

УДК 519.6, 539.3

## СТРУКТУРА РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КАРМАНА С НЕПОСТОЯННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Громов В. А., к. ф.-м. н., с. н. с.

*Днепропетровский национальный университет имени Олеса Гончара,  
просп. Гагарина, 72, г. Днепр, 49000, Украина*

stroller@rambler.ru

Рассматривается применение нелинейного обобщенного метода Канторовича к построению и анализу структуры решения нелинейной краевой задачи для уравнений Кармана с непостоянной правой частью. Устанавливается связь указанной структуры с бифуркационной структурой для уравнений Кармана с постоянной правой частью.

*Ключевые слова: уравнения Кармана, численные методы решения нелинейных краевых задач для уравнений в частных производных, нелинейный обобщенный метод Канторовича, обобщенное решение, первичное и вторичное ветвление.*

## СТРУКТУРА РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯНЬ КАРМАНА З НЕПОСТІЙНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

Громов В. О., к. ф.-м. н., с. н. с.

*Дніпропетровський національний університет імені Олеса Гончара,  
просп. Гагаріна, 72, м. Дніпро, 49000, Україна*

stroller@rambler.ru

Розглядається застосування нелінійного узагальненого методу Канторовича до побудови та аналізу структури розв'язку нелінійної крайової задачі для рівнянь Кармана з непостійною правою частиною. Встановлюється зв'язок зазначеної бифуркаційної структури з бифуркаційною структурою для рівнянь Кармана з постійною правою частиною.

*Ключові слова: рівняння Кармана, чисельні методи розв'язання рівнянь у частинних похідних, нелінійний узагальнений метод Канторовича, узагальнений розв'язок, первинне та вторинне галузження.*

## SOLUTION STRUCTURE OF NON-LINEAR BOUNDARY PROBLEM FOR VON KARMAN EQUATIONS WITH NON-CONSTANT RIGHT TERM

Vasilii A. Gromov

*Oles Honchar Dnepropetrovsk national university,  
Gagarina av., 72, Dnipro, 49000, Ukraine*

stroller@rambler.ru

Von Karman Equations depends upon parameters, which exact values are usually unknown in actual practice. If the equations are structurally unstable that is qualitative change of solution is possible due to minor change of parameters or right-hand terms, then it is useful to know beforehand possible bifurcations. Most studies of bifurcations for the equations under study deals with bifurcation paths associated with the first singular point, whereas detailed study of bifurcation all paths is of fundamental importance.

The non-linear generalized Kantorovich method is applied to non-linear boundary problem for von Karman equations with a non-constant right term in order to ascertain bifurcation structure. The structure is related to that for von Karman equations with a constant right term.

What follows is a sketch of the algorithm used to construct and analyze bifurcation structure of non-linear boundary problem:

1. Two-dimensional non-linear boundary problem in question is boiled down to a sequence of single-dimensional problems.
2. In order to solve a single-dimensional problem, it reduced to the equivalent Cauchy problem.
3. To trace equilibrium paths (and thereby guarantee good initial approximation for the non-linear Kantorovich method), conventional path-tracing technique is employed.

4. If a limit singular point is located, then continuation parameter is changed.
5. If a bifurcation singular point is located, then one reveals intersections of bifurcation paths branching from the bifurcation point in question with a sphere (with a small radius) centered in the point. The points of intersection belong to bifurcation paths branching from the singular point and can be used as start points for path-tracing technique to trace these branches.

*The constant right part.* The aforesaid algorithm, being applied to von Karman equations with constant right part, results in bifurcation structure with primary and secondary bifurcation paths. The former is associated with solutions with equidistant local minima and maxima (along direction  $x_2$ ) and equal solution function values in these extrema (regular solutions), while the latter corresponds to the solution with non-equidistant local extrema and different solution function values (localized solutions).

*The right-part term  $\lambda(x_1, x_2) = \lambda(a + b \cos x_2)^p$ .* In that case, a bifurcation structure immanent to von Karman equations with a constant right term is broken to bring solutions with a limit singular point corresponding to vanished bifurcation one and isolated solutions resulted from deformation of bifurcation path of localized solutions as well.

