19. Yemets, O.A. (1983), "General Polyhedron of Permutations and Some of Its Properties", Dep. in UkrNIINTI 28.06.83, № 616-UkD 83, Poltava.

20. Yemets, O.A. (1989), "About General Polyhedron of Permutations and Some of Its Properties, Poltava civil engineering institute", Dep. in UkrNIINTI 31.10.89, № 2362-Uk-89, Polt. inzh.-stroit. in-t., Poltava.

21. Yemets, O.A. (1990), "About Geometrical Properties of the Set of Permutations", *Tezisy dokl. 42 nauchn. konf. prof., prepod., nauch. rabotn., aspir. i student. in-ta* [Proc. 42th Sci. Conf. of Professors, Teachers, Scientists, Post graduate Students and Students of the Institute], Minvuz USSR, Polt. inzh.-stroit. in-t., Poltava, 1990, p. 215.

22. Bondarenko, V.A. and Shunikova, E.V. (1985), "Generalized Polyhedrons of Permutation and Properties of Sort Algorithms", *Zhurnal vychisl. matem. i matem. fiziki*, Moscow, Dep. in VINIGI № 7454-V85.

УДК 531:383-62:50

ПРО АСИМПТОТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ЛЯПУНОВА ТА РІККАТІ ДЛЯ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНИХ СИСТЕМ

[1]Зінчук М. О., к. т. н., [2]Святовець І. Ф.,[3]Тетерятник О. В.

[1,3]*Інститут математики НАН України,*
вул. Терещенківська, 3, Київ-4, 301601, Україна

[2]*Запорізька державна інженерна академія,*
просп. Соборний, 226, Запоріжжя, 69006, Україна

sv.irina0702@gmail.com, E.Teteryatnik@gmail.com

Розглянуто неперервні та дискретні майже консервативні автономні та керовані системи, які за допомогою деякого ортогонального перетворення зводяться до канонічних форм. Для перетворених систем побудовані рівняння Ляпунова та Ріккаті і показано, при яких значеннях параметра ε їх асимптотичні розв'язки коректні, тобто відповідні ряди збіжні. За допомогою зворотного перетворення отримана збіжність аналогічних рядів для початкових систем.

Ключові слова: майже консервативна система, рівняння Ляпунова і Ріккаті, асимптотичні рішення, збіжність рядів.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ЛЯПУНОВА И РИККАТИ ДЛЯ ПОЧТИ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

[1]Зинчук Н. А., к. т. н., [2]Святовец И. Ф., [3]Тетерятник Е. В.

[1,3]*Институт математики НАН Украины,*
ул. Терещенковская, 3, Киев-4, 301601, Украина

[2]*Запорожская государственная инженерная академия,*
просп. Соборный, 226, Запорожье, 69006, Украина

sv.irina0702@gmail.com, E.Teteryatnik@gmail.com

Рассмотрены непрерывные и дискретные почти консервативные автономные и управляемые системы, которые с помощью некоторого ортогонального преобразования сводятся к каноническим формам. Для преобразованных систем построены уравнения Ляпунова и Риккати и показано, при каких значениях параметра ε их асимптотические решения корректны, то есть соответствующие ряды сходящиеся. С помощью обратного преобразования получена сходимость аналогичных рядов для начальных систем.

Ключевые слова: почти консервативная система, уравнения Ляпунова и Риккати, асимптотические решения, сходимость рядов.

ON ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF MATRIX EQUATIONS LYAPUNOV AND RICCATI FOR ALMOST CONSERVATIVE SYSTEMS

[1]Zinchuk, M. O., Ph.D. in Engineering, [2]Svyatovets I. F., [3]Teteryatnik O. V.

[1,3]*In-t of Mathematics of NAS of Ukraine,*
3, Tereschenkivska str., Kiev-4, 301601, Ukraine

[2]*Zaporizhzhya State Engineering Academy,*
Sobornyi Ave., 226, Zaporizhzhya, 69006, Ukraine

sv.irina0702@gmail.com, E.Teteryatnik@gmail.com

In the article are considered the continuous and discrete almost conservative autonomous and controlled systems that are reduced to the canonical form using some orthogonal transformation. For transformed systems, Lyapunov and Rikkati equations are constructed and is shown in which parameter ε values asymptotic solutions are correct, i.e. corresponding series are convergent. Using the reverse transformation the convergence of similar series for initial systems is obtained.

Key words: almost conservative system, Lyapunov and Riccati equations, asymptotic solutions, convergence of the series.

ВСТУП

У працях [1-3] розглянуто дослідження матричного рівняння Ляпунова для майже консервативних систем, а публікації [4-6] присвячені оптимальному керуванню такими системами та дослідженню відповідного рівняння Ріккаті. Для пошуку розв'язків матричних рівнянь Ляпунова і Ріккаті останні розкладаються в нескінченні системи матричних рівнянь, а відповідні розв'язки в нескінченні ряди. Тому, природньо, постає задача про збіжність цих рядів. У названих працях це питання висвітлено не достатньо широко і строго.

Запропоноване дослідження має заповнити цю прогалину. Нижче розглянуто неперервні та дискретні майже консервативні автономні і керовані системи, які за допомогою деякого ортогонального перетворення зводяться до канонічних форм. Потім для перетворених систем побудовано рівняння Ляпунова та Ріккаті і показано, при яких значеннях параметра ε їх асимптотичні розв'язки коректні, тобто відповідні ряди збіжні. За допомогою зворотного перетворення легко отримати збіжність аналогічних рядів для початкових систем.

1. АСИМПТОТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ЛЯПУНОВА ТА РІККАТІ ДЛЯ НЕПЕРЕРВНИХ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНИХ СИСТЕМ

1. Розглянемо лінійну стаціонарну неперервну асимптотично стійку майже консервативну систему

$$\dot{y} = \left(\tilde{A}_0 + \varepsilon \tilde{A}_1\right) y, \quad y(t_0) = y_0, \tag{1}$$

де $y \in \Re_{2n}$ – вектор стану, $\tilde{A}_0 = -\tilde{A}_0^T \in \Re_{2n\times 2n}$ – кососиметрична невироджена матриця загального вигляду, $\tilde{A}_1 \in \Re_{2n\times 2n}$ – стала матриця збурення, $\varepsilon > 0$ – малий параметр.

За допомогою деякого ортогонального перетворення $x = Ty$ від системи (1) перейдемо до [2]:

$$\dot{x} = \left(A_0 + \varepsilon A_1\right) x, \quad x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

де $x_0 = Ty_0$, $A_1 = T\tilde{A}_1 T^T$, а матриця $\tilde{A}_0$ зведена до блочно-діагональної форми [8]

$$A_0 = T\tilde{A}_0 T^T = diag\{G_1, G_2, \ldots, G_r\}, \tag{3}$$

де $G_i = diag\{S_i, \ldots, S_i\}$, $G_i \in \Re_{2n_i \times 2n_i}$, $S_i = \begin{bmatrix} 0 & \varphi_i \\ -\varphi_i & 0 \end{bmatrix} \in \Re_{2\times 2}$, $\varphi_i \neq \varphi_j$, для $i \neq j$ $(i, j = 1, \ldots, r)$, $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$.

Оскільки система (1) асимптотично стійка, то виконується нерівність $\mathrm{Re}\left(A_0+\varepsilon A_1\right)<0$ та існує додатно означена симетрична матриця – розв'язок $P\in\Re_{2n\times 2n}$ матричного рівняння Ляпунова [7]

$$P\left(A_0+\varepsilon A_1\right)+\left(A_0+\varepsilon A_1\right)^T P=-2Q, \tag{4}$$

де $Q\in\Re_{2n\times 2n}$ – деяка невід'ємно означена матриця.

У [1] показано, що матриці P і Q можна вибрати у вигляді степеневих рядів за малим параметром ε

$$P=P_0+\varepsilon P_1+\varepsilon^2 P_2+\ldots,\quad Q=Q_0+\varepsilon Q_1+\varepsilon^2 Q_2+\ldots\,. \tag{5}$$

Матричне рівняння (4) еквівалентне нескінченній системі матричних алгебраїчних рівнянь [1]:

$$A_0P_0-P_0A_0=0\,, \tag{6}$$

$$\begin{gathered} A_0P_1-P_1A_0=P_0A_1+A_1^TP_0+2Q_1\,,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ A_0P_i-P_iA_0=P_{i-1}A_1+A_1^TP_{i-1}+2Q_i\,,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered} \tag{7}$$

Позначимо [2]

$$P_k=\begin{bmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ P_{1n}^T & \cdots & P_{nn}\end{bmatrix}_k,\quad D_k=\begin{bmatrix} D_{11} & \cdots & D_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ D_{1n}^T & \cdots & D_{nn}\end{bmatrix}_k=P_{k-1}A_1+A_1^TP_{k-1}+2Q_k\,, \tag{8}$$

$D_{ij},P_{ij}\in\Re_{2\times 2}$, $i,j=1,\ldots,n,k=1,2,\ldots$. Матриця нульового наближення має такий вигляд

$$P_0=diag\left\{W_1,\ldots,W_r\right\}, \tag{9}$$

де блоки $W_l,\ l=1,\ldots,r$ спеціальної структури. Тоді блоки $P_{ij}=\begin{bmatrix} c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{bmatrix}$ можна визначити за однією з трьох формул

$$\begin{gathered} c_1=\frac{\varphi_j d_2-\varphi_i d_3}{\varphi_i^2-\varphi_j^2},\quad c_2=\frac{-\varphi_j d_1-\varphi_i d_4}{\varphi_i^2-\varphi_j^2},\\ c_3=\frac{\varphi_j d_1+\varphi_i d_4}{\varphi_i^2-\varphi_j^2},\quad c_4=\frac{\varphi_j d_2-\varphi_i d_3}{\varphi_i^2-\varphi_j^2}; \end{gathered}, \tag{10}$$

$$c_4-c_1=\frac{d_2}{\varphi_i},\quad c_3=c_2=\frac{d_1}{2\varphi_i}; \tag{11}$$

$$c_4-c_1=\frac{d_2}{\varphi_i},\quad c_2+c_3=\frac{d_1}{\varphi_i}, \tag{12}$$

де $D_{ij}=\begin{bmatrix} d_1 & d_2\\ d_3 & d_4\end{bmatrix}_{ij}$. Тут блоки P_{ij},D_{ij} для кожного k свої.

З формул (10)-(12) випливає, що при нерівностях $\varphi_i \neq \varphi_j, \varphi_i \neq 0$, які виконуються за умовою, значення відношення максимального по модулю з обчислених параметрів c_i, $i = 1,...,4$ до ненульового мінімального по модулю з параметрів, обчислених на попередньому кроці (від них залежать значення d_i, $i = 1,...,4$), будуть обмеженими.

