^\infty$  наведені відповідні графіки зміни стрибка  $\langle D_3(x_1) \rangle$  вздовж області тріщини (I –  $e^\infty = 0$ ,  $h^\infty = 0$ ; II –  $e^\infty = 0.4 \times 10^7$  В/м,  $h^\infty = 0$ ; III –  $e^\infty = 0$ ,  $h^\infty = -0,25 \times 10^6$  А/м).

З отриманих результатів видно, що електричні та магнітні поля мають значний вплив на шукані компоненти електричного поля та електричної індукції особливо біля вершини

тріщини. Слід також відзначити, що електричне поле  $E_1^{(1)}(x_1, 0)$  зростає дуже швидко по абсолютній величині в околі вершини тріщини. Поведінка стрибків електричного зміщення  $\langle D_3(x_1) \rangle$  через область тріщини продемонструвала їх суттєве зростання у вершинах тріщини через особливості в цих точках. Найбільше зростання по всій області тріщини спостерігається зі збільшенням модуля  $e^\infty$  при нульовому магнітному полі.

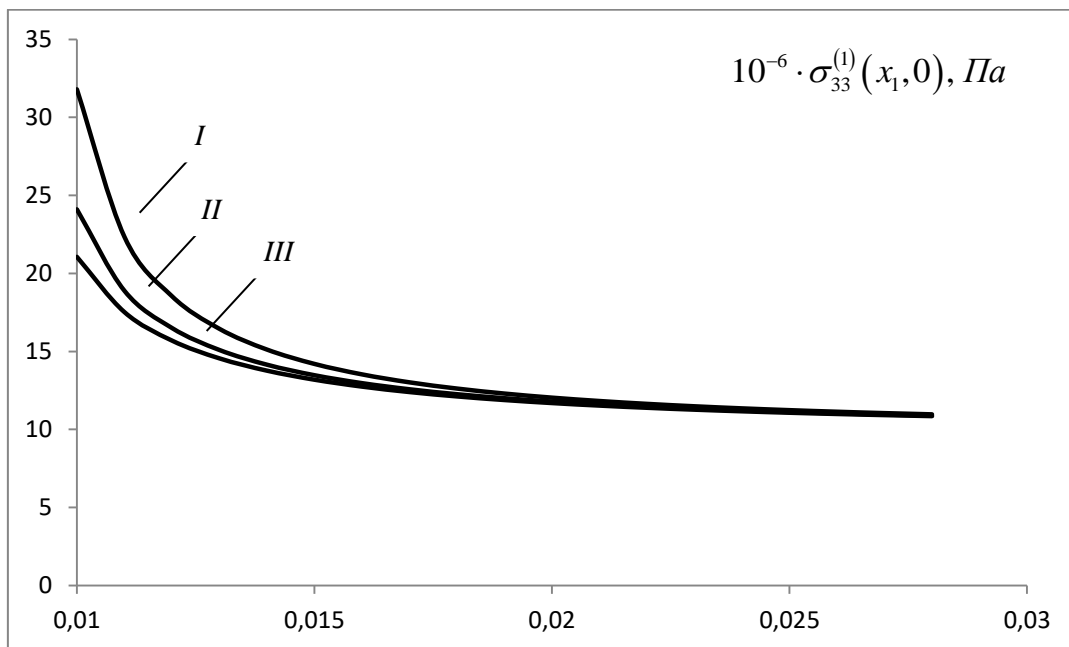


Рис. 2. Розподіл нормального напруження  $\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)$  на продовженні тріщини для біматеріалу Vf5/Vf1 за  $\sigma^\infty = 10^7$  Па,  $\tau^\infty = 0.0$  Па,  $D_0 = 0.0$  Кл/м,  $B_0 = 1.0$  Н/А, I –  $e^\infty = 0$ ,  $h^\infty = 0$ ; II –  $e^\infty = 0.4 \times 10^7$  В/м,  $h^\infty = 0$ ; III –  $e^\infty = 0$ ,  $h^\infty = -0.25 \times 10^6$  А/м

