

9. Вайнберг М. М. Теория ветвления нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. – М. : Наука, 1969. – 528 с.
10. Пешков И. М. Ветвление решений математических моделей гипотетических генных сетей / И. М. Пешков // Вестник НГУ. Сер. матем., мех., информ. – 2007. – Т. 7, № 3. – С. 59–72.

REFERENCES

1. Grigoluyk, E.I. and Lopanitsyn, E.A. (1994), “On a path-tracing method”, *Doklady RAN*, vol. 335, no. 5, pp. 582-585.
2. Grigoluyk, E.I. and Lopanitsyn, E.A. (1998), “Path-tracing in the vicinity of bifurcation point”, *Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polya*, vol. 41, no. 1, pp. 35-46.
3. Pirrera, A., Avitabile, D. and Weaver, P.M. (2012), “On the thermally induced bistability of composite cylindrical shells for morphing structures”, *Int. J. Solid. Struct.*, vol. 49, pp. 685-700.
4. Zhou, Y., Stanciulescu, I., Eason, T. and Spottswood, M. (2015), “Nonlinear elastic buckling and postbuckling analysis of cylindrical panels”, vol. 96, pp. 41-50.
5. Lord, G.J., Champneys, A.R. and Hunt, G.W. (1999), “Computation of homoclinic orbits in partial differential equations: An application to cylindrical shell buckling”, *SIAM J. Sci. Comp.*, vol. 21, no. 2, pp. 591-619.
6. Gromov, V.A. (2016), “Numerical methods to construct non-linear solutions for von Karman equations”, *Pytannya prykladnoyi matematyky ta matematychnoho modelyuvannya: Zbirnyk naukovykh prats*, vol. 5, pp. 5-19.
7. Keller, J.B., Antman, S. and Eds (1969), “Bifurcation Theory and Nonlinear Eigenvalue Problems”, Benjamin WA inc, New York.
8. Kantorovich, L.V. and Krylov, V.I. (1958), “Approximate Methods of Higher Analysis”, Interscience, New York.
9. Vainberg, M.M. and Trenogin, V.A. (1969), *Teoriya vetvleniya nelineynykh uravneniy* [Branching theory for non-linear equations], Nauka, Moscow.
10. Peshkov, I.M. (2007), “Branching of mathematical models for possible genetic networks”, *Vestnik NGU, Seriya matematika, mekhanika, informatika*, vol. 7, no. 3, pp. 59-72.

УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ СЖАТО-ИЗОГНУТОЙ ПЛАСТИНЫ С РАЗРЕЗОМ

Гук Н. А., д. ф.-м. н., профессор, Степанова Н. И., старший преподаватель

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара,
просп. Гагарина, 72, Днепр, Украина*

nist66@mail.ru

В работе предложен подход к моделированию разреза (трещины) в тонких пластинах, основанный на задании статических условий на линии, совпадающей с линией разреза. Для имитации выполнения статических условий на линии разреза использована вариационная постановка задачи деформирования пластины в сочетании с формулировкой ее как обратной задачи. Разработан алгоритм для определения значений скачков перемещений и углов поворота на линии разреза, обеспечивающих выполнение статических граничных условий.

Ключевые слова: тонкостенная система, разрез, скачки перемещений и углов поворота, обратная задача, функционал, метод Ньютона.

НЕЛІНІЙНЕ ДЕФОРМУВАННЯ СТИСНУТО-ЗІГНУТОЇ ПЛАСТИНИ З РОЗРІЗОМ

Гук Н. А., д. ф.-м. н., професор, Степанова Н. І., старший викладач
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара,
просп. Гагаріна, 72, Дніпро, Україна

nist66@mail.ru

У роботі запропоновано підхід до моделювання розрізу (тріщини) в тонких пластинах, який ґрунтується на формулюванні статичних умов на лінії, що збігається з лінією розрізу. Для імітації виконання статичних умов на лінії розрізу використано варіаційну постановку задачі деформування пластини в поєднанні з формулюванням її як оберненої задачі. Розроблено алгоритм для визначення стрибків переміщень і кутів повороту на лінії розрізу, що забезпечують виконання статичних граничних умов.

Ключові слова: тонкостінна система, розріз, стрибки переміщень і кутів повороту, обернена задача, функціонал, метод Ньютона.

NONLINEAR DEFORMATION OF COMPRESSED-BENT THE PLATE WITH A CUT

Guk N. A., DSc (Phys.-Math.), Stepanova N. I., senior lecturer

*Oles Honchar Dnepropetrovsk national university
Gagarina av., 72, Dnipro, Ukraine*

nist66@mail.ru

A multiple construction of calculation model is necessary when performing iterative calculations using the finite element method (FEM) for thin plates with a slit (crack). The paper presents an approach to modeling the slit in the plate by setting the static conditions on a line coincident with the edges of the slit.

The problem of determining the conditions on the slit line for continuous plate is formulated as an inverse problem. Leaps of generalized displacements on the section line are unknown functions of inverse problem.

On the region $\Omega = \{X = (x_1, x_2) | -a \leq x_1 \leq a, -b \leq x_2 \leq b\}$ with the border Γ a thin plate with a straight slit is considered. The boundaries of the slit are marked using Γ_p .

The variational formulation of the direct problem of deformation of the plate under the action of normal load q to the surface at a known location of the slit border Γ_p is as follows:

$$U = \arg \min J(U), \quad U \in U^*, \quad (1)$$

where $U = \{u, v, w\}$ is vector-function displacement in directions x_1, x_2, z ; $J(U) = J_0 + \bar{J}$ is the functional of total energy of the system; J_0 is the energy of deformation of the plate; \bar{J} is the potential of external forces.

Dimensionless quantities are introduced during the formation components of the functional $J(U)$. The nonlinear equilibrium equations of the plate as functions of force and torque, conditions at the border Γ region Ω and on the banks of the slit and also geometric ratios follow from the stationarity conditions of the functional $J(U)$. Assessment of the continuity of functional was obtained for the study correctness of inverse problem solution.

To solve the problem in the variational formulation the transition to a discrete model of the plate using the FEM is carried out. The unknown functions direct and inverse problems are presented in a parametric form.