*The right-part term  $\lambda(x_1, x_2) = \lambda(a + b \cos mx_2)$ .* Here, a deformation of bifurcation structure depends heavily on whether the number  $m$  is larger or lesser than the number of maxima of the solution corresponding to the first primary bifurcation paths  $m_{eigen}$ . Interestingly, for the former case, a limit curve is associated with the solution for which the number of maxima equals to  $m$ ; meanwhile the primary bifurcation path corresponding to the first bifurcation point becomes isolated, and its secondary bifurcation paths ‘unhooked’ from it and ‘hooked’ to the new limit curve.

Conclusions:

1. The non-linear generalized Kantorovich method along with conventional path-tracing technique and algorithm to construct equilibrium paths branching from a bifurcation point make it possible to analyze bifurcation structure of non-linear boundary problem for von Karman equations.
2. For various right-part term types, one can observe limit curves and isolated solution branches relative to primary and secondary bifurcation paths of constant case. Singular points features single degeneracy.
3. The structure considered appears to be deformed one corresponding to von Karman equations with constant right term.

*Keywords: von Karman equations, numerical methods to solve PDEs, the non-linear generalized Kantorovich method, the generalized solution, primary and secondary bifurcation paths.*

## ВВЕДЕНИЕ

Уравнения Кармана зависят от параметров, точные значения которых для реальных систем неизвестны. Если уравнения структурно неустойчивы, т.е. если возможно качественное изменение их решений вследствие малого изменения правой части или параметров задачи, то необходимо знать, какие бифуркации фазового портрета возможны. Существующие исследования для нелинейных краевых задач для уравнений Кармана, обычно, посвящены построению решений, исходящих из первой точки бифуркации, лежащей на ветви решения, исходящей из нуля.

Исследованию поведения решений уравнений Кармана в окрестности данной точки бифуркации при наличии возмущений конкретного вида посвящено огромное количество работ. Эти решения, связанные с рассмотрением конкретных возмущений, дают возможность оценить критические значения параметров системы при реализации указанных форм. Между тем, для оценки реального поведения системы при внешних возмущениях произвольного вида, необходимо исследовать нелинейные модели, описываемые решениями уравнениями Кармана, топологически далёкими от решений, связанных с указанной точкой бифуркации.

## ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Значительное число различных возможных решений уравнений Кармана с непостоянной правой частью обуславливает интерес к их классификации и – что важно для приложений – определению границ областей существования различных типов решений, к анализу структуры решения нелинейной краевой задачи для уравнений Кармана для случая постоянной правой части и разрушению указанной структуры при переходе к уравнениям с непостоянной правой частью.

В работах [1, 2] с использованием метода Релея-Ритца путём аппроксимации функций задачи отрезками ортогональных функциональных рядов (ряд Фурье в одном направлении и ряд, составленный из функций Бесселя и модифицированных функций Бесселя, – в другом) была получена достаточно полная картина ветвления решения нелинейной краевой задачи для уравнений Кармана с постоянной правой частью, описывающих поведение пологого сферического купола. При этом авторы опирались на разработанную ими модификацию метода продолжения по параметру. Было установлено, что наряду со значениями параметров задачи, для которых малые изменения приводят к малым изменениям характера решения («эволюционное» изменение), существуют значения параметров, при которых малые изменения приводят к резким качественным изменениям характера решения («скачкообразное» изменение). Последнее связано с присоединением к основной кривой ветвей решения, которые были изолированы при близких значениях параметров.

В работе [3] исследуется бифуркационная картина для уравнений Кармана, определённых на прямоугольной области при постоянной правой части; здесь наблюдается два типа решений, симметричных относительно одной из осей симметрии прямоугольника области определения; кососимметричные решения в работе не рассматриваются. В работе [4] также рассматривается структура решения уравнений Кармана, определённых на прямоугольной области, при этом функция нагрузки носит ярко выраженный локальный характер. В качестве инструмента исследования использовался метод конечных элементов в сочетании с методом продолжения по параметру с оптимальным выбором параметра продолжения (arclength method).

В работе [5] рассматривается нелинейная краевая задача для уравнений Кармана на цилиндрической области существенно большей в продольном направлении, чем в окружном. Здесь было осуществлено сведение нелинейной краевой задачи к конечномерной задаче фиксированной размерности путём введения предположения о бесконечной протяжённости области в одном из направлений и аппроксимации решения в другом отрезком тригонометрического ряда. В работе [6] представлена картина ветвления нелинейной краевой задачи для уравнений Кармана с постоянной правой частью: картина включает в себя ветви первичного и вторичного ветвления.