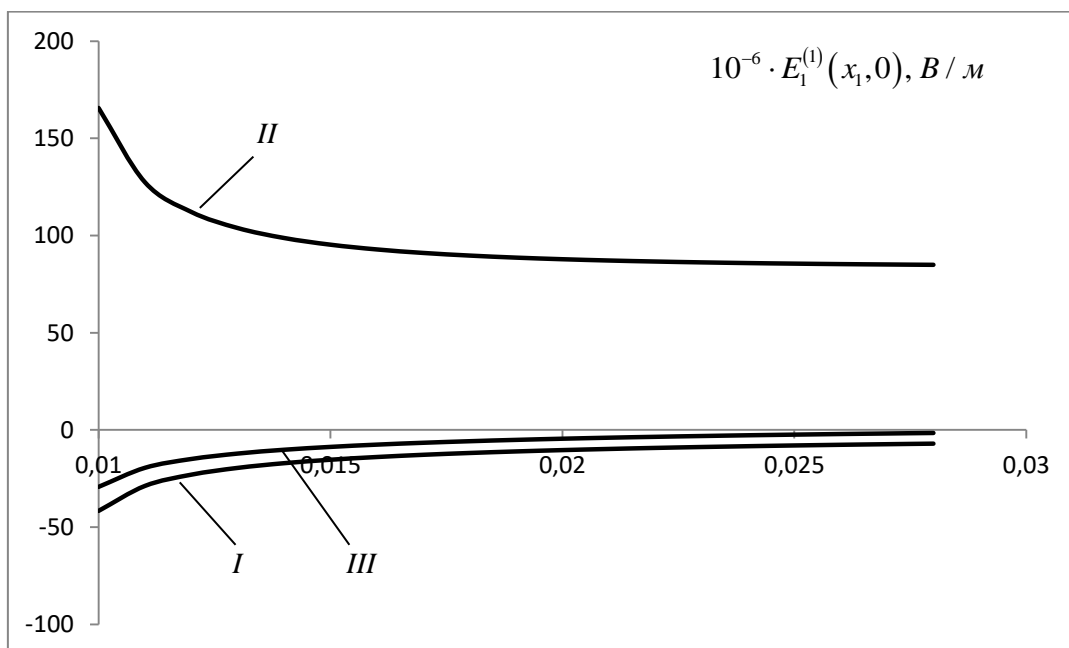


Рис. 3. Розподіл електричного поля  $E_1^{(1)}(x_1, 0)$  на продовженні тріщини за таких же зовнішніх напружень, електричного та магнітного полів, як в рис. 2

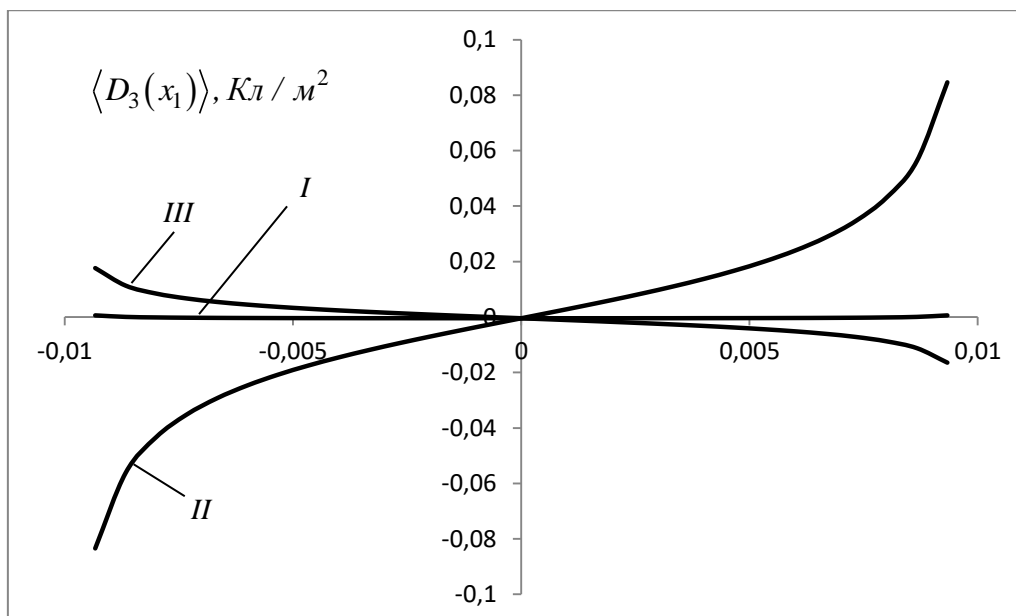


Рис. 4. Розподіл електричної індукції  $\langle D_3(x_1) \rangle$  вздовж тріщини за таких же зовнішніх напружень, електричного та магнітного полів, як в рис. 2

## ВИСНОВКИ

Досліджена відкрита тріщина в п'єзоелектричному/п'єземагнітному біматеріалі під дією дотичного та нормального механічних напружень, а також електричного та магнітного полів, паралельних до берегів тріщини. Вважалося, що п'єзокераміки поляризовані перпендикулярно до берегів тріщини. Припускається, що берега тріщини вкриті механічно м'якими електродами з сегнетоелектричного матеріалу, на яких задано електричний заряд та залишкова магнітна індукція і електричне та магнітне поля є незалежними від координати, паралельної до фронту тріщини.