It is shown that the problem of deformation of the plate with a slit equivalent to that of a continuous deformation of the plate with the given irregular movements U_{Γ_p} on the slit line. To determine the leaps of displacements the problem is formulated as an inverse problem in the form:

$$\tilde{U}_{\Gamma_p} = \arg \min_{\tilde{U}_{\Gamma_p}} \Delta(\tilde{U}_{\Gamma_p})^T(\tilde{U}_{\Gamma_p}), \quad \tilde{U}_{\Gamma_p} \in Q, \quad (2)$$

where $\Delta(\tilde{U}_{\Gamma_p})$ is a vector of discrepancy: for $\xi_1 = const$ a vector of discrepancy consists of components $\Delta(\tilde{U}_{\Gamma_p}) = \{T_{22}, T_{12}, M_{22}, Q_{22}\}$; for $\xi_2 = const$ - $\Delta(\tilde{U}_{\Gamma_p}) = \{T_{11}, T_{12}, M_{11}, Q_{11}\}$. The zero values of the components of the vector of discrepancy ensures that the static boundary conditions at the boundary slit Γ_p .

The implementation conditions (2) is carried out using the Newton method. The proposed approach to solving the problem is described iterative algorithm. Using the proposed approach a simulation of the slit in the continuous plate was done.

The proposed approach can be used to Refine the picture of the stress-strain state of a plate with a real slit, which is built using the finite element method.

Key words: thin-walled system, cut, jump displacement and rotation angles, inverse problem, functional, Newton's method.

ВВЕДЕНИЕ

Наличие концентраторов напряжений типа трещин существенно снижает живучесть элементов конструкций, выполненных в виде тонкостенных пластин, в условиях эксплуатации. Изучению напряженно-деформированного состояния таких систем в линейной постановке посвящена обширная литература [1-8]. Здесь можно отметить два направления исследований – приведение задачи к системам сингулярных интегральных уравнений [2-4] и использование численного подхода (метод конечных элементов) [5-8].

Использование указанных подходов достаточно эффективно при известном расположении разреза. В том случае, когда необходимо предварительно определить расположение разреза по информации о деформировании, а затем решать нелинейную задачу о концентрации напряжений, оба указанных подхода не дают желаемого результата. Метод конечных элементов (МКЭ) позволяет определить напряженно-деформированное состояние в зоне разреза с недостаточной для решения указанной обратной задачи точностью, поскольку дает усредненную картину напряженно-деформированного состояния (НДС), результаты расчета деформаций могут существенно отличаться от их действительных значений.

Эти различия, несущественные при оценке несущей способности (обычно интересуют максимальные напряжения), становятся определяющими при использовании результатов расчета в интерпретации результатов мониторинга конструкции, находящейся в условиях эксплуатации. Для этой цели необходимо уточнение расчетной картины НДС. Кроме того, при использовании МКЭ для решения обратных задач возникает необходимость построения расчетной модели заново при выполнении каждой итерации.

В работе [9] предложен подход, базирующийся на модели сплошной конструкции. При использовании этого подхода, в силу линейности НДС, аналитическое решение представляется в виде суммы двух состояний, определяемых раздельно – НДС сплошной тонкостенной конструкции и НДС, получаемое в результате в результате определения дополнительных деформаций, характеризующихся скачком перемещений, из условий на берегах разреза.

Такой подход может быть обобщен на случай нелинейного деформирования с использованием МКЭ для расчетной модели в виде сплошной конструкции.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При необходимости итеративных расчетов тонкостенных пластин с разрезом (трещиной) с помощью МКЭ возникает необходимость многократного построения расчетной модели. Альтернативой является создание метода решения, базирующегося на использовании однократно построенной модели сплошной конструкции. Такой подход, разработанный в [9], в настоящей работе обобщается для случая нелинейного деформирования и основывается на использовании вариационного подхода, когда условия на берегах разреза преобразуются в условия на линии, имитирующей разрез в сплошной тонкостенной конструкции, независимо от характера деформирования. При этом условия на линии разреза для сплошной пластины могут быть сформулированы как решение обратной задачи, неизвестными функциями которой являются скачки обобщенных перемещений на линии разреза, а в качестве минимизируемой функции выступает среднеквадратическое отклонение значений усилий и моментов на линии разреза от нулевых значений.

Ниже рассматривается тонкостенная прямоугольная пластина толщины h с разрезом (трещиной), находящаяся в условиях нагружения, близкого к номинальным значениям. Предполагается, что пластина деформируется нелинейно, т.е. характерное перемещение больше толщины пластины ($w > h$), при этом квадраты углов поворота сечений пластины при деформировании не превышают 1 ($\theta_i^2 < 1$). В этом случае деформирование пластины описывается нелинейными уравнениями, при этом задача решается в предположении единственности решения в рассматриваемой области изменения параметров.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

На области $\Omega = \{X = (x_1, x_2) \mid -a \leq x_1 \leq a, -b \leq x_2 \leq b\}$ с границей Γ рассматривается пластина толщины $h \ll a, b$ с прямолинейным разрезом, имеющим границы Γ_p .

Вариационная постановка прямой задачи деформирования пластины под действием нормальной к поверхности нагрузки q при известном местоположении границы разреза Γ_p имеет вид:

$$U = \arg \min_U J(U), \quad U \in U^*, \quad (1)$$

где $U = \{u, v, w\}$ – вектор-функция перемещений в направлениях x_1, x_2, z .

Функционал полной энергии системы «пластина – внешние силы» представляется в виде:

$$J(U) = J_0 + \bar{J} \quad (2)$$

при предварительном выполнении условий на опорных контурах Γ пластины:

$$\begin{aligned} w|_{\Gamma} = w^* \quad \text{или} \quad Q_{ii}|_{\Gamma} = Q_{ii}^*; \quad u|_{\Gamma} = u^* \quad \text{или} \quad T_{ij}|_{\Gamma} = T_{ij}^*; \\ w_{,x_i}|_{\Gamma} = w_{,x_i}^* \quad \text{или} \quad M_{ij}|_{\Gamma} = M_{ij}^*, \end{aligned} \quad (3)$$

и границах разреза Γ_p :

$$T_{ij}|_{\Gamma_p} = 0; \quad M_{ij}|_{\Gamma_p} = 0; \quad Q_{ij}|_{\Gamma_p} = 0, \quad (4)$$

где T_{ij}, M_{ij}, Q_{ij} – функции усилий, моментов и перерезывающих сил на соответствующих контурах; $u^*, v^*, w^*, T_{ij}^*, Q_{ij}^*, M_{ij}^*$ – заданные значения соответствующих функций на внешнем контуре пластины Γ и границах разреза Γ_p ; $i, j = 1, 2$.

