УДК 519.6

ПОБУДОВА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНО-АПРОКСИМАЦІЙНОГО ПОЛІНОМА 5-ГО СТЕПЕНЯ НА ДОВІЛЬНОМУ ТРИКУТНИКУ

Литвин О. М., Коваленко Г. В.

Українська інженерно-педагогічна академія,
вул. Університетська, 16, м. Харків, 61000, Україна

academ_mail@ukr.net, vmkovalenko@ukr.net

У статті запропоновано метод побудови інтерполяційно-апроксимаційного полінома 5-го степеня для функції двох змінних на трикутнику. Цей поліном задається лінійною комбінацією базисних поліномів 5-го степеня, які виражаються через відомі базисні поліноми Зламала-Женішека. Невідомі коефіцієнти при відповідних базисних функціях знайдено методом найменших квадратів при мінімізації певного функціоналу. Для конкретного прикладу отримано формулу залежності похибки наближення функції інтерполяційно-апроксимаційним поліномом від лінійних розмірів трикутника. Запропоновано формули для наближеного обчислення похідних (до другого порядку включно) функції двох змінних у вершинах «одиничного» трикутника.

Ключові слова: базисні поліноми Зламала-Женішека, інтерполяційно-апроксимаційний поліном 5-го степеня, довільний трикутник, «одиничний» трикутник, метод найменших квадратів.

ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННО-АППРОКСИМАЦИОННОГО ПОЛИНОМА 5-ОЙ СТЕПЕНИ НА ПРОИЗВОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Литвин О. Н., Коваленко А. В.

Украинская инженерно-педагогическая академия,
ул. Университетская, 16, г. Харьков, 61000, Украина

academ_mail@ukr.net, vmkovalenko@ukr.net

В статье предложен метод построения интерполяционно-аппроксимационного полинома 5-ой степени для функции двух переменных на треугольнике. Этот полином задается линейной комбинацией базисных полиномов 5-ой степени, которые выражаются через известные базисные полиномы Зламала-Женишека. Неизвестные коэффициенты при соответствующих базисных функциях найдены методом наименьших квадратов при минимизации определенного функционала. Для конкретного примера получена формула зависимости погрешности приближения функции интерполяционно-аппроксимационным полиномом от линейных размеров треугольника. Предложены формулы для приближенного вычисления производных (до второго порядка включительно) функции двух переменных в вершинах «единичного» треугольника.

Ключевые слова: базисные полиномы Зламала-Женишека, интерполяционно-аппроксимационный полином 5-ой степени, произвольный треугольник, «единичный» треугольник, метод наименьших квадратов.

CONSTRUCTION OF INTERPOLATING-APPROXIMATING POLYNOMIAL OF THE 5TH DEGREE ON ARBITRARY TRIANGLE

Litvin O. M., Kovalenko G. V.

Ukrainian Engineer-pedagogical academy,
Universitetskaya str., 16, Kharkov, 61000, Ukraine

academ_mail@ukr.net, vmkovalenko@ukr.net

In this article we propose a method for constructing interpolating-approximating polynomial 5th degree for the function $f(x,y)$ that defined on the triangle $\vartriangle A_1A_2A_3$. In solving this problem we have used basis polynomials of the 5th degree $v_{kpq}(x,y)$, $k=\overline{1,3}$, $p,q \in \{0,1,2\}$, $0 \le p+q \le 2$, $V_{ij}(x,y)$, $(i,j) \in Q = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$, which are expressed through the known Zlamal-Zhenishek basis polynomials $h_{kpq}(x,y)$, $H_{ij}(x,y)$. Then the interpolating polynomial $S_5(x,y)$ of the function $f(x,y)$ on the triangle $\vartriangle A_1A_2A_3$ can be represented as a linear combination of functions $v_{kpq}(x,y)$, $V_{ij}(x,y)$,