В настоящем исследовании на основании нелинейного обобщённого метода Канторовича, применённого к решению уравнений Кармана с непостоянной правой частью, и методов исследования ветвления решений нелинейных краевых задач строятся численные нелинейные модели поведения указанных систем, исследуется характер разрушения бифуркационной структуры, полученной для случая уравнений с постоянной правой частью.

### ОБОБЩЁННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КАРМАНА

Задача формулируется на ограниченной области  $\Omega \subset R^2$  с достаточно регулярной границей  $\Gamma$ ; при формулировке задачи в настоящей работе используются следующие обозначения:

$$\nabla_k^2 \alpha \equiv k_2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} + k_1 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2}; \quad (1)$$

$$L(\alpha, \beta) \equiv \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2};$$

$$K(\alpha, \beta) \equiv \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2} - \mu \left[ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2} \right] + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} + 2(1 + \mu) \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$Q_1(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \left[ \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x_2} + \left[ \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x_1},$$

$$Q_2(\alpha, \beta) \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2},$$

$W_2^{(2)}(\Omega)$  – пространство Соболева.

Уравнения формулируются (в ортогональной системе координат  $(x_1, x_2)$ ) как система нелинейных уравнений в частных производных вида:

$$\begin{aligned} a_1 \nabla^4 u_1 + L(u_1, u_2) - \nabla_k^2 u_2 &= \lambda, \\ a_2 \nabla^4 u_2 - \frac{1}{2} L(u_1, u_1) - \nabla_k^2 u_1 &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где  $\lambda = \lambda(x_1, x_2)$  – заданная (дифференцируемая) функция двух переменных;  $k_1, k_2, a_1, a_2$  – положительные константы.

Обобщённое решение рассматриваемой нелинейной краевой задачи даётся парой функций  $U = (u_1, u_2)$ ,  $u_1 \in W_2^{(2)}(\Omega)$ ,  $u_2 \in H_0(\Omega)$ , удовлетворяющих интегральным тождествам:

$$a_1 \iint_{\Omega} K(u_1, v_1) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} [\nabla_k^2 u_2 v_1 - Q_1(u_1, u_2, v_1) - \lambda v_1] dx_1 dx_2, \tag{3}$$

$$a_2 \iint_{\Omega} K(u_2, v_2) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} [\nabla_k^2 v_2 u_1 - Q_2(u_1, v_2)] dx_1 dx_2 \tag{4}$$

для пары произвольных функций  $v_1 \in W_2^{(2)}(\Omega)$ ,  $v_2 \in H_0(\Omega)$ , где  $H_0(\Omega)$  – замыкание пространства функций  $\left\{ \alpha \in W_2^{(2)}(\Omega), \alpha|_{\Gamma} = 0, \frac{\partial \alpha}{\partial n}|_{\Gamma} = 0 \right\}$  в норме  $\iint_{\Omega} K(\alpha, \alpha) dx_1 dx_2$ ;  $\frac{\partial \cdot}{\partial n}$  – производная по направлению, нормальному к контуру  $\Gamma$ ;  $\mu$  – параметр задачи.

### НЕЛИНЕЙНЫЙ ОБОБЩЁННЫЙ МЕТОД КАНТОРОВИЧА

Для отыскания решения нелинейной краевой задачи (2) строится последовательность приближений к обобщённому решению (3), (4) с помощью представления вектора неизвестных функций задачи на итерациях алгоритма в виде:

$$U(x_1, x_2) = \{u_j(x_1, x_2)\} = \left\{ h_j^{(i-1)}(x_1) g_j^{(i)}(x_2) \right\} \Big|_{j=\overline{1,2}}, i \rightarrow \infty, \tag{5}$$

$$h_1^{(i-1)}(x_1) g_1^{(i)}(x_2) \in W_2^{(2)}(\Omega), \quad h_2^{(i-1)}(x_1) g_2^{(i)}(x_2) \in H_2(\Omega). \tag{6}$$