Потенциальная энергия деформации пластины имеет вид:

$$\begin{aligned} J_0 = \frac{1}{2(1-\mu^2)} \times \\ \times \int_{\Omega} \int \left[\varepsilon_{11}^2 + 2\mu\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2 + \frac{1}{2}(1-\mu)\varepsilon_{12}^2 \right] + \varepsilon^2 \left[\chi_{11}^2 + 2\mu\chi_{11}\chi_{22} + \chi_{22}^2 + 2(1-\mu)\chi_{12}^2 \right] dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

потенциал внешних сил записывается следующим образом:

$$\bar{J} = \int_{\Omega} \int q w dx_1 dx_2 - \int_{\Gamma} \left(M_{11}^* (w_{,x_1})_{,x_1} + Q_{11}^* w + T_{11}^* u + T_{12}^* v \right) d\Gamma,$$

где ε_{ij} – деформации срединной поверхности; χ_{ij} – составляющие изгибной деформации и кручения; q – нагрузка.

При формировании функционалов в (2) введена система безразмерных величин:

$$\xi_1 = \frac{x_1}{a}; \quad \xi_2 = \frac{x_2}{b}; \quad (u, v, w) = a^{-1}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}); \quad \varepsilon_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij}; \quad \chi_{ij} = a\bar{\chi}_{ij};$$

$$(T_{ij}, Q_{ij}) = \frac{(\bar{T}_{ij}, \bar{Q}_{ij})a^2}{Eh(1-\mu^2)\varepsilon^2}; \quad M_{ij} = \frac{\bar{M}_{ij}a}{Eh(1-\mu^2)\varepsilon^2}; \quad q = \frac{\bar{q}a}{Eh\varepsilon^2}(1-\mu^2); \quad \alpha = \frac{h^2}{\sqrt{12}a^2},$$

где $(\bar{\cdot})$ – размерные функции; E – модуль Юнга; μ – коэффициент Пуассона; α – параметр.

Предполагается предварительное выполнение условий совместности деформаций:

$$\varepsilon_{11} = u_{,\xi_1} + \frac{1}{2}(w_{,\xi_1})^2; \quad \varepsilon_{22} = v_{,\xi_2} + \frac{1}{2}(w_{,\xi_2})^2; \quad \varepsilon_{12} = u_{,\xi_1} + v_{,\xi_2} + w_{,\xi_1} w_{,\xi_2};$$

$$\chi_{11} = (w_{,\xi_1})_{,\xi_1}; \quad \chi_{22} = (w_{,\xi_2})_{,\xi_2}; \quad \chi_{12} = 2(w_{,\xi_1})_{,\xi_2} \quad (5)$$

и физических соотношений:

$$T_{11} = [\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22}]; \quad T_{22} = [\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11}]; \quad T_{12} = \frac{(1-\mu)}{2}\varepsilon_{12};$$

$$M_{11} = [\chi_{11} + \mu\chi_{22}]; \quad M_{22} = [\chi_{22} + \mu\chi_{11}]; \quad M_{12} = (1-\mu)\chi_{12}. \quad (6)$$

С учетом введенных соотношений (6) потенциальная энергия деформации может быть представлена в виде:

$$J_0 = \frac{1}{2(1-\mu^2)} \int_{\Omega} \int [T_{11}^2 - 2\mu T_{11}T_{22} + T_{22}^2 + 2(1+\mu)T_{12}^2] +$$

$$+ \alpha^2 [M_{11}^2 - 2\mu M_{11}M_{22} + M_{22}^2 + 2(1+\mu)M_{12}^2] d\xi_1 d\xi_2. \quad (7)$$

Для того, чтобы сформулировать вариационную задачу, эквивалентную (7), из которой следуют уравнения равновесия и соотношения (5), а также граничные условия нелинейной краевой задачи, присоединим соотношения (3)-(6) к функционалу (7) с помощью множителей Лагранжа. Записывая условия стационарности такого функционала и определяя неизвестные множители Лагранжа, получим:

$$J(U, T, M, Q) = J + J_{\Gamma} + J_{\Gamma_p} = \int_{\Omega} \int -\frac{1}{2(1-\mu^2)} [T_{11}^2 - 2\mu T_{11}T_{22} + T_{22}^2 - 2(1+\mu)T_{12}^2] +$$

$$+ \alpha^2 [M_{11}^2 - \mu M_{11}M_{22} + M_{22}^2 - (1+\mu)M_{12}^2] +$$

$$+ T_{11} \left(u_{,\xi_1} + \frac{1}{2}(w_{,\xi_1})^2 \right) + T_{22} \left(v_{,\xi_2} + \frac{1}{2}(w_{,\xi_2})^2 \right) - T_{12} \left(u_{,\xi_1} + v_{,\xi_2} + \frac{1}{2}(w_{,\xi_1})_{,\xi_2} \right) -$$

$$- \varepsilon^2 \left(M_{11} (w_{,\xi_1})_{,\xi_1} + M_{22} (w_{,\xi_2})_{,\xi_2} + 2M_{12} (w_{,\xi_1})_{,\xi_2} \right) d\xi_1 d\xi_2 + \int_{\Omega} q w d\xi_1 d\xi_2 +$$

$$+ \int_{\Gamma_b} [T_{11}^* u + T_{12}^* v + \bar{Q}_{11}^* w + M_{11}^* w_{,\xi_1}] d\xi_2 + \int_{\Gamma_b} [(w^* - w)\bar{Q}_{11} + (u^* - u)T_{11} -$$