where the coefficients of the $v_{kpq}(x,y)$ are equal derivatives $\left.\frac{\partial^{p+q}}{\partial^p x \partial^q y} f(x,y)\right|_{A_k}$, and the coefficients of the $V_{ij}(x,y)$ are equal derivatives $\left.\frac{\partial}{\partial \nu_{ij}} f(x,y)\right|_{M_{ij}}$ (ν_{ij} is a unit inward normal vector to the side A_iA_j of the triangle, M_{ij} is the midpoint of the side A_iA_j). In this case the values of a polynomial $S_5(x,y)$ and its partial derivatives (to the second order inclusive) at the vertices of a triangle and directional derivatives in the direction of the inward normal to sides of the triangle coincide with the corresponding derivatives of function $f(x,y)$. In practice very often we only know values of function $f(x,y)$ on a set of points, and values of derivatives are unknown. So we solve the problem of constructing interpolating-approximating polynomial $O(x,y,f)$. In determining this polynomial we think that we know only values $f_i = f(A_i)$, $i=\overline{1,3}$. We find unknown coefficients of the corresponding basis functions using the least-squares method while minimizing certain functional.

We got formulas for finding polynomials $\lambda_i(x,y)$, $i=\overline{1,3}$, such that $O(x,y,f) = f_1\lambda_1(x,y) + f_2\lambda_2(x,y) + f_3\lambda_3(x,y)$. In the case of the "unit" triangle $(A_1(0,0), A_2(1,0), A_3(0,1))$ explicit expressions of polynomials $\lambda_i(x,y)$, $i=\overline{1,3}$ are given.

We obtained the formula of dependence of approximation error of function by interpolating-approximating polynomial from linear dimensions of the triangle on the example of the concrete function.

We proposed formulas for approximate calculation of derivatives (to the second order inclusive) function $f(x,y)$ in the vertices of the "unit" triangle.

Key words: basis polynomials of Zlamal-Zenisek, interpolating-approximating polynomial 5th degree, arbitrary triangle, "unit" triangle, least-squares method.

ВСТУП

У праці [5] запропоновано метод побудови інтерполяційного полінома 5-го степеня на довільному трикутнику з використанням базисних поліномів, існування яких було доведено чеськими математиками М. Зламалом та А. Женішеком. При цьому параметрами інтерполяції виступають значення наближуваної функції та її частинних похідних (до 2-го порядку включно) у вершинах трикутника і значення похідних у напрямку внутрішньої нормалі до сторін трикутника, які обчислені в серединах сторін. Проте на практиці доволі часто про наближувану функцію відомо лише її значення на деякій сітці вузлів, а значення похідних цієї функції є невідомими. Тому актуальною є проблема побудови інтерполяційно-апроксимаційних поліномів 5-го степеня на довільному трикутнику, в яких невідомі значення похідних функції визначаються методом найменших квадратів при мінімізації певного функціоналу.

ПОБУДОВА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНО-АПРОКСИМАЦІЙНОГО ПОЛІНОМА 5-ГО СТЕПЕНЯ НА ДОВІЛЬНОМУ ТРИКУТНИКУ З ВИКОРИСТАННЯМ ЯВНИХ ФОРМУЛ ДЛЯ БАЗИСНИХ ПОЛІНОМІВ ЗЛАМАЛА-ЖЕНІШЕКА

У [5] наведено метод побудови явних формул для базисних поліномів Зламала-Женішека 5-го степеня на довільному трикутнику $\triangle A_1A_2A_3$: $h_{kpq}(x,y)$, $H_{ij}(x,y)$, $k=\overline{1,3}$, $p,q \in \{0,1,2\}$, $0 \le p+q \le 2$, $(i,j) \in Q = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$. Ці поліноми мають властивості:

1) $\left. D^{\beta_1,\beta_2} h_{kpq}(x,y)\right|_{A_j} = \delta_{k,j}\delta_{(\beta_1,\beta_2),(p,q)}$;

2) $\left. D^{\gamma_1,\gamma_2} H_{ij}(x,y)\right|_{A_l} = 0,\ \forall l=\overline{1,3},\ 0 \le \gamma_1+\gamma_2 \le 2$, $\left.\frac{\partial H_{ij}}{\partial \nu_{ij}}\right|_{M_{ij}} = 1$, $\left.\frac{\partial H_{ij}}{\partial \nu_{ij}}\right|_{M_{mn}} = 0$, $(m,n) \ne (i,j)$, (M_{ij} – середина сторони A_iA_j).