Соотношения (5), (6) позволяют представить разрешающие соотношения нелинейной краевой задачи (2) в виде последовательности дифференциальных уравнений вида (здесь и далее, для краткости, опущен верхний индекс, соответствующий номеру итерации):

$$\frac{dh_j}{dx_1} = f_j^{x_1}(h(x_1), a^{x_2}(x_1), \lambda), \quad j = \overline{1,8}, \tag{7}$$

$$\frac{dg_j}{dx_2} = f_j^{x_2}(g(x_2), a^{x_1}(x_2), \lambda), \quad j = \overline{1,8}. \tag{8}$$

Для отыскания решения указанных нелинейных одномерных краевых задач использовался метод сведения нелинейной краевой задачи к эквивалентной задаче Коши [6]; на итерациях метода вычисляются матрицы Фреше для систем (7) и (8). Обращение в ноль определителей указанных матриц ( $\det J_{x_1}$  и  $\det J_{x_2}$ ) указывает на особую точку решения [7]:

$$\det J_{x_i} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

Рассматриваемый алгоритм предполагает организацию итерационного процесса, в рамках которого подсистемы (7), (8) вычисляются отдельно, на последовательных итерациях, при этом в качестве подынтегральных функций выбираются приближения, полученные на предыдущей итерации. Тем самым решение двумерной нелинейной краевой задачи сводится к отысканию решений последовательности нелинейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений: так определённый итерационный процесс аналогичен обобщённому методу Канторовича [8].

### ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ БИФУРКАЦИОННОЙ СТРУКТУРЫ РЕШЕНИЯ

Для определения типа особой точки, локализованной с помощью условия (9), рассматривается расширенная матрица Фреше, дополненная столбцом производных «точечных» граничных условий по параметру продолжения,  $J_\lambda$  и множество квадратных матриц  $J_k$ , полученных из  $J_\lambda$  путём удаления  $k$ -го столбца. Тогда, в точке бифуркации (в точке ответвления нового решения) выполняется условие  $\text{rank} J = \text{rank} J_k < N, \forall k = \overline{1, N}$ , в предельной точке –  $\text{rank} J < N, \text{rank} J_k = N, \forall k = \overline{1, N}$ .

Используемый алгоритм позволяет построить малые решения системы (решений, принадлежащих малой окрестности точки бифуркации), ответвляющиеся в рассматриваемой особой точке, и тем самым задать для каждой ветви решения, исходящей из соответствующей точки бифуркации решения нелинейной краевой задачи (8), (9), лежащую на ней точку. Здесь осуществляется численное построение уравнений разветвления [9] для одномерных нелинейных краевых задач, формируемых на последней итерации НОМК; при этом сомножитель, определяющий вид решения в одном направлении, остаётся неизменным – таким, каким он был получен на предпоследней итерации алгоритма.

Для обеспечения устойчивости вычислительного процесса предлагается немного отступить от точки бифуркации и искать решения на гиперсфере малого радиуса с центром в данной точке бифуркации (что служит своеобразным способом регуляризации вычислительного процесса), при этом параметр, служивший параметром продолжения при движении вдоль ветви, на которой была зафиксирована точка бифуркации, вводится в число переменных и определяется в рамках вычислительного процесса [10].

### СТРУКТУРА ВЕТВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КАРМАНА

Рассмотренный алгоритм позволил установить бифуркационную картину для случая уравнений Кармана с постоянной правой частью – здесь установлено наличие ветвей первичного и вторичного ветвления, которые характеризуются решениями с одинаковыми значениями неизвестных функций задачи в локальных максимумах и минимумах и одинаковыми расстояниями между указанными максимумами в направлении  $x_2$  (регулярные решения) и решениями с различными значениями неизвестных функций задачи в локальных максимумах и минимумах и различными расстояниями между максимумами (локализованные решения) [6].

Приведенные ниже структуры решения рассматриваемой нелинейной краевой задачи соответствуют значениям параметров  $\Omega = \{0 \leq x_1 \leq 4; 0 \leq x_2 \leq 2\pi\}$ ,  $a_1 = 0.1$ ;  $a_2 = -1$ ;  $k_1 = 150$ ;  $k_2 = 0$ ;  $\mu = 0.3$ .