$$\begin{aligned}
& -\left(v^* - v\right)T_{12} + \left(w^*_{,\xi_1} - w_{,\xi_1}\right)M_{11} \Big] d\xi_2 + \int_{\substack{\Gamma_a \\ \xi_2 = \text{const}}} \left[T_{12}^*u + T_{22}^*v + \bar{Q}_{22}^*w + M_{22}^*(w_{,\xi_2})\right] d\xi_1 + \\
& + \int_{\substack{\Gamma_a \\ \xi_2 = \text{const}}} \left[T_{12}(u^* - u) + T_{22}(v^* - v) + \bar{Q}_{22}(w^* - w) + M_{22}(w^*_{,\xi_2} - w_{,\xi_2})\right] d\xi_1 + \\
& + \int_{\substack{\Gamma_2^+ \\ \xi_1 = \text{const}}} \left[T_{11}^*u + T_{12}^*v + \bar{Q}_{11}^*w + M_{11}^*w_{,\xi_1}\right] d\xi_2 + \int_{\substack{\Gamma_2^+ \\ \xi_1 = \text{const}}} \left[(w^+ - w)\bar{Q}_{11} + (u^+ - u)T_{11} - \right. \\
& \left. - (v^+ - v)T_{12} + (w^+_{,\xi_1} - w_{,\xi_1})M_{11}\right] d\xi_2 + \int_{\substack{\Gamma_1^+ \\ \xi_2 = \text{const}}} \left[T_{12}^*u + T_{22}^*v + \bar{Q}_{22}^*w + M_{22}^*(w_{,\xi_2})\right] d\xi_1 + \\
& + \int_{\substack{\Gamma_1^+ \\ \xi_2 = \text{const}}} \left[T_{12}(u^+ - u) + T_{22}(v^+ - v) + \bar{Q}_{22}(w^+ - w) + M_{22}(w^+_{,\xi_2} - w_{,\xi_2})\right] d\xi_1 + \\
& + \int_{\substack{\Gamma_2^- \\ \xi_1 = \text{const}}} \left[T_{11}^*u + T_{12}^*v + \bar{Q}_{11}^*w + M_{11}^*w_{,\xi_1}\right] d\xi_2 + \int_{\substack{\Gamma_2^- \\ \xi_1 = \text{const}}} \left[(w^- - w)\bar{Q}_{11} + (u^- - u)T_{11} - \right. \\
& \left. - (v^- - v)T_{12} + (w^-_{,\xi_1} - w_{,\xi_1})M_{11}\right] d\xi_2 + \int_{\substack{\Gamma_1^- \\ \xi_2 = \text{const}}} \left[T_{12}^*u + T_{22}^*v + \bar{Q}_{22}^*w + M_{22}^*(w_{,\xi_2})\right] d\xi_1 + \\
& + \int_{\substack{\Gamma_1^- \\ \xi_2 = \text{const}}} \left[T_{12}(u^- - u) + T_{22}(v^- - v) + \bar{Q}_{22}(w^- - w) + M_{22}(w^-_{,\xi_2} - w_{,\xi_2})\right] d\xi_1,
\end{aligned} \tag{8}$$

где $\bar{Q}_{ii} = M_{ii}$ $\bar{Q}_{ii} = M_{ii,\xi_i} + M_{ij,\xi_j} + (T_{ii}w_{,\xi_i})_{,\xi_i} + (T_{ij}w_{,\xi_j})_{,\xi_i}$; $\Gamma = \Gamma_a \cup \Gamma_b$; Γ_a, Γ_b – участки внешнего контура пластины при $\xi_2 = \text{const}$, $\xi_1 = \text{const}$ соответственно; Γ_1^+, Γ_1^- – границы поперечного разреза при $\xi_2 = \text{const}$, $a_1 \leq \xi_1 \leq a_2$; Γ_2^+, Γ_2^- – границы продольного разреза при $\xi_1 = \text{const}$, $b_1 \leq \xi_2 \leq b_2$; $u^+, v^+, w^+, u^-, v^-, w^-$ – значения перемещений на берегах разреза Γ_p^+, Γ_p^- соответственно, $p = 1, 2$.

Из условия $\delta J = 0$ следуют нелинейные уравнения равновесия пластины в функциях усилий и моментов, условия на границе Γ области Ω и на берегах разреза (3), (4), а также геометрические соотношения в виде:

$$\begin{aligned}
T_{11} - \mu T_{22} &= \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right)^2; & M_{11} - \mu M_{22} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1^2}; \\
T_{22} - \mu T_{11} &= \frac{\partial v}{\partial \xi_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right)^2; & M_{22} - \mu M_{11} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2^2}; \\
T_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \frac{\partial v}{\partial \xi_2} + \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right); & M_{12} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Если учесть непрерывность функций усилий, моментов и перерезывающих сил внутри области Ω и на границах Γ_p , $p = 1, 2$, то функционал J_{Γ_p} имеет вид:

$$J_{\Gamma_p} = \int_{\substack{b_1 \\ (\xi_1=const)}}^{b_2} \left(T_{22}(v^- - v^+) + T_{12}(u^- - u^+) + M_{22}(w^-,_{\xi_2} - w^+,_{\xi_2}) + Q_{22}(w^- - w^+) \right) d\xi_2 + \\ + \int_{\substack{a_1 \\ (\xi_2=const)}}^{a_2} \left(T_{11}(u^- - u^+) + T_{12}(v^- - v^+) + M_{11}(w^-,_{\xi_1} - w^+,_{\xi_1}) + Q_{11}(w^- - w^+) \right) d\xi_1. \quad (10)$$

Здесь неизвестные функции U , $U_{\Gamma_p}^{(k)}$, T_{ij} , M_{ij} , Q_{ij} варьируются независимо внутри области Ω и на границах Γ , Γ_p^+ , Γ_p^- при $U_{\Gamma_p}^{(1)} = [u^- - u^+]$; $U_{\Gamma_p}^{(2)} = [v^- - v^+]$; $U_{\Gamma_p}^{(3)} = [w^- - w^+]$; $U_{\Gamma_p}^{(4)} = [\theta_i^- - \theta_i^+]$, где $U_{\Gamma_p}^k$ – скачки перемещений U и углов поворота $\theta_i = w_{, \xi_i}$; $i, j = 1, 2$; $p = 1, 2$; $k = \overline{1, 4}$.

Тогда, в силу независимости вектор-функции U_{Γ_p} условие $\delta J = 0$ может быть реализовано как

$$\delta_p J = 0 \quad \text{при условии} \quad \delta_{U_{\Gamma_p}} J_{\Gamma_p} = 0,$$

где $P = \{U, M_{ij}, T_{ij}, Q_{ij}\}$, или

$$\delta_{U_{\Gamma_p}} J_{\Gamma_p} = 0 \quad \text{при условии} \quad \delta_p J = 0.$$

Таким образом, задача о деформировании пластины с разрезом эквивалентна задаче о деформировании сплошной пластины со скачками перемещений U_{Γ_p} при условии:

$$\delta_{U_{\Gamma_p}} J_{\Gamma_p} = 0. \quad (11)$$

Из сформулированного условия (11) следуют равенства (4) на границе разреза Γ_p .

ОБОСНОВАНИЕ КОРРЕКТНОСТИ

Исследование корректности решения обратной задачи связано с оценкой непрерывности функционала J_{Γ_p} задачи (11).