Параметри c_i, які не набули значень за формулами (11), (12), обчислюються з наступної системи рівнянь, що формуються з елементів матриці D_k за необхідними та достатніми умовами розв'язності k-го рівняння [2]

$$\begin{aligned} d_1^{lj} + d_4^{lj} = 0, \quad j \geq l = 1,...,n_i, \\ d_2^{lj} - d_3^{lj} = 0, \quad j > l = 1,...,n_i - 1, \end{aligned} \tag{13}$$

де $\begin{bmatrix} d_1^{lj} & d_2^{lj} \\ d_3^{lj} & d_4^{lj} \end{bmatrix} = d_{lj}$, $d_2^{ll} = d_3^{ll}$. Матриці Q_k задаються конкретні числові, якщо розв'язність цієї системи не залежить від них, або структурно (наприклад, діагональні) з вільними параметрами, яким надаються конкретні значення, виходячи з умов її розв'язності. Відношення максимального по модулю зі значень розв'язку системи (13) до ненульового мінімального по модулю із коефіцієнтів (вони залежать від розв'язку на попередньому кроці) будуть обмеженими. Умова обмеженості виконується, враховуючи зауваження щодо c_i, $i = 1,...,4$, послідовно для $k = 1,2,...$. Параметри, що залишаються вільними, вважаємо обмеженими.

Отже, з наведених вище міркувань випливає обмеженість відношень матричних норм $\frac{\|P_{i+1}\|}{\|P_i\|} \leq \delta < \infty$, $i = 0,1,...$, де δ - деяке додатне число. Тоді при $\varepsilon\delta < 1$ ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \|P_i\|$ збігається. Дійсно, із послідовності нерівностей

$$\frac{\|P_1\|}{\|P_0\|} \leq \delta, \ \frac{\|P_2\|}{\|P_1\|} \leq \delta, ..., \ \frac{\|P_{i+1}\|}{\|P_i\|} \leq \delta, ..., \tag{14}$$

помноживши ліві та праві частини, отримуємо

$$\|P_i\| \leq \delta^i \|P_0\|, \quad i = 1,2,... \tag{15}$$

або

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \|P_i\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \delta^i \|P_0\| = \frac{1}{1 - \varepsilon\delta} \|P_0\|. \tag{16}$$

З (16) та [9, с.141] випливає збіжність ряду $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i P_i$. Для деякого l виконується $P_l = 0$, тоді в ряду (14) замість відношень $\frac{\|P_i\|}{\|P_{i-1}\|} \leq \delta$, $\frac{\|P_{i+1}\|}{\|P_i\|} \leq \delta$ буде стояти $\frac{\|P_{i+1}\|}{\|P_{i-1}\|} \leq \delta^2$. Водночас, нерівності (15) виконуються всі.

Оскільки матриці $Q_i, i = 1,2,...$ вибираємо, то для них виконуються нерівності $\frac{\|Q_{i+1}\|}{\|Q_i\|} \leq \theta < \infty, i = 1,2,...$, де θ - деяке додатне число. Тоді ряди $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \|Q_i\|$ та $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Q_i$ при $\varepsilon\theta < 1$ збігаються. Отже, при виборі $\varepsilon < \min\left\{\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\theta}\right\}$ збігаються.

Покажемо, що розв'язки $\tilde{P}, \tilde{Q}$ відповідного матричного рівняння Ляпунова для початкової системи (1), записані у вигляді подібному до (5), збігаються при деяких значеннях параметра ε. Помножимо (4) зліва на матрицю T, а справа на T^T отримаємо

$$\tilde{P}\left(\tilde{A}_0+\varepsilon\tilde{A}_1\right)+\left(\tilde{A}_0+\varepsilon\tilde{A}_1\right)^T\tilde{P}=-2\tilde{Q}, \qquad (17)$$

де $\widetilde{P}=TPT^T$, $\widetilde{Q}=TQT^T$. Тоді із $\|T\|<\infty$, $\left\|T^T\right\|<\infty$ і (16) при $\varepsilon\theta<1$ маємо

$$\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\left\|\widetilde{P}_i\right\|=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\left\|TP_iT^T\right\|\le\omega\|P_0\|\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\delta^i=\frac{\omega}{1-\varepsilon\delta}\|P_0\|, \qquad (18)$$

де $\omega=\|T\|\left\|T^T\right\|<\infty$. Співвідношення (18) показує збіжність ряду $\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\widetilde{P}_i$. Коректність асимптотичного розкладу для матриці $\widetilde{Q}$ показується подібним чином.

2. Розглянемо лінійну стаціонарну неперервну керовану майже консервативну систему

$$\dot{y}=\left(\tilde{A}_0+\varepsilon\tilde{A}_1\right)y+\varepsilon\tilde{B}u, \quad y(t_0)=y_0, \qquad (19)$$

де $y\in\Re_{2n}$ – вектор стану, $\widetilde{A}_0=-\widetilde{A}_0^T\in\Re_{2n\times 2n}$ – кососиметрична невироджена матриця, $\widetilde{A}_1\in\Re_{2n\times 2n}$ – стала матриця збурення, $u\in\Re_m$ – вектор керування, $\widetilde{B}\in\Re_{2n\times m}$ – матриця при керуванні, $\varepsilon>0$ – малий параметр.

Аналогічно до попереднього за допомогою деякого ортогонального перетворення $x=Ty$ від системи (19) перейдемо до [5]:

$$\dot{x}=\left(A_0+\varepsilon A_1\right)x+\varepsilon Bu, \quad x(t_0)=x_0, \qquad (20)$$

де $x_0=Ty_0$, $A_1=T\widetilde{A}_1T^T$, $B=T\widetilde{B}$, а матриця $\widetilde{A}_0$ зведена до блочно-діагональної форми A_0 (3).