Правая часть вида  $\lambda(x_1, x_2) = \lambda(a + b \cos x_2)^p$ . При наличии правой части указанного вида происходит разрушение описанной выше бифуркационной картины. Здесь возникают

решения, характеризующиеся наличием предельной особой точки, возникшей на месте разрушения точки бифуркации, а также изолированные ветви решения, возникающие при разрушении ветвей локализованных решений; в некоторых случаях, при большей неравномерности внешнего давления, происходит полное исчезновение изолированных ветвей.

При этом предельные кривые, соответствующие уравнениям Кармана с непостоянной правой частью, как бы «притягиваются» к одной из ветвей решения для случая постоянной правой части. Указанное обстоятельство объясняет существенную немонотонность графиков зависимостей значений параметра, при котором фиксируется предельная особая точка, от различного рода параметров нагружения.

На рис. 1а и 1б представлено разрушение бифуркационной картины для уравнений Кармана при наличии правой части указанного вида. Представленные ветви – это результат разрушения ветви первичного ветвления, ответвляющейся в первой точке бифуркации, ветви первичного ветвления, ответвляющейся во второй точке бифуркации, и связанных с ними ветвей вторичного ветвления.

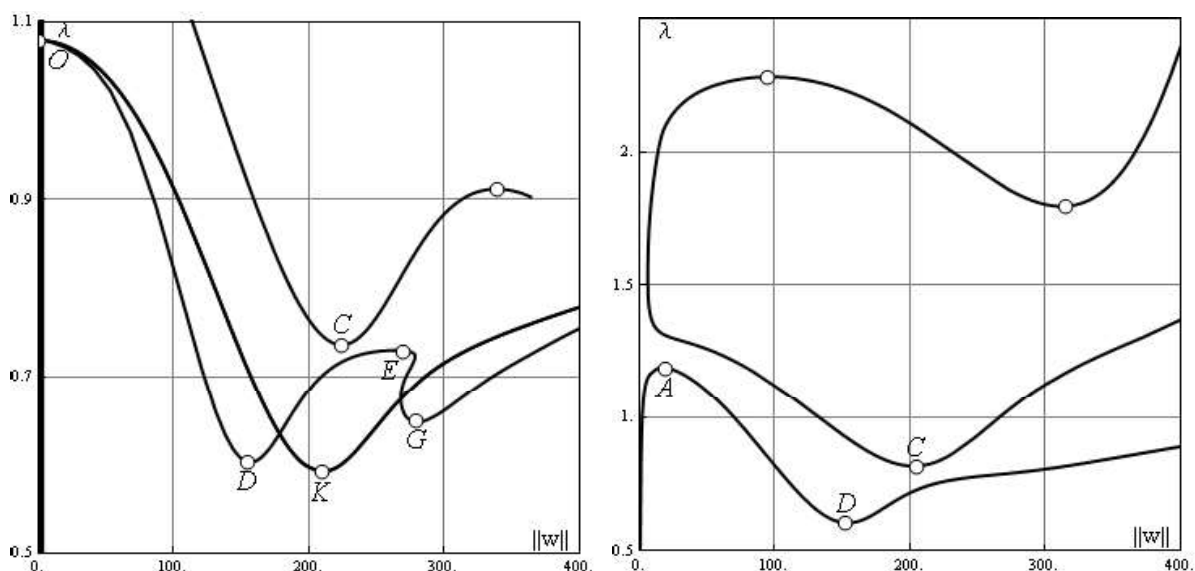


Рис. 1. Разрушение бифуркационной картины при правой части вида  $\lambda(x_1, x_2) = \lambda(a + b \cos x_2)^p$ : (а) точки бифуркации сохраняются, ветви локализованных форм ответвляются от ствола  $a = 0.9, b = 0.1, p = 3$ ; (б) образование предельных кривых и изолированных ветвей  $a = 0.6, b = 0.4, p = 3$

Правая часть вида  $\lambda(x_1, x_2) = \lambda(a + b \cos mx_2)$ . На рис. 2а и 2б представлено разрушение бифуркационной картины, отвечающее случаям, когда номер  $m$ , соответственно, больше и меньше числа максимумов функции решения, связанной с первой ветвью первичного ветвления  $m_{eigen}$ . Любопытно отметить, что во втором случае наблюдается регулярное решение, для которого число максимумов совпадает с величиной  $m$  функции правой части уравнения (исходящая из нуля предельная кривая), при этом ветвь первичного ветвления, связанная с первой точкой бифуркации, становится изолированной, а связанные с ней ветви вторичного ветвления «отцепляются» от неё и «прицепляются» к вновь возникшей предельной кривой.