Введем множество

$$\Theta = \left\{ \tilde{U}_{\Gamma_p}(\xi) \in C^1_{\Gamma}; \xi \in \Gamma_p; \tilde{U}_{\Gamma_p} \in W_{\Gamma_p}^{(3/2)}; \frac{\partial \tilde{U}_{\Gamma_p}}{\partial z} \in W_{\Gamma_p}^{(1/2)}; \underline{U} \leq \tilde{U}_{\Gamma_p} \leq \bar{U} \right\}, \quad p = 1, 2, \quad (12)$$

где $[\underline{U}, \bar{U}]$ – интервал изменения \tilde{U}_{Γ_p} ; $W_{\Gamma_p}^{1/2}$, $W_{\Gamma_p}^{3/2}$ – специальные функциональные пространства.

Множество, определяемое соотношением (12), является компактом в пространстве $W_{\Gamma_p}^{3/2}$, т.е. из любой последовательности $\{\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(n)}\} \subset \Theta$ можно выбрать хотя бы одну подпоследовательность $\{\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(n_m)}\} \subset \{\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(n)}\}$, которая сходится в норме пространства $W_{\Gamma_p}^{(3/2)}$ к некоторому элементу $\tilde{U}_{\Gamma_p}^0 \in \Theta$.

Для доказательства непрерывности функционала J_{Γ_p} необходимо сформулировать условия, при которых функция \tilde{U}_{Γ_p} , заданная на границе Γ_p , может быть продолжена внутрь области Ω как функция пространства $W_{2\Omega}^2$. Для формулировки условий введем пространство $W_{2\Gamma}^{(3/2)}$, определяемое как замыкание множества $U \in C_{\Gamma}^2$ в норме

$$\|U\|_{2\Gamma}^{(3/2)} = \|U\|_{L_{2\Gamma}} + \sum_{i=1}^2 \|U_{,\xi_i}\|_{L_{2\Gamma}} + \sum_{i=1}^2 \left(\iint_{\Gamma} \frac{|U_{,\xi_i}(N_1) - U_{,\xi_i}(N_2)|^2}{\rho^2(N_1, N_2)} dx_1 dx_2 \right).$$

Справедлива следующая теорема [10]:

Пусть $\Gamma \in C_{\Gamma}^2$. В этом случае, для того, чтобы $U \in W_{2\Omega}^{(2)}$ необходимо и достаточно, чтобы $U \in W_{2\Gamma}^{(3/2)}$. При этом имеют место неравенства

$$m \|U\|_{W_{2\Gamma}^{(3/2)}} \leq \|U\|_{W_{2\Omega}^{(2)}} \leq M \|U\|_{W_{2\Gamma}^{(3/2)}}.$$

Кроме того, имеют место соотношения:

из сходимости $\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(n)} \rightarrow \tilde{U}_{\Gamma_p}^0$ в $W_{2\Gamma}^{(1/2)}$ следует $\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(n)} \Rightarrow \tilde{U}_{\Gamma_p}^0$ в любом пространстве $L_{q\Gamma}$, $q \geq 1$;

из сходимости $\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(n)} \rightarrow \tilde{U}_{\Gamma_p}^0$ в $W_{2\Gamma}^{(3/2)}$ следует $\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(n)} \Rightarrow \tilde{U}_{\Gamma_p}^0$ в любом пространстве $L_{q\Gamma}$, $q \geq 1$

и справедливо $\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(n)} \Rightarrow \tilde{U}_{\Gamma_p}^0$ в пространстве $H_{\Gamma}^{0,\lambda}$.

Таким образом, если $U \in W_{2\Gamma}^{(1/2)}$, $U \in W_{2\Gamma}^{(3/2)}$, то существует ее продолжение внутрь области Ω , такое, что $U \in W_{2\Omega}^{(2)}$.

Следовательно, существует последовательность решений $\tilde{U}(x, U_{\Gamma_p}^{(n_m)}) \rightarrow \tilde{U}(x, U_{\Gamma_p}^0)$ в $W_{2\Omega}^2$, а также $\tilde{M}_{ij}(x, U_{\Gamma_p}^{(n_m)}) \rightarrow \tilde{M}_{ij}(x, U_{\Gamma_p}^0)$, $\tilde{Q}_{ij}(x, U_{\Gamma_p}^{(n_m)}) \rightarrow \tilde{Q}_{ij}(x, U_{\Gamma_p}^0)$.

Очевидно, что функционал J_{Γ_p} является конечным.

Учитывая, что множество Θ является компактом в пространстве $W_{\Gamma_p}^{(3/2)}$, из теоремы Вейерштрасса следует, что для функционала $J(\tilde{U}_{\Gamma_p})$ на множестве Θ задача минимизации имеет, по крайней мере, одно решение, и любая минимизирующая последовательность сходится к множеству $\Theta_* = \left\{ \tilde{U}_{\Gamma_p} \in \Theta, J(\tilde{U}_{\Gamma_p}) = J_*, J_* = \min J(\tilde{U}_{\Gamma_p}), U_{\Gamma_p} \in \Theta_* \right\}$ в норме пространства W_{Γ_p} .

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Сформулируем условие (11) как обратную задачу в виде:

$$U_{\Gamma_p} = \arg \min_{U_{\Gamma_p}} P_{\Gamma_p}^T P_{\Gamma_p}, \quad U \in U^* \quad (13)$$

при предварительном выполнении условия

$$\delta_p J = 0,$$

где $P_{\Gamma_p} = \{M_{ij}, T_{ij}, Q_{ij}\}$.

Для решения задачи (13) на решениях, удовлетворяющих условию $\delta_p J = 0$, осуществляется переход к дискретной модели пластины с использованием метода конечных элементов (МКЭ). Использование МКЭ для определения напряженно-деформированного состояния конструкции требует представления неизвестных функций прямой и обратной задачи в параметрическом виде.

Для этого на области Ω вводится сетка с узлами ξ_n , где $\xi = \{\xi_n\}$, $\xi_n = (\xi_{1n}, \xi_{2n})$, $n = \overline{1, N}$, тогда функции, характеризующие напряженно-деформированное состояние пластины, представляются в виде векторов, компонентами которых являются узловые значения функций $U = \{u_n, v_n, w_n, \theta_{in}\}$; $T = \{T_{ijn}\}$; $Q = \{Q_{ijn}\}$; $M = \{M_{ijn}\}$, $n = \overline{1, N}$.

Для описания границы разреза Γ_p вводится сетка ξ_k , где $\xi = \{\xi_k\}$, $\xi_k = (\xi_{1k}, \xi_{2k})$, $k = \overline{1, K}$ (все узлы ξ_k выбираются из числа ξ_n и находятся внутри области Ω), тогда функция $\tilde{U}(\xi)$, компонентами которой являются скачки перемещений и углов поворотов на линии разреза, представляется в виде вектора $\tilde{U}_{\Gamma_p} = \{\bar{u}_k, \bar{v}_k, \bar{w}_k, \bar{\theta}_{ik}\}$.