Будемо шукати оптимальний регулятор для (19) у вигляді зворотного зв'язку за станом

$$u=-Kx \qquad (21)$$

з квадратичним критерієм якості

$$J=\int_0^{\infty}\left(x^TQx+u^TRu\right)dt, \qquad (22)$$

де $K\in\Re_{m\times 2n}$ – деяка стала матриця, $R\in\Re_{m\times m}$ – додатно означена матриця, а $Q\in\Re_{n\times n}$ – невід'ємно означена матриця.

Регулятор (21) буде оптимальним [7], якщо

$$K=\varepsilon R^{-1}B^TS, \qquad (23)$$

де $S\in\Re_{2n\times 2n}$ – симетрична додатно означена матриця-розв'язок матричного рівняння Ріккаті

$$\left(A_0+\varepsilon A_1\right)^TS+S\left(A_0+\varepsilon A_1\right)-\varepsilon^2SBR^{-1}B^TS+Q=0.$$

Тут Q та R – матриці з (22).

Введемо заміну [10] $P=\varepsilon S$, тоді прийдемо до наступного еквівалентного матричного рівняння Ріккаті:

$$\left(A_0+\varepsilon A_1\right)^T P+P\left(A_0+\varepsilon A_1\right)-\varepsilon PBR^{-1}B^T P+\varepsilon Q=0. \tag{24}$$

Виходячи з (24), матрицю - розв'язок P будемо шукати у вигляді розкладу за параметром ε (5). Матрицю Q зобразимо у вигляді подібного розкладу.

Від параметричного матричного рівняння Ріккаті, підставляючи (5) в (24) і порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε, доходимо до нескінченної системи матричних рівнянь типу Ріккаті

$$A_0P_0-P_0A_0=0, \tag{25}$$

$$\begin{gathered}
A_0P_1-P_1A_0=P_0A_1+A_1^TP_0-P_0BR^{-1}B^TP_0+Q_0,\\
A_0P_2-P_2A_0=P_1A_1+A_1^TP_1-P_1BR^{-1}B^TP_0-P_0BR^{-1}B^TP_1+Q_1,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A_0P_k-P_kA_0=P_{k-1}A_1+A_1^TP_{k-1}-\sum_{i=1}^{k}P_{i-1}BR^{-1}B^TP_{k-i}+Q_{k-1},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered} \tag{26}$$

Позначимо [5]

$$\begin{gathered}
P_k=\begin{bmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ P_{1n}^T & \cdots & P_{nn}\end{bmatrix}_k,\\
D_k=\begin{bmatrix} D_{11} & \cdots & D_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ D_{1n}^T & \cdots & D_{nn}\end{bmatrix}_k=P_{k-1}A_1+A_1^TP_{k-1}-\sum_{i=1}^{k}P_{i-1}BR^{-1}B^TP_{k-i}+Q_{k-1},
\end{gathered} \tag{27}$$

$D_{ij},P_{ij}\in\Re_{2\times 2}$, $i,j=1,\ldots,n, k=1,2,\ldots$. Матриця P_0 має структуру (9).

Оскільки ліві частини рівнянь системи (26) збігаються з лівими частинами відповідних рівнянь системи (7), то блоки P_{ij} обчислюються за формулами (10)-(12), а вільні параметри з системи (13). При $k=1$ система (13) складається з нелінійних рівнянь, для якої відношення максимального по модулю зі значень розв'язків до ненульового мінімального по модулю із коефіцієнтів, як і для лінійних рівнянь, будуть обмеженими. Тоді, виходячи з міркувань, наведених у попередньому пункті, матимемо збіжність рядів (5) для $\varepsilon<\min\left\{\frac{1}{\delta},\frac{1}{\theta}\right\}$.

Аналогічно до попереднього (співвідношення (18)) можна показати, що розв'язки $\widetilde{P}$, $\widetilde{Q}$ відповідного матричного рівняння Ріккаті для початкової системи (19), записані у вигляді, подібному до (5), збігаються при деяких значеннях параметра ε. Для цього необхідно помножити (24) зліва на матрицю T^T, а справа на T і розглянути матриці $\widetilde{P}=T^TPT$, $\widetilde{Q}=T^TQT$, як це було показано вище.

2. АСИМПТОТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ЛЯПУНОВА ТА РІККАТІ ДЛЯ ДИСКРЕТНИХ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНИХ СИСТЕМ

1. Розглянемо дискретну лінійну стаціонарну асимптотично стійку майже консервативну систему

$$y(k+1)=\left(\tilde{F}_0+\varepsilon\tilde{F}_1\right)y(k),\quad y(0)=y_0,\quad k=0,1,\ldots, \tag{28}$$

де $y \in \Re_n$ – вектор стану, $\widetilde{F}_0$ – ортогональна матриця $\left(\widetilde{F}_0^T \widetilde{F}_0 = \widetilde{F}_0 \widetilde{F}_0^T = I\right)$, $\widetilde{F}_1 \in \Re_{n\times n}$ – довільна стала матриця, $\varepsilon > 0$ – малий параметр.