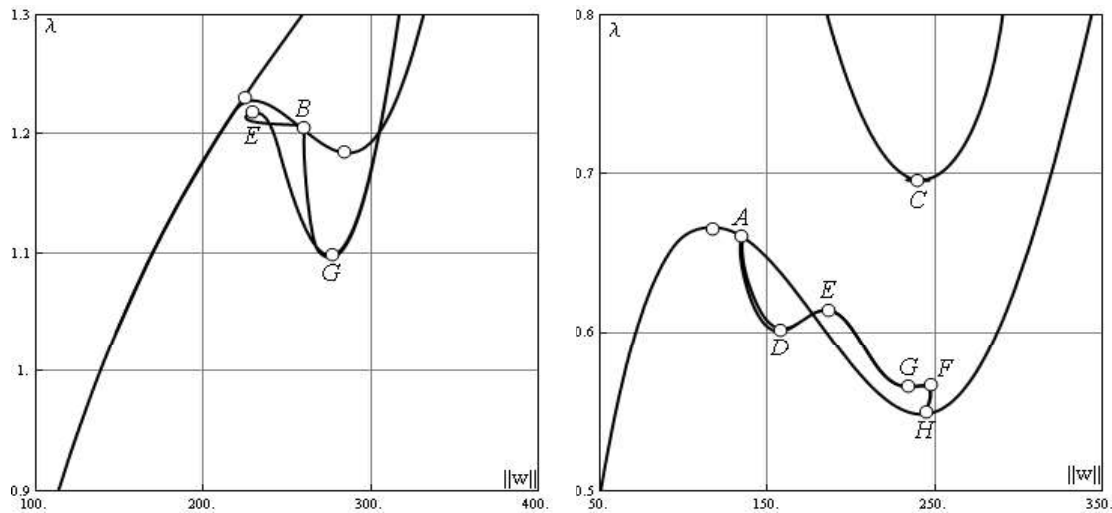


Рис. 2. Разрушение бифуркационной картины при правой части вида  $\lambda(x_1, x_2) = \lambda(a + b \cos mx_2)$ : (а) структура ветвления деформируется, но в целом сохраняется  $a = 0.5, b = 0.5, m = 6; m > m_{eigen}$ ; (б) предельные кривые и изолированные ветви  $a = 0.5, b = 0.5, m = 4; m < m_{eigen}$

## ВЫВОДЫ

1. Нелинейный обобщённый метод Канторовича в сочетании с методом продолжения по параметру и алгоритмом построения ветвей решения, исходящих из точки бифуркации, позволяет построить структуру решения нелинейной краевой задачи для уравнений Кармана.
2. Здесь фиксируются (при различных видах правой части) предельные кривые, изолированные ветви решения и ветви первичного ветвления. Особые точки характеризуются однократным вырождением.
3. Указанная структура может быть рассмотрена как разрушение бифуркационной структуры для уравнений Кармана с постоянной правой частью.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И. О методе непрерывного продолжения по параметру / Э. И. Григолюк, Е. А. Лопаницын // Докл. РАН. – 1994. – Т. 335, № 5. – С. 582–585.
2. Григолюк Э. И. Продолжения решения нелинейных уравнений в окрестности точек бифуркации / Э. И. Григолюк, Е. А. Лопаницын // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 1998. – Т. 41, № 1. – С. 35–46.
3. Pirrera A. On the thermally induced bistability of composite cylindrical shells for morphing structures / A. Pirrera, D. Avitabile, P. M. Weaver // Int. J. Solid. Struct. – 2012. – Vol. 49. – P. 685–700.
4. Zhou Y. Nonlinear elastic buckling and postbuckling analysis of cylindrical panels / Y. Zhou, I. Stanciulescu, T. Eason, M. Spottswood // Finite Elements in Analysis and Design. – 2015. – Vol. 96. – P. 41–50.
5. Lord G. J. Computation of homoclinic orbits in partial differential equations: An application to cylindrical shell buckling / G. J. Lord, A. R. Champneys, G. W. Hunt // SIAM J. Sci. Comp. – 1999. – Vol. 21, № 2. – P. 591–619.
6. Громов В. А. Численный метод построения нелинейных решений уравнений Кармана / В. А. Громов // Питання прикладної математики та математичного моделювання : Зб. наукових праць. – 2016. – Т. 5. – С. 5–19.
7. Keller J. B. Bifurcation Theory and Nonlinear Eigenvalue Problems / J. B. Keller, S. Antman (Eds). – N.-Y. : Benjamin WA inc, 1969. – 250 p.
8. Kantorovich L. V. Approximate Methods of Higher Analysis / L. V. Kantorovich, V. I. Krylov. – N.-Y. : Interscience, 1958. – 682 p.

9. Вайнберг М. М. Теория ветвления нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. – М. : Наука, 1969. – 528 с.
10. Пешков И. М. Ветвление решений математических моделей гипотетических генных сетей / И. М. Пешков // Вестник НГУ. Сер. матем., мех., информ. – 2007. – Т. 7, № 3. – С. 59–72.

### REFERENCES

1. Grigoluyk, E.I. and Lopanitsyn, E.A. (1994), “On a path-tracing method”, *Doklady RAN*, vol. 335, no. 5, pp. 582-585.
2. Grigoluyk, E.I. and Lopanitsyn, E.A. (1998), “Path-tracing in the vicinity of bifurcation point”, *Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polya*, vol. 41, no. 1, pp. 35-46.
3. Pirrera, A., Avitabile, D. and Weaver, P.M. (2012), “On the thermally induced bistability of composite cylindrical shells for morphing structures”, *Int. J. Solid. Struct.*, vol. 49, pp. 685-700.
4. Zhou, Y., Stanciulescu, I., Eason, T. and Spottswood, M. (2015), “Nonlinear elastic buckling and postbuckling analysis of cylindrical panels”, vol. 96, pp. 41-50.
5. Lord, G.J., Champneys, A.R. and Hunt, G.W. (1999), “Computation of homoclinic orbits in partial differential equations: An application to cylindrical shell buckling”, *SIAM J. Sci. Comp.*, vol. 21, no. 2, pp. 591-619.
6. Gromov, V.A. (2016), “Numerical methods to construct non-linear solutions for von Karman equations”, *Pytannya prykladnoyi matematyky ta matematychnoho modelyuvannya: Zbirnyk naukovykh prats*, vol. 5, pp. 5-19.
7. Keller, J.B., Antman, S. and Eds (1969), “Bifurcation Theory and Nonlinear Eigenvalue Problems”, Benjamin WA inc, New York.
8. Kantorovich, L.V. and Krylov, V.I. (1958), “Approximate Methods of Higher Analysis”, Interscience, New York.
9. Vainberg, M.M. and Trenogin, V.A. (1969), *Teoriya vetvleniya nelineynykh uravneniy* [Branching theory for non-linear equations], Nauka, Moscow.
10. Peshkov, I.M. (2007), “Branching of mathematical models for possible genetic networks”, *Vestnik NGU, Seriya matematika, mekhanika, informatika*, vol. 7, no. 3, pp. 59-72.

УДК 539.3

## НЕЛИНЕЙНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ СЖАТО-ИЗОГНУТОЙ ПЛАСТИНЫ С РАЗРЕЗОМ

Гук Н. А., д. ф.-м. н., профессор, Степанова Н. И., старший преподаватель

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара,  
просп. Гагарина, 72, Днепр, Украина*

nist66@mail.ru

В работе предложен подход к моделированию разреза (трещины) в тонких пластинах, основанный на задании статических условий на линии, совпадающей с линией разреза. Для имитации выполнения статических условий на линии разреза использована вариационная постановка задачи деформирования пластины в сочетании с формулировкой ее как обратной задачи. Разработан алгоритм для определения значений скачков перемещений и углов поворота на линии разреза, обеспечивающих выполнение статических граничных условий.

*Ключевые слова: тонкостенная система, разрез, скачки перемещений и углов поворота, обратная задача, функционал, метод Ньютона.*