С использованием введенной дискретизации неизвестные функции задачи на элементе задаются для локальной системы координат при помощи аппроксимаций через узловые значения. После выполнения соответствующей процедуры интегрирования при заданной аппроксимации неизвестных функций, и процедуры суммирования матриц элементов, получаем разрешающую систему линейных алгебраических уравнений для определения узловых перемещений с учетом граничных условий:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ U_{\Gamma_p} \end{bmatrix} = [R],$$

где $K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$ – матрица жесткости системы; U – вектор неизвестных узловых перемещений внутри области Ω и на границе Γ ; U_{Γ_p} – неизвестные скачки перемещений, определяемые из решения задачи (13); R – вектор узловых значений правых частей.

Условие (13) в дискретной форме можно сформулировать следующим образом

$$\tilde{U}_{\Gamma_p} = \arg \min_{\tilde{U}_{\Gamma_p}} \Delta(\tilde{U}_{\Gamma_p}) \Delta^T(\tilde{U}_{\Gamma_p}), \tilde{U}_{\Gamma_p} \in Q, \quad (14)$$

где $\Delta(\tilde{U}_{\Gamma_p})$ – вектор невязки; при $\xi_1 = const$ вектор невязки составлен из компонент $\Delta(\tilde{U}_{\Gamma_p}) = \{T_{22}, T_{12}, M_{22}, Q_{22}\}$; при $\xi_2 = const$ – $\Delta(\tilde{U}_{\Gamma_p}) = \{T_{11}, T_{12}, M_{11}, Q_{11}\}$. Равенство нулю компонент вектора-невязки обеспечивает выполнение статических граничных условий на границе разреза Γ_p .

Реализация условия (14) осуществляется с использованием метода Ньютона

$$\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(m)} = \tilde{U}_{\Gamma_p}^{(m-1)} - \left[W(\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(m-1)}) \right]^{-1} \cdot G(\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(m-1)}), \quad (15)$$

где $[W(\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(m-1)})] = [A][A^T]$; $G = [A]\Delta^{(m-1)}$; $A = \left\{ \frac{\partial \Delta_i}{\partial \tilde{U}_{\Gamma_p}^{(m-1)}} \right\}$, $i, k = \overline{1, K}$ – матрица производных

невязки $\Delta(\tilde{U}_{\Gamma_p})$ по компонентам вектора неизвестных обратной задачи; m – шаг итерационного процесса.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Описанный подход к решению обратной задачи может быть реализован следующим алгоритмом:

1. Инициализировать переменные: m – номер шага итерационного процесса; $\tilde{U}_{\Gamma_p} = \{\bar{u}_k, \bar{v}_k, \bar{w}_k, \bar{\theta}_{ik}\}$ – вектор решения обратной задачи, составленный из значений скачков перемещений и углов поворота, $i = 1, 2$; $k = \overline{1, K}$.
2. Задать начальные значения: $m = 0$; $\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(0)}$.
3. Решить прямую задачу деформирования пластины с граничными условиями при известном векторе $\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(m)}$, получить векторы $T^{(m)} = \{T_{ijn}\}$; $Q^{(m)} = \{Q_{ijn}\}$; $M^{(m)} = \{M_{ijn}\}$, $n = \overline{1, N}$.
4. Сформировать вектор невязок $\Delta(\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(m)})$, проверить выполнение условия $\Delta(\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(m)}) > \varepsilon$, если условие выполняется, то перейти к шагу 5, иначе перейти к шагу 8.
5. Сформировать функционал (14), построить матрицу A .
6. $m = m + 1$.
7. Определить вектор $\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(m)}$ из итерационной формулы (15), перейти к шагу 3.
8. Конец.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Предложенный подход был применен к решению задач о деформировании тонкой стальной пластины с прямолинейным продольным разрезом ($a/b = 1$, $a/h = 100$, $E_{\text{пласт}} = 2 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$, $\mu = 0.3$; a, b, h – длина, ширина, толщина пластины). Разрез длины $\ell = 0.2a$ расположен в центре пластины при значении $\xi_2 = 0.5b$. Пластина находилась под действием нормальной распределенной нагрузки q и продольной нагрузки N , по контуру пластины реализованы условия жесткого защемления.

Решение краевой задачи для сплошной пластины и пластины с действительным разрезом выполнялось в пакете прикладных программ, реализующих метод конечных элементов. Для построения конечно-элементной модели пластины по существующей геометрической модели пластины с действительным разрезом использовалась упорядоченная сетка из четырехугольных элементов, создаваемая модулями пакета прикладных программ.

Конечно-элементная сетка строилась регулярной, размер конечного элемента определялся наперед заданной точностью решения задачи. Процесс выбора размера конечного элемента проходил путем процедуры последовательного сгущения сетки с целью получения стабильных результатов по основным показателям напряженно-деформированного состояния (НДС). В качестве критерия стабильности разница в значениях характеристик, при которой размер сетки считался достаточным, не превышала 2-3%. Для уточнения

характеристик НДС также осуществлялось сгущение сетки в областях, прилегающих к вершинам разреза.

На рис. 1 приведено распределение напряжений σ_{22} в сечении пластины, совпадающем с линией разреза (сплошная кривая соответствует сетке со сгущением в вершинах разреза, пунктирная кривая – регулярной сетке). Можно отметить, что, несмотря на комплекс мер, направленных на уточнение расчетной модели пластины с действительным разрезом, значения напряжений σ_{22} на берегах разреза, полученные в результате конечно-элементного расчета, отличны от нуля независимо от типа используемой сетки.