За допомогою деякого ортогонального перетворення $x = Ty$ від системи (28) перейдемо до [3]:

$$x(k+1) = (F_0 + \varepsilon F_1)x(k), \quad x(0) = x_0, \tag{29}$$

де $x_0 = Ty_0$, $F_1 = T\widetilde{F}_1 T^T$, а матриця $\widetilde{F}_0$ зведена до блочно-діагональної форми [8]

$$F_0 = T\widetilde{F}_0 T^T = diag\{G_1, G_2, \ldots, G_r\}, \tag{30}$$

де $G_1 = I \in \Re_{2n_1\times 2n_1}$, $G_2 = -I \in \Re_{2n_2\times 2n_2}$, $G_i = diag\{S_i, \ldots, S_i\}$, $G_i \in \Re_{2n_i\times 2n_i}$, $S_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{bmatrix} \in \Re_{2\times 2}$,

$a_i^2 + b_i^2 = 1$, $b_i \neq b_j$, для $i \neq j$ $(i, j = 1, \ldots, r)$, $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$.

Перетворена система (29) також асимптотично стійка, тому власні значення матриці коефіцієнтів $F_0 + \varepsilon F_1$ лежать в одиничному крузі та існує додатно визначена матриця $P \in \Re_{n\times n}$, яка задовольняє матричне рівняння Ляпунова [7]

$$\left[F_0 + \varepsilon F_1\right]^T P\left[F_0 + \varepsilon F_1\right] - P = -Q, \tag{31}$$

де $Q \in \Re_{n\times n}$ – деяка невід'ємно визначена матриця.

Виходячи з вигляду рівняння (31), будемо шукати матриці-розв'язки P і Q у вигляді степеневих рядів за малим параметром ε (5). Від рівняння (31) перейдемо до нескінченної системи матричних рівнянь

$$P_0 - F_0^T P_0 F_0 = 0, \tag{32}$$

$$\begin{gathered}
P_1 - F_0^T P_1 F_0 = F_0^T P_0 F_1 + F_1^T P_0 F_0 + Q_1, \\
P_2 - F_0^T P_2 F_0 = F_0^T P_1 F_1 + F_1^T P_1 F_0 + F_1^T P_0 F_1 + Q_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_k - F_0^T P_k F_0 = F_0^T P_{k-1} F_1 + F_1^T P_{k-1} F_0 + F_1^T P_{k-2} F_1 + Q_k, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered} \tag{33}$$

Позначимо [3]

$$\begin{gathered}
P_k = \begin{bmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{1n}^T & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix}_k, \\
D_k = \begin{bmatrix} D_{11} & \cdots & D_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{1n}^T & \cdots & D_{nn} \end{bmatrix}_k = F_0^T P_{k-1} F_1 + F_1^T P_{k-1} F_0 + F_1^T P_{k-2} F_1 + Q_k, P_{-1} = 0, k = 1, 2, \ldots,
\end{gathered} \tag{34}$$

де $D_{ij}, P_{ij} \in \Re_{2\times 2}$, $j \geq i = 3, \ldots, m$, $D_{11}, D_{12}, D_{22} \in \Re$, $D_{ij} \in \Re_{1\times 2}$ $i = 1, 2, j = 3, \ldots, m$. Матриця P_0 має структуру (9). Тоді блоки P_{ij} можна визначити за однією з формул:

$$c_1 = \frac{d_1}{2} + \frac{b_i d_3 - b_j d_2}{2\left(a_i - a_j\right)}, \quad c_2 = \frac{d_2}{2} + \frac{b_i d_4 + b_j d_1}{2\left(a_i - a_j\right)},$$
$$c_3 = \frac{d_3}{2} - \frac{b_i d_1 + b_j d_4}{2\left(a_i - a_j\right)}, \quad c_4 = \frac{d_4}{2} - \frac{b_i d_2 - b_j d_3}{2\left(a_i - a_j\right)}; \tag{35}$$

$$c_1 - c_4 = d_1 - \frac{a_i}{b_i} d_2, \quad c_3 = c_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a_i}{b_i} d_1 + d_2\right); \tag{36}$$

$$c_1 - c_4 = d_1 - \frac{a_i}{b_i} d_2, \quad c_2 + c_3 = \frac{a_i}{b_i} d_1 + d_2, \tag{37}$$

де $P_{ij} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}_{ij}$, $D_{ij} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{bmatrix}_{ij}$;

$$P_{12} = \frac{1}{2} D_{12}; \tag{38}$$

$$c_1 = \frac{\left(1 - a_j\right) d_1 - b_j d_2}{2\left(1 - a_j\right)}, \quad c_2 = \frac{\left(1 - a_j\right) d_2 + b_j d_1}{2\left(1 - a_j\right)}; \tag{39}$$

$$c_1 = \frac{\left(1 + a_j\right) d_1 + b_j d_2}{2\left(1 + a_j\right)}, \quad c_2 = \frac{\left(1 + a_j\right) d_2 - b_j d_1}{2\left(1 + a_j\right)}, \tag{40}$$

де $P_{ij} = \left[c_1 \quad c_2\right]_{2j}$, $D_{ij} = \left[d_1 \quad d_2\right]_{2j}$, $i = 1,2$;

$$0 \equiv P_{ii} - P_{ii} = -D_{ii}, \quad i = 1,2. \tag{41}$$

Відзначимо, що блоки P_{ij}, D_{ij} для кожного k свої.

З формул (35)-(41) випливає, що при нерівностях $a_i \neq a_j$, $a_i \neq \pm 1$, $b_i \neq 0$, які виконуються за умовою, значення відношення максимального по модулю з обчислених параметрів c_i, $i = 1,...,4$ до ненульового мінімального по модулю з параметрів, обчислених на попередньому кроці (від них залежать значення d_i, $i = 1,...,4$), будуть обмеженими.