Це дозволяє побудувати інтерполяційний поліном $S_5(x,y)$ для заданої функції $f(x,y)$ у вигляді:

$$S_5(x,y)=w(x,y)+\sum_{(i,j)\in Q}\left[\frac{\partial f}{\partial \nu_{ij}}-\frac{\partial w}{\partial \nu_{ij}}\right]\Bigg|_{M_{ij}} H_{ij}(x,y),\quad w(x,y)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{0\le\beta_1+\beta_2\le 2} D^{\beta_1,\beta_2} f(A_i)\, h_{i\beta_1\beta_2}(x,y),$$

або

$$S_5(x,y)=\sum_{k=1}^{3}\sum_{0\le\beta_1+\beta_2\le 2} D^{\beta_1,\beta_2} f(A_k)\, v_{k\beta_1\beta_2}+\sum_{(i,j)\in Q}\frac{\partial f}{\partial \nu_{ij}}(M_{ij})V_{ij}(x,y), \tag{1}$$

де $v_{k\beta_1\beta_2}(x,y)=h_{k\beta_1\beta_2}(x,y)-\sum\limits_{(i,j)\in Q}\dfrac{\partial h_{k\beta_1\beta_2}}{\partial \nu_{ij}}(M_{ij})H_{ij}(x,y)$, $V_{ij}(x,y)=H_{ij}(x,y)$.

Очевидно, що цей поліном має властивості:

1) $D^{\beta_1,\beta_2} f(x,y)\big|_{A_l}=D^{\beta_1,\beta_2} S_5(x,y)\big|_{A_l}$, $\forall l=\overline{1,3},\ \beta_1,\beta_2\in\{0,1,2\}$, $0\le\beta_1+\beta_2\le 2$;

2) $\dfrac{\partial S_5(x,y)}{\partial \nu_{ij}}\Bigg|_{M_{ij}}=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial \nu_{ij}}\Bigg|_{M_{ij}}$, $(i,j)\in Q=\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$, де ν_{ij} – одиничний вектор внутрішньої нормалі до сторони A_iA_j трикутника; M_{ij} – середина сторони A_iA_j.

Оскільки

$$D^{\gamma_1,\gamma_2} H_{ij}(x,y)\big|_{A_l}=0,\ \forall\, l=\overline{1,3},\ 0\le\gamma_1+\gamma_2\le 2,$$

то

$$D^{\gamma_1,\gamma_2} v_{kpq}(x,y)\big|_{A_j}=D^{\gamma_1,\gamma_2} h_{kpq}(x,y)\big|_{A_j}.$$

Тобто функції $v_{kpq}(x,y)$ мають такі самі інтерполяційні властивості, як і функції $h_{kpq}(x,y)$. Отже, враховуючи рівність (1), функції $v_{kpq}(x,y)$ та $V_{ij}(x,y)$ утворюють альтернативну систему базисних поліномів на трикутнику. Далі ми будемо використовувати саме ці базисні поліноми.