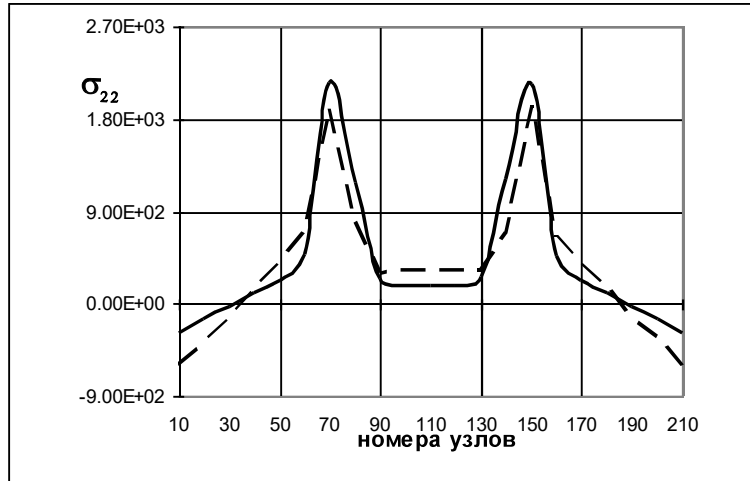


Рис. 1

Для устранения выявленного несоответствия картины НДС, полученной с использованием МКЭ, реальному поведению пластины с разрезом было проведено дополнительное уточнение параметров НДС, с использованием алгоритма (15). Для этого на берегах действительного разреза в узлах конечно-элементной сетки прикладывались значения скачков перемещений и углов поворота $\tilde{U}_{\Gamma_p} = \{\bar{u}_k, \bar{v}_k, \bar{w}_k, \bar{\theta}_{ik}\}$, далее эти значения уточнялись в итерационной процедуре метода Ньютона (15), критерием окончания итерационного процесса являлось выполнение статических граничных условий на берегах разреза. На рис. 2 приведено распределение напряжений σ_{22} в сечении пластины, совпадающем с линией разреза, полученное в результате выполнения итерационной процедуры (обозначено сплошной жирной линией), здесь же тонкой сплошной и пунктирной линиями приведены результаты, полученные на итерациях метода Ньютона. Можно отметить, что в результате выполнения итерационного процесса статические условия на берегах разреза выполняются.

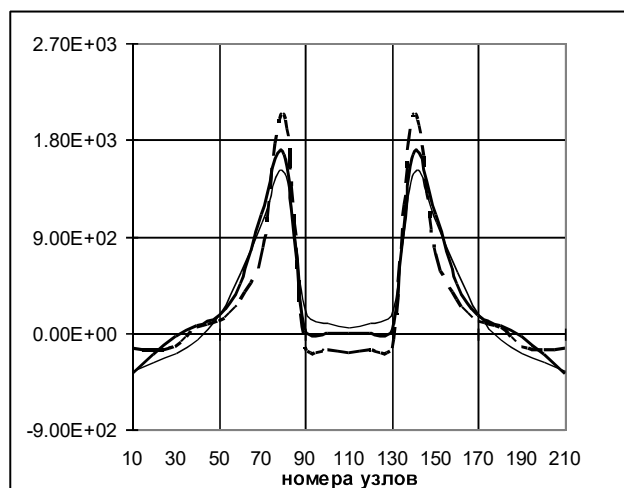


Рис. 2

Далее с использованием предложенного подхода выполнялось моделирование разреза в сплошной пластине путем определения значений компонент вектора U_{Γ_p} на линии разреза Γ_p . Для моделирования разреза на линии, имитирующей местоположение действительного разреза, прикладывались значения скачков перемещений и углов поворота $\tilde{U}_{\Gamma_p} = \{\bar{u}_k, \bar{v}_k, \bar{w}_k, \bar{\theta}_{ik}\}$. Эти значения образуют вектор неизвестных обратной задачи и уточняются в итерационном процессе (15). При выполнении итерационной процедуры контролировалось выполнение статических условий на берегах разреза.

На рис. 3а и 3б представлены результаты моделирования разреза в пластине с помощью изложенного алгоритма на основе модели сплошной пластины при разных уровнях действующей нагрузки. Рис. 3а соответствует случаю линейного деформирования пластины, рис. 3б – случаю нелинейного деформирования. В качестве характеристики НДС приведено распределение напряжений σ_{22} в сечении пластины, совпадающем с линией разреза. Итерациям метода Ньютона соответствуют тонкие сплошные линии, сплошной жирной линией показаны напряжения, которые соответствуют критерию окончания итерационного процесса.

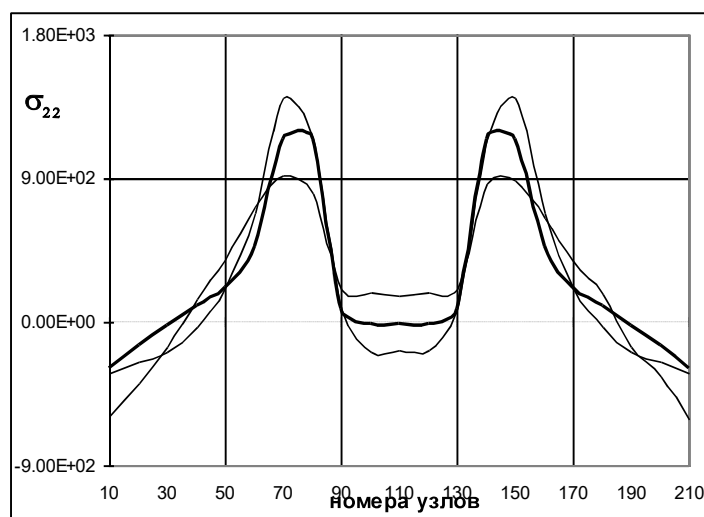


Рис. 3а

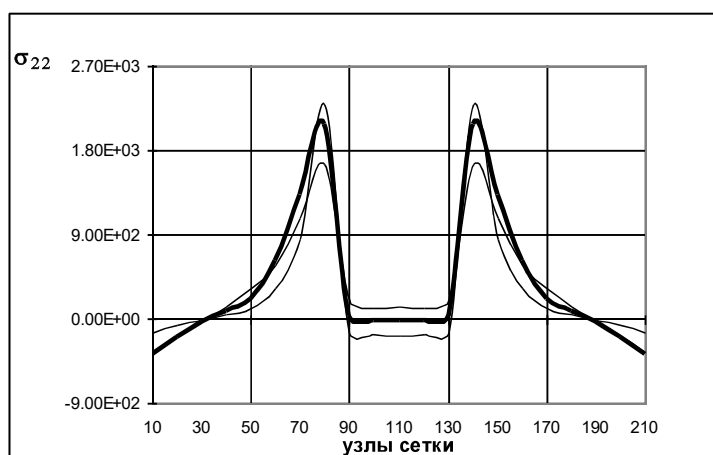


Рис. 3б

Подход, предложенный для моделирования поведения пластины с разрезом на основе модели сплошной пластины, обеспечивает выполнение статических условий на линии разреза независимо от характера деформирования.

ВЫВОДЫ

В работе предложен подход к моделированию разрезом (трещин) в тонких пластинах, основанный на задании статических условий на линии, совпадающей с берегом разреза; для имитации выполнения статических условий на линии разреза использована вариационная постановка задачи деформирования пластины в сочетании с формулировкой ее как обратной задачи; в качестве вектора неизвестных обратной задачи выбраны значения скачков перемещений и углов поворота на линии разреза; разработан алгоритм решения, позволяющий в итерационном процессе определять вектор скачков перемещений и углов поворота, обеспечивающий выполнение статических граничных условий; с использованием предложенного подхода возможно как имитировать разрез в сплошной пластине, так и уточнить картину напряженно-деформированного состояния пластины с действительным разрезом, полученную с использованием метода конечных элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. П. Саврук. – К. : Наук. думка, 1981. – 324 с.
2. Dovbnya K. M. Studies on the Stress State of an Orthotropic Shell of Arbitrary Curvature with the Through Crack Under Bending Loading / K. M. Dovbnya, N. A. Shevtsova // *Strength of Materials*. – 2014. – Vol.46, iss. 3. – P. 345-349.
3. Пастернак Я. М. Розв'язування методами інтегральних рівнянь задач антиплоского деформування тіл із тонкими стрічковими включеннями. II. Аналіз концентрації та інтенсивності напружень / Я. М. Пастернак, Г. Т. Сулим // *Фіз.-хім. мех. матеріалів*. – 2012. – 48, № 6. – С. 86-91.
4. Wen P. H. A variational approach for evaluation of stress intensity factors using the element free Galerkin method / P. H. Wen, M. H. Aliabadi // *Int. J. Solids Struct.* – 2011. – Vol. 48, iss. 7-8. – P. 1171-1179.
5. Alwar R. S. Influence of crack closure on the stress intensity factor for plates subjected to bending – A 3-D finite element analysis / R. S. Alwar, K. N. Ramachandran Nambissan // *Eng. Fracture Mech.* – 1983. – Vol. 17, iss. 4. – P. 323-333.
6. Зайцев Б. Ф. Методика моделирования трещин с контактирующими берегами на основе метода конечных элементов / Б. Ф. Зайцев, Н. Г. Шульженко, А. В. Асаенко // *Вісник НТУ «ХП»*: Серія «Динаміка та міцність машин». – 2007. – № 22. – С. 48-61.
7. Song J. A comparative study on finite element methods for dynamic fracture / J. Song, H. Wang, T. Belytschko // *Comput. Mech.* – 2008. – Vol. 42. – С. 239-250.
8. Dolbow J. An efficient finite element method for embedded interface problems / J. Dolbow, I. Harari // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 2009. – Vol. 78, iss. 2. – P. 229-252.
9. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами / В. А. Осадчук. – К. : Наукова думка, 1985. – 221 с.
10. Ворович И. И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек / И. И. Ворович. – М. : Наука, 1989. – 373 с.

REFERENCES

1. Savruk, M.P. (1981), *Dvumernye zadachi uprugosti dlia tel s treshchinami* [Two-dimensional elasticity problem for bodies with cracks], Nauk. dumka, Kiev.
2. Dovbnya, K.M. and Shevtsova, N.A. (2014), “Studies on the Stress State of an Orthotropic Shell of Arbitrary Curvature with the Through Crack Under Bending Loading”, *Strength of Materials*, vol. 46, iss. 3, pp. 345-349.

3. Pasternak, Ya.M. and Sulim, G.T. (2012), "Solving problems means non-plate integral equations of deformation of thin belt body inclusions. II. Analysis of concentration and intensity", *Fiz.-khim. mekh. materialiv*, 48, no. 6, pp. 86-91.
4. Wen, P.H. and Aliabadi, M.H. (2011), "A variational approach for evaluation of stress intensity factors using the element free Galerkin method", *Int. J. Solids Struct.*, vol. 48, iss. 7-8, pp. 1171-1179.
5. Alwar, R.S. and Ramachandran Nambissan, K.N. (1983), "Influence of crack closure on the stress intensity factor for plates subjected to bending – A 3-D finite element analysis", *Eng. Fracture Mech.*, vol. 17, iss. 4, pp. 323-333.
6. Zaytsev, B.F., Shulzhenko, N.G. and Asaenok, A.V. (2007), "Methods of modeling of cracks in contact with the banks on the basis of the finite element method", *Visnik NTU "HPI": Seriya "Dinamika ta mitsnist mashin"*, no. 22, pp. 48-61.
7. Song, J., Wang, H. and Belytschko, T. (2008), "A comparative study on finite element methods for dynamic fracture", *Comput. Mech.*, vol. 42, pp. 239-250.
8. Dolbow, J. and Harari, I. (2009), "An efficient finite element method for embedded interface problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 78, iss. 2, pp. 229-252.
9. Osadchuk, V.A. (1985), *Napriazhenno-deformirovannoe sostoianie i predelnoe ravnovesie obolochek s razrezami* [Stress-strain state and limit equilibrium of shells with cuts], Naukova dumka, Kiev.
10. Vorovich, I.I. (1989), *Matematicheskie problemy nelineinoi teorii pologikh obolochek* [Mathematical problems of the nonlinear theory of shallow shells], Nauka, Moscow.

УДК 519.8

О ГРАНЯХ ОБЩЕГО ПЕРЕСТАНОВОЧНОГО МНОГОГРАННИКА

Емец О. А., д. ф.-м. н., профессор, Емец А. О., к. ф.-м. н., доцент, Поляков И. М.

*Полтавский университет экономики и торговли,
ул. Коваля, 3, Полтава, Украина*

yemetsli@ukr.net, yemets2008@ukr.net

В статье рассматриваются новые свойства для граней общего перестановочного многогранника. На основе критерия m -границ общего перестановочного многогранника в прямой форме получен новый критерий m -границ общего перестановочного многогранника в симметричной форме.

Ключевые слова: перестановочный многогранник, грани многогранника, выпуклая оболочка, перестановки.

ПРО ГРАЊІ ЗАГАЛЬНОГО ПЕРЕСТАНОВОЧНОГО МНОГОГРАННИКА

Ємець О. О., д. ф.-м. н., професор, Ємець Ол-ра О., к. ф.-м. н., доцент, Поляков І. М.

*Полтавський університет економіки і торгівлі,
вул. Коваля, 3, Полтава, Україна*

yemetsli@ukr.net, yemets2008@ukr.net

У статті розглядаються нові властивості для граней загального перестановочного многогранника. На основі критерію m -грані загального перестановочного многогранника у прямій формі одержано новий критерій m -грані загального перестановочного многогранника в симетричній формі.

Ключеві слова: перестановочний многогранник, грані многогранника, випукла оболонка, перестановки.