Параметри c_i, які не набули значень за формулами (36), (37), обчислюються з наступної системи рівнянь, що формуються з елементів матриці D_k за необхідними та достатніми умовами розв'язності k-го рівняння [3]

$$d_{lj} = 0, \quad j \geq l = 1,...,n_i, \quad d_{lj} \in \Re_{1\times 1}, \quad i = 1,2;$$
$$d_2^{lj} - d_3^{lj} = 0, \quad j > l = 1,\ldots,n_i - 1, \tag{42}$$
$$d_1^{lj} + d_4^{lj} = 0, \quad j \geq l = 1,...,n_i, \quad i = 3,...,r,$$

де $d_{lj} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{bmatrix}_{lj} \in \Re_{2\times 2}$, $d_{ll} = d_{ll}^T$. Матриці Q_k задаються конкретні числові, якщо розв'язність цієї системи не залежить від них, або структурно (наприклад, діагональні) з вільними параметрами, яким надаються конкретні значення, виходячи з умов її розв'язності. Відношення максимального по модулю зі значень розв'язку системи (42) до ненульового мінімального по модулю із коефіцієнтів (вони залежать від розв'язку на попередньому кроці) будуть обмеженими, що виконується, враховуючи зауваження щодо c_i, $i = 1,...,4$, послідовно для $k = 1,2,\ldots$. Параметри, що залишаються вільними, вважаємо обмеженими.

Звідси випливає обмеженість відношень матричних норм $\frac{\|P_{i+1}\|}{\|P_i\|} \le \delta < \infty$, $i = 0,1,...$, де δ – деяке додатне число, а отже, збіжність ряду $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i P_i$ при $\varepsilon\delta < 1$. Оскільки матриці Q_i, $i = 1, 2, ...$ вибираються (для них виконується $\frac{\|Q_{i+1}\|}{\|Q_i\|} \le \theta$, $i = 1, 2, ...$), то аналогічно до неперервного випадку обидва ряди (5) будуть збігатися при $\varepsilon < \min\left\{\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\theta}\right\}$. Тут θ – деяке додатне число.

Можна показати (співвідношення (18)), що розв'язки $\widetilde{P}$, $\widetilde{Q}$ відповідного матричного рівняння Ляпунова для початкової системи (28), записані у вигляді подібному до (5), збігаються при деяких значеннях параметра ε. Для цього необхідно помножити (31) зліва на матрицю T^T, а справа на T і розглянути матриці $\widetilde{P} = T^T P T$, $\widetilde{Q} = T^T Q T$.

2. Розглянемо дискретну лінійну стаціонарну керовану майже консервативну систему [11]

$$y(k+1) = \left(\tilde{F}_0 + \varepsilon \tilde{F}_1\right) y(k) + \varepsilon \tilde{G} u(k), \quad y(0) = y_0, \quad k = 0,1,..., \tag{43}$$

де $y \in \Re_n$ – вектор стану, $\widetilde{F}_0$ – ортогональна матриця $\left(\widetilde{F}_0^T \widetilde{F}_0 = \widetilde{F}_0 \widetilde{F}_0^T = I\right)$, $\widetilde{F}_1 \in \Re_{n\times n}$ – довільна стала матриця, $u(k) \in \Re_m$ – вектор керування, $\widetilde{G} \in \Re_{n\times m}$ – матриця при керуванні, $\varepsilon > 0$ – малий параметр.

За допомогою деякого ортогонального перетворення $x = Ty$ від системи (43) перейдемо до наступної [6]:

$$x(k+1) = \left(F_0 + \varepsilon F_1\right) x(k) + \varepsilon G u(k), \quad x(0) = x_0, \quad k = 0,1,..., \tag{44}$$

де $x_0 = Ty_0$, $F_1 = T\widetilde{F}_1 T^T$, $G = T\widetilde{G}$, а матриця $\widetilde{F}_0$ зведена до блочно-діагональної форми F_0 (30).

Побудуємо оптимальний регулятор у вигляді зворотного зв'язку за станом

$$u(k) = -Hx(k) \tag{45}$$

з квадратичним критерієм якості

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left[x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k) \right], \tag{46}$$

де $H \in \Re_{m\times n}$ – деяка стала матриця, $R \in \Re_{m\times m}$ – додатно означена матриця, а $Q \in \Re_{n\times n}$ – невід'ємно означена матриця.

Регулятор (45) буде оптимальним [7], якщо

$$H = \varepsilon\left(\varepsilon^2 G^T S G + R\right)^{-1} G^T S F, \tag{47}$$

де $F = F_0 + \varepsilon F_1$, а $S \in \Re_{n\times n}$ – симетрична додатно означена матриця-розв'язок матричного рівняння Ріккаті

$$S = F^T SF - \varepsilon^2 F^T SG\left(\varepsilon^2 G^T SG + R\right)^{-1} G^T SF + Q. \quad (48)$$

Тут Q та R – матриці із (46).

Для спрощення розв'язання рівняння (48), введемо заміну [10] $P = \varepsilon S$, тоді прийдемо до наступного еквівалентного матричного рівняння Ріккаті:

$$P = F^T PF - \varepsilon F^T PG\left(\varepsilon G^T PG + R\right)^{-1} G^T PF + \varepsilon Q. \quad (49)$$

Будемо шукати матрицю-розв'язок P у вигляді розкладу за малим параметром і нехай матриця Q представлена подібним чином (ряди (5)).

Для спрощення рівняння (49), застосуємо відомий спосіб обчислення оберненої матриці $\left(\varepsilon G^T PG + R\right)^{-1} = M$ шляхом розкладу її у збіжний ряд за малим параметром [12, 6].

$$M = M_0 + \varepsilon M_1 + \varepsilon^2 M_2 + \ldots, \quad (50)$$

де $M_0, M_1, M_2, \ldots$ – деякі симетричні матриці. Із властивості оберненої матриці випливає рівність

$$\left[\varepsilon G^T\left(P_0 + \varepsilon P_1 + \ldots\right)G + R\right]\left(M_0 + \varepsilon M_1 + \ldots\right) = I. \quad (51)$$

Зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях малого параметра, приходимо до системи рівнянь

$$RM_0 = I,\ RM_1 + G^T P_0 G M_0 = 0,\ RM_i + \sum_{k=1}^{i} G^T P_k G M_{i-1-k} = 0, \ldots$$

Звідки знаходимо невідомі матриці M_i

$$M_0 = R^{-1}, \quad M_i = -R^{-1}\sum_{k=1}^{i} G^T P_{k-1} G M_{i-k}, \quad i = 1,2,\ldots. \quad (52)$$

Підставимо вирази для матриць F, P, Q, M в (49), отримаємо рівняння

$$\begin{gathered}\left(P_0 + \varepsilon P_1 + \ldots\right) = \left(F_0 + \varepsilon F_1\right)^T\left(P_0 + \varepsilon P_1 + \ldots\right)\left(F_0 + \varepsilon F_1\right) - \\ -\varepsilon\left(F_0 + \varepsilon F_1\right)^T\left(P_0 + \varepsilon P_1 + \ldots\right)G\left(M_0 + \varepsilon M_1 + \ldots\right)G^T \times \\ \times\left(P_0 + \varepsilon P_1 + \ldots\right)\left(F_0 + \varepsilon F_1\right) + \varepsilon\left(Q_0 + \varepsilon Q_1 + \ldots\right).\end{gathered} \quad (53)$$

Зрівняємо коефіцієнти в (53) при однакових степенях ε, прийдемо до нескінченної системи матричних рівнянь типу Ріккаті

$$P_0 - F_0^T P_0 F_0 = 0, \quad (54)$$

$$\begin{gathered}P_1 - F_0^T P_1 F_0 = F_1^T P_0 F_0 + F_0^T P_0 F_1 - F_0^T P_0 G M_0 G^T P_0 F_0 + Q_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_k - F_0^T P_k F_0 = F_1^T P_{k-1} F_0 + F_0^T P_{k-1} F_1 - \sum_{(i,j,q,l,t)\in J(k)} F_i^T P_j G M_q G^T P_l F_t + Q_{k-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{gathered} \quad (55)$$

Тут $J(k) = \left\{(i,j,q,l,t)\middle| i + j + q + l + t = k - 1; i,t \in \{0,1\}; j,q,l \in \left\{\overline{0,k-1}\right\}\right\}$ – множини індексів, $k = 1,2,\ldots$.

Аналогічно до попереднього пункту позначимо [6]

$$P_k = \begin{bmatrix} P_{11} & \dots & P_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{1n}^T & \dots & P_{nn} \end{bmatrix}_k ,$$

$$D_k = \begin{bmatrix} D_{11} & \dots & D_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{1n}^T & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}_k = F_0^T P_{k-1} F_1 + F_1^T P_{k-1} F_0 - \sum_{(i,j,q,l,t)\in J(k)} F_i^T P_j G M_q G^T P_l F_t + Q_{k-1}, \qquad (56)$$

$$k = 1, 2, \dots .$$

Матриця P_0 має структуру (9). Оскільки ліві частини відповідних рівнянь систем (55) і (33) однакові, то блоки P_{ij} обчислюються за формулами (35)-(41), а вільні параметри знаходяться із системи (42). При $k=1$ система (42) складається з нелінійних рівнянь, для якої відношення максимального по модулю зі значень розв'язків до ненульового мінімального по модулю із коефіцієнтів, як і для лінійних рівнянь, будуть обмеженими. Тоді, виходячи з міркувань, наведених вище, будемо мати збіжність рядів (5) для $\varepsilon < \min\left\{\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\theta}\right\}$.

Аналогічно до попереднього (співвідношення (18)) можна показати, що розв'язки $\widetilde{P}$, $\widetilde{Q}$ відповідного матричного рівняння Ріккаті для початкової системи (43), записані у вигляді, подібному до (5), збігаються при деяких значеннях параметра ε. Для цього необхідно помножити (49) зліва на матрицю T^T, а справа на T і розглянути матриці $\widetilde{P} = T^T P T$, $\widetilde{Q} = T^T Q T$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Новицький В. В. Рівняння Ляпунова для майже консервативних систем / В. В. Новицький // Препринт. – К. : Ін-т математики НАН України, 2004. – 34с.
2. Зінчук М. О. Дослідження рівняння Ляпунова для неперервних майже консервативних систем / М. О. Зінчук, В. В. Новицький, Т. Г. Положий // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – 2, № 1. – С. 84-96.
3. Зінчук М. О. Дослідження рівняння Ляпунова для дискретних майже консервативних систем / М. О. Зінчук, В. В. Новицький // Аналітичні дослідження моделей механічних систем. Препринт. – К. : Ін-т математики НАН України, 2005. – С. 1-26.
4. Новицкий В. В. Оптимальное управление почти консервативными системами / В. В. Новицкий, Хуан Чень // Сучасні проблеми аналітичної механіки : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2004. – 1, №2. – С. 152-157.
5. Зінчук М. О. Оптимальне керування неперервними майже консервативними системами / М. О. Зінчук, В. В. Новицький // Проблеми аналітичної механіки : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – 3, № 1. – С. 75-89.
6. Зінчук М. О. Оптимальне керування дискретними майже консервативними системами / М. О. Зінчук, В. В. Новицький // Аналітична механіка та її застосування : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2008. – 5, № 2. – С. 124-140.
7. Barnett S. Introduction to Mathematical Control Theory, Second Edition / S. Barnett, R. G. Cameron. – Oxford : Clarendon press, 1985. – 404 p.
8. Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М. : Мир, 1989. – 656 с.
9. Абгарян К. А. Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем / К. А. Абгарян. – М. : Наука, 1973. – 432 с.
10. Ларин В. Б. О слабом управлении слабодемпфированными системами / В. Б. Ларин // Прикладная математика и механика. – 1978. – 42, вып. 6. – С. 1000-1006.
11. Ларин В. Б. Слабое дискретное управление слабодемпфированными системами / В. Б. Ларин, К. И. Науменко // В кн. : Навигация и управление движением механических систем. – Киев, 1980. – С. 90-100.
12. Ланкастер П. Теория матриц / П. Ланкастер. – М. : Наука, 1978. – 280 с.

REFERENCES

1. Novitskiy, V.V. (2004), "Lyapunov equation for almost conservative systems", *Preprint, In-t matematyki NAN Ukrainy*, *34 p*., Kiev, Ukraine.
2. Zinchuk, M.O., Novitskiy, V.V. and Polozhyy, T.G. (2005), "Research Lyapunov equations for continuous almost conservative systems", *Problemy dynamiky ta stiykosti bagatovymirnykh system: Zbirnyk prats In-tu matematyki NAN Ukrainy*, vol. 2, no.1, pp. 84-96.
3. Zinchuk, M.O. and Novitskiy, V.V. (2005), "Research Lyapunov equations for discrete almost conservative systems", *Analitychni doslidzhennya modeley mekhanichnykh system*, *Preprint*, *In-t matematyki NAN Ukrainy*, pp. 1-26, Kiev, Ukraine.
4. Novitskiy, V.V. and Khuan Chen (2004), "Optimal control almost conservative systems", *Suchasni problemy analitychnoyi mekhaniky: Zbirnyk prats In-tu matematyki NAN Ukrainy*, vol. 1, no. 2, pp. 152-157.
5. Zinchuk, M.O. and Novitskiy, V.V. (2006), "Optimal control of continuous almost conservative systems", *Problemy analitychnoyi mekhaniky: Zbirnyk prats In-tu matematyki NAN Ukrainy*, vol. 3, no. 1, pp. 75-89.
6. Zinchuk, M.O. and Novitskiy, V.V. (2008), "Optimal control of discrete almost conservative systems", *Analitychna mekhanika ta yiyi zastosuvannia: Zbirnyk prats In-tu matematyki NAN Ukrainy*, vol. 5, no. 2, pp. 124-140.
7. Barnett, S. and Cameron, R.G. (1985), "Introduction to Mathematical Control Theory, Second Edition", Clarendon press, Oxford.
8. Khorn, R. and Dzhonson, Ch. (1989), *Matrichnyy analiz* [Matrix Analysis], Mir, Moskow, Russia.
9. Abgaryan, K.A. (1973), *Matrichnye i asimptoticheskie metody v teorii lineynykh system* [The matrix and asymptotic methods in the theory of linear systems], Nauka, Moskow, Russia.
10. Larin V.B. (1978), "O slabom upravlenii slabodempfirovannymi sistemami", *Prikladnaya matematika i mekhanika*, vol. 42, no. 6, pp. 1000-1006.
11. Larin, V.B. and Naumenko, K.I. (1980), "Weak weakly damped discrete control systems", *Navigatsiya i upravlenie dvizheniem mekhanicheskikh system*, pp. 90-100.
12. Lankaster, P. (1978), *Teoriya matrits* [Matrix theory], Nauka, Moskow, Russia.

УДК: 546.815.23

ВПЛИВ ІНТЕРКАЛЯЦІЇ ВОДНЕМ НА ЕЛЕКТРОХІМІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ МОНОСЕЛЕНІДУ ІНДІЮ

Квашнівська Н. М.

Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000, Україна

Natalka522@gmail.com

Експериментально встановлено, що легування воднем шаруватого кристалу InSe покращує анодні і катодні реакції в кислих (H_2SeO_3, H_2SO_4) і нейтральному (вода) середовищах. Середовище розчину H_2SeO_3 дозволяє отримати менш від'ємні значення електродного потенціалу для чистого кристалу при освітлені і в темноті у середовищі дистильованої води. У нормальному розчині H_2SO_4 відбуваються інтенсивні процеси поляризації навіть без впливу сонячного випромінювання, і це спостерігається як у наводненому, так і в чистому кристалі. Беручи до уваги результати, отримані в кислому (сірчаної кислоти) та в нейтральному середовищах, встановлено, що анодні і катодні реакції мають більш повільний характер при негативних значеннях потенціалу порівняно з середовищем селенистої кислоти.

Ключові слова: моноселенід індію, електрохімічні властивості, потенціал поляризації.