У роботі ми розв'язуємо наступну задачу: задано значення функції $f(x,y)$ у вершинах трикутника $\triangle A_1A_2A_3$: $f_1=f(A_1)$, $f_2=f(A_2)$, $f_3=f(A_3)$. Вважаючи похідні функції у формулі (1) невідомими параметрами, ми знаходимо їх методом найменших квадратів при мінімізації функціоналу

$$J(C)=\iint\limits_{\triangle A_1A_2A_3} O^2(x,y,f,C)\,dxdy,$$

де $O(x,y,f,C)=\sum\limits_{k=1}^{3} f_k\psi_k(x,y)+\sum\limits_{m=1}^{18} C_m\varphi_m(x,y)$, $\psi_1(x,y)=v_{100}(x,y)$, $\psi_2(x,y)=v_{200}(x,y)$, $\psi_3(x,y)=v_{300}(x,y)$; $\varphi_{5j-4}(x,y)=v_{j10}(x,y)$, $\varphi_{5j-3}(x,y)=v_{j01}(x,y)$, $\varphi_{5j-2}(x,y)=v_{j20}(x,y)$, $\varphi_{5j-1}(x,y)=v_{j11}(x,y)$, $\varphi_{5j}(x,y)=v_{j02}(x,y)$, $j=\overline{1,3}$; $\varphi_{16}=V_{12}(x,y)$, $\varphi_{17}=V_{23}(x,y)$, $\varphi_{18}=V_{31}(x,y)$.

Очевидно, що при будь-яких дійсних $C_i,\ i=\overline{1,18}$ оператор $O(x,y,f,C)$ має властивості: $O(x_k,y_k,f,C)=f_k,\ k=\overline{1,3}$, тобто є оператором інтерполяції.

Визначимо тепер параметри $C_i,\ i=\overline{1,18}$ з умови $J(C)\to\min\limits_C$.

Нехай C^* – матриця-стовпець, на якій досягається мінімум функціоналу $J(C)$. Запишемо оператор $O(x,y,f,C^*)$ у матричній формі

$$O(x,y,f,C^*)=F^T\cdot\Psi(x,y)+C^{*T}\cdot\Phi(x,y), \tag{2}$$

де $F=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{pmatrix}$, $\Psi(x,y)=\begin{pmatrix}\psi_1(x,y)\\\psi_2(x,y)\\\psi_3(x,y)\end{pmatrix}$, $C^*=\begin{pmatrix}C_1^*\\C_2^*\\\dots\\C_{18}^*\end{pmatrix}$, $\Phi(x,y)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x,y)\\\varphi_2(x,y)\\\dots\\\varphi_{18}(x,y)\end{pmatrix}$.

Теорема 1. Матриця-стовпець C^* обчислюється за формулою

$$C^*=-A^{-1}\cdot B\cdot F, \tag{3}$$

де $A_{ij}=\iint\limits_{\triangle A_1A_2A_3}\varphi_i(x,y)\varphi_j(x,y)dxdy$, $B_{ik}=\iint\limits_{\triangle A_1A_2A_3}\varphi_i(x,y)\psi_k(x,y)dxdy$, $i,j=\overline{1,18}$, $k=\overline{1,3}$.

Доведення. Знаходячи похідні функціоналу $J(C)$ за параметрами $C_i,\ i=\overline{1,18}$ та прирівнюючи їх до нуля, отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial C_i}J(C)=2\iint\limits_{\triangle A_1A_2A_3}\left(\sum_{j=1}^{18}C_j\varphi_j(x,y)+\sum_{k=1}^{3}f_k\psi_k(x,y)\right)\varphi_i(x,y)dxdy=0,\quad i=\overline{1,18}.$$

Після перетворень цю систему рівнянь можна записати у вигляді:

$$\sum_{j=1}^{18}\left(\iint\limits_{\triangle A_1A_2A_3}\varphi_i(x,y)\varphi_j(x,y)dxdy\right)C_j=-\sum_{k=1}^{3}\left(\iint\limits_{\triangle A_1A_2A_3}\varphi_i(x,y)\psi_k(x,y)dxdy\right)f_k,\quad i=\overline{1,18}. \tag{4}$$

Якщо ввести позначення $A_{ij}=\iint\limits_{\triangle A_1A_2A_3}\varphi_i(x,y)\varphi_j(x,y)dxdy$, $B_{ik}=\iint\limits_{\triangle A_1A_2A_3}\varphi_i(x,y)\psi_k(x,y)dxdy$, $i,j=\overline{1,18}$, $k=\overline{1,3}$, то систему (4) можна записати у вигляді:

$$\sum_{j=1}^{18}A_{ij}C_j=-\sum_{k=1}^{3}B_{ik}f_k,\ i=\overline{1,18}. \tag{5}$$

Перепишемо (5) у матричному вигляді:

$$AC=-BF.$$

Безпосереднім обчисленням можна переконатись, що $\det(A)\neq0$, тобто існує обернена матриця A^{-1}. Тоді для розв'язку C^* останнього матричного рівняння маємо рівність:

$$C^*=-A^{-1}BF.$$

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. Оператор інтерполяції $O(x,y,f)\equiv O(x,y,f,C^*)$ можна записати у матричній формі:

$$O(x,y,f)=F^T\left(\Psi(x,y)-B^TA^{-1}\Phi(x,y)\right).$$

Доведення. Скористаємось представленням оператора інтерполяції $O(x,y,f)$ у матричній формі (2). Враховуючи рівність (3) та властивості операції транспонування матриць, маємо:

$$C^{*T}=\left(-A^{-1}BF\right)^T=-F^TB^T\left(A^{-1}\right)^T.$$

Матриця A^{-1} є симетричною (як обернена до симетричної матриці), тому $\left(A^{-1}\right)^T=A^{-1}$.

Отже, $C^{*T}=-F^TB^TA^{-1}$.

Підставляючи одержаний вираз для C^{*T} в (2), отримаємо:

$$O(x,y,f)=F^T\cdot\Psi(x,y)-F^TB^TA^{-1}\cdot\Phi(x,y)=F^T\left(\Psi(x,y)-B^TA^{-1}\Phi(x,y)\right).$$

Теорему 2 доведено.

Позначимо $\Lambda(x,y)=\Psi(x,y)-M\Phi(x,y)$, де $M=B^TA^{-1}$. Тоді для елементів $\lambda_i(x,y),\ i=\overline{1,3}$ матриці стовпця $\Lambda(x,y)$ маємо рівності:

$$\lambda_i(x,y)=\psi_i(x,y)-\sum_{k=1}^{18}M_{ik}\varphi_k(x,y),\ i=\overline{1,3}, \tag{6}$$

де M_{ik} – елемент (i,k) матриці *M*.

Отже, оператор $O(x,y,f)$ можна записати у вигляді:

$$O(x,y,f)=\sum_{i=1}^{3}f_i\lambda_i(x,y)=\sum_{i=1}^{3}f_i\left(\psi_i(x,y)-\sum_{k=1}^{18}M_{ik}\varphi_k(x,y)\right).$$

ІНТЕРПОЛЯЦІЙНО-АПРОКСИМАЦІЙНІ ПОЛІНОМИ 5-ГО СТЕПЕНЯ НА «ОДИНИЧНОМУ» ТРИКУТНИКУ

Нехай $\triangle A_1A_2A_3$ – «одиничний» трикутник, тобто трикутник з вершинами $A_1(0,0)$, $A_2(1,0)$, $A_3(0,1)$. Використовуючи результати [5], можна виписати явні вирази для всіх базисних поліномів $v_{k\beta}(x,y)$ та $V_{ij}(x,y)$ для «одиничного» трикутника:

$$v_{100}(x,y)=30xy^2(x+y-1)^2-(x+y-1)^3\left(6x^2+12xy+3x+6y^2+3y+1\right)+30x^2y(x+y-1)^2,$$

$$v_{110}(x,y)=12x^2y(x+y-1)^2-5xy^2(x+y-1)^2-x(3x+3y+1)(x+y-1)^3,$$

$$v_{101}(x,y)=12xy^2(x+y-1)^2-5x^2y(x+y-1)^2-y(3x+3y+1)(x+y-1)^3,$$

$$v_{120}(x,y)=\frac{3}{2}x^2y(x+y-1)^2-\frac{1}{2}x^2(x+y-1)^3,$$

$$v_{111}(x,y)=-xy^2(x+y-1)^2-x^2y(x+y-1)^2-xy(x+y-1)^3,$$

$$v_{102}(x,y)=\frac{3}{2}xy^2(x+y-1)^2-\frac{1}{2}y^2(x+y-1)^3,$$

$$v_{200}(x,y)=x^3\left(6(x-1)^2-3x+4\right)-15x^2y^2(x+y-1),$$

$$v_{210}(x,y)=\frac{7}{2}x^2y^2(x+y-1)-x^3(x-1)(3x-4),$$

$$v_{201}(x,y)=-5x^2y(x+y-1)^2-\frac{17}{2}x^2y^2(x+y-1)-x^3y(3x-4),$$

$$v_{220}(x,y)=\frac{1}{2}x^3(x-1)^2-\frac{1}{4}x^2y^2(x+y-1),$$

$$v_{211}(x,y)=x^2y(x+y-1)^2+\frac{3}{2}x^2y^2(x+y-1)+x^3y(x-1),$$

$$v_{202}(x,y)=\frac{1}{2}x^3y^2-\frac{5}{4}x^2y^2(x+y-1),$$

$$v_{300}(x,y)=y^3\left(6(y-1)^2-3y+4\right)-15x^2y^2(x+y-1),$$

$$v_{310}(x,y)=-5xy^2(x+y-1)^2-\frac{17}{2}x^2y^2(x+y-1)-xy^3(3y-4),$$

$$v_{301}(x,y)=\frac{7}{2}x^2y^2(x+y-1)-y^3(y-1)(3y-4),$$

$$v_{320}(x,y)=\frac{1}{2}x^2y^3-\frac{5}{4}x^2y^2(x+y-1),$$

$$v_{311}(x,y)=xy^2(x+y-1)^2+\frac{3}{2}x^2y^2(x+y-1)+xy^3(y-1),$$

$$v_{302}(x,y)=\frac{1}{2}y^3(y-1)^2-\frac{1}{4}x^2y^2(x+y-1),$$

$$V_{12}(x,y)=16x^2y(x+y-1)^2,\quad V_{23}(x,y)=-8\sqrt{2}x^2y^2(x+y-1),\quad V_{31}(x,y)=16xy^2(x+y-1)^2.$$

Після введення лінійної нумерації для базисних поліномів, як у попередньому пункті, та здійснення всіх необхідних обчислень за формулою (6), отримаємо для «одиничного» трикутника такі вирази функцій $\lambda_i(x,y)$:

$$\begin{gathered}\lambda_1(x,y)=-36x^5-36y^5-\frac{3600x^4y}{19}-\frac{7200x^3y^2}{19}-\frac{7200x^2y^3}{19}-\frac{3600xy^4}{19}+\frac{2025x^4}{19}+\\+\frac{8400x^3y}{19}+\frac{12600x^2y^2}{19}+\frac{8400xy^3}{19}+\frac{2025y^4}{19}-\frac{24600x^3}{209}-\frac{75600x^2y}{209}-\frac{75600xy^2}{209}-\\-\frac{24600y^3}{209}+\frac{12420x^2}{209}+\frac{25200xy}{209}+\frac{12420y^2}{209}-\frac{2780x}{209}-\frac{2780y}{209}+1;\end{gathered}\tag{7}$$

$$\begin{gathered}\lambda_2(x,y)=36x^5-\frac{180x^4y}{19}+\frac{360x^3y^2}{19}-\frac{360x^2y^3}{19}-\frac{180xy^4}{19}-\frac{1395x^4}{19}+\frac{420x^3y}{19}+\\+\frac{630x^2y^2}{19}+\frac{420xy^3}{19}+\frac{30y^4}{19}+\frac{10740x^3}{209}-\frac{3780x^2y}{209}-\frac{3780xy^2}{209}-\frac{60y^3}{19}-\frac{270x^2}{19}+\end{gathered}\tag{8}$$

$$+\frac{1260xy}{209}+\frac{450y^2}{209}+\frac{260x}{209}-\frac{120y}{209};$$

$$\lambda_3(x,y)=36y^5-\frac{180x^4y}{19}-\frac{360x^3y^2}{19}-\frac{360x^2y^3}{19}-\frac{180xy^4}{19}+\frac{30x^4}{19}+\frac{420x^3y}{19}+$$

$$+\frac{630x^2y^2}{19}+\frac{420xy^3}{19}-\frac{1395y^4}{19}-\frac{60x^3}{19}-\frac{3780x^2y}{209}-\frac{3780xy^2}{209}+\frac{10740y^3}{209}+\frac{450x^2}{209}+ \tag{9}$$

$$+\frac{1260xy}{209}-\frac{270y^2}{19}-\frac{120x}{209}+\frac{260y}{209}.$$

Отже, інтерполяційно-апроксимаційний поліном на «одиничному» трикутнику задається так:

$$O(x,y,f)=f_1\lambda_1(x,y)+f_2\lambda_2(x,y)+f_3\lambda_3(x,y), \tag{10}$$

де $\lambda_1(x,y)$, $\lambda_2(x,y)$, $\lambda_3(x,y)$ виражаються за формулами (7)-(9), $f_1=f(A_1)$, $f_2=f(A_2)$, $f_3=f(A_3)$.

Приклад 1. Нехай $f(x,y)=\frac{x^6}{6!}+\frac{y^6}{6!}$. У цьому випадку $f_1=0$, $f_2=f_3=\frac{1}{720}$. Підставляючи ці значення в (10), отримаємо вираз для інтерполяційно-апроксимаційного полінома для заданої функції:

$$O(x,y,f)=\frac{x^5}{20}+\frac{y^5}{20}-\frac{x^4y}{38}-\frac{x^3y^2}{19}-\frac{x^2y^3}{19}-\frac{xy^4}{38}-\frac{91x^4}{912}+\frac{7x^3y}{114}+\frac{7x^2y^2}{76}+\frac{7xy^3}{114}-\frac{91y^4}{912}+\frac{14x^3}{209}-$$

$$-\frac{21x^2y}{418}-\frac{21xy^2}{418}+\frac{14y^3}{209}-\frac{7x^2}{418}+\frac{7xy}{418}-\frac{7y^2}{418}+\frac{7x}{7524}+\frac{7y}{7524}.$$

Наприклад, у точці $P\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ абсолютна похибка наближення значення функції поліномом $O(x,y,f)$ дорівнює $\Delta=\left|f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)-O\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right|\approx 5,254\cdot 10^{-5}$.

Для величини відхилення полінома $O(x,y,f)$ від функції $f(x,y)$ у середньо-квадратичній метриці маємо:

$$\left(\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(f(x,y)-O(x,y,f)\right)^2dy\right)^{\frac{1}{2}}\approx 1,29\cdot 10^{-4}.$$

ЗАЛЕЖНІСТЬ ПОХИБКИ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНО-АПРОКСИМАЦІЙНИМ ПОЛІНОМОМ ВІД ЛІНІЙНИХ РОЗМІРІВ ТРИКУТНИКА

Відхилення інтерполяційно-апроксимаційного полінома від наближуваної функції будемо обчислювати в рівномірній метриці:

$$\rho(f,g)=\sup_{(x,y)\in S}\left|f(x,y)-g(x,y)\right|,$$

де $f(x,y)$, $g(x,y)$ – обмежені дійсні функції, визначені на множині S.

Нехай Δ_h – рівнобедрений прямокутний трикутник з вершинами в точках $(0