Вектор-матричні представлення (11) та (12) для напружень, електричної та магнітної індукції, а також для переміщення, стрибків електричного та магнітного потенціалів виводяться через кусково-голоморфні вектор-функції. Вважаючи, що тріщина відкрита, формується задача Гільберта (31). Проблема вирішується в аналітичному вигляді. При цьому магніто-електро-механічні характеристики мають осцилюючі особливості, що призводить до фізично нереального взаємопроникнення берегів тріщини. Наводяться аналітичні вирази для напружень, електричних та магнітних зміщень, а також для стрибків пружного переміщення, електричного та магнітного потенціалів уздовж інтерфейсу.

З аналітичного аналізу результатів та візуалізації даних видно, що електричне та магнітне поля мають суттєвий вплив на характеристики механічних, електричних та магнітних факторів, особливо в околі вершин тріщини.

## ЛІТЕРАТУРА

1. McMeeking R. M. On mechanical stresses at cracks in dielectrics with application to dielectric breakdown / R. M. McMeeking // J. Appl. Phys. – 1987. – 62. – P. 3119-3122.
2. Suo Z. Models for breakdown-resistant dielectric and ferroelectric ceramics / Z. Suo // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1993. – 41. – P. 1155-1176.
3. Ru C. Q. Conducting cracks in a piezoelectric ceramic of limited electrical polarization / C. Q. Ru, X. Mao // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1999. – 47. – P. 2125-2146.

4. Zhang T. Y. Fracture behaviours of piezoelectric materials / T. Y. Zhang, C. F. Gao // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 2004. – 41. – P. 339-379.
5. Beom H. G. Conducting cracks in dissimilar piezoelectric media / H. G. Beom, S. N. Atluri // *International Journal of Fracture*. – 2002. – 118. – P. 285-301.
6. Eshelby J. D. Anisotropic elasticity with application to dislocation theory / J. D. Eshelby, W. T. Read, W. Shockley // *Acta Metall.* – 1953. – 1. – P. 251-259.
7. Suo Z. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics / Z. Suo, C.-M. Kuo, D. M. Barnett, J. R. Willis // *Journal of Mechanics and Physics of Solids* 40. – 1992. – P. 739-765.
8. Loboda V. An electrically conducting interface crack with a contact zone in a piezoelectric biomaterial / V. Loboda, A. Sheveleva, Y. Lapusta // *International Journal of Solids and Structures*. – 2014. – V. 51. – P. 63-73.
9. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
10. Кныш П. Ю. Аналитическое и численное исследование электродированной трещины в пьезоэлектрическом материале / П. Ю. Кныш, В. В. Лобода // *Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Механіка»*. – 2012. – С. 1-15.
11. Sih G. C. Magnetic and electric poling effects associated with crack growth in BaTiO<sub>3</sub> – CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> composite / G. C. Sih, Z. F. Song // *Theor. Appl. Fract. Mech.* – 2003. – 39. – P. 209-227.

#### REFERENCES

1. McMeeking, R.M. (1987), “On mechanical stresses at cracks in dielectrics with application to dielectric breakdown”, *J. Appl. Phys.*, 62, pp. 3119-3122.
2. Suo, Z. (1993), “Models for breakdown-resistant dielectric and ferroelectric ceramics”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41, pp. 1155-1176.
3. Ru, C.Q. and Mao, X. (1999), “Conducting cracks in a piezoelectric ceramic of limited electrical polarization”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 47, pp. 2125-2146.
4. Zhang, T.Y. and Gao, C.F. (2004), “Fracture behaviours of piezoelectric materials”, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 41, pp. 339-379.
5. Beom, H.G. and Atluri, S.N. (2002), “Conducting cracks in dissimilar piezoelectric media”, *International Journal of Fracture*, 118, pp. 285-301.
6. Eshelby, J.D., Read, W.T. and Shockley, W. (1953), “Anisotropic elasticity with application to dislocation theory”, *Acta Metall*, 1. pp. 251-259.
7. Suo, Z, Kuo, C.-M., Barnett, D.M. and Willis, J.R. (1992), “Fracture mechanics for piezoelectric ceramics”, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 40, pp. 739-765.
8. Loboda V., Sheveleva, A. and Lapusta, Y. (2014), “An electrically conducting interface crack with a contact zone in a piezoelectric biomaterial”, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 51, pp. 63-73.
9. Muskhelishvili, N.I. (1966), *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti* [Some basic problems in the mathematical theory of elasticity], Nauka, Moscow.
10. Knish, P.U. and Loboda, V.V. (2012), “Analytical and numerical investigation of electroded crack in the piezoelectric material”, *Visnyk Dnipropetrovs'koho universytetu. Seriya “Mekhanika”*, pp. 1-15.
11. Sih, G.C. and Song, Z.F. (2003), “Magnetic and electric poling effects associated with crack growth in BaTiO<sub>3</sub> – CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> composite”, *Theor. Appl. Fract. Mech.*, 39, pp. 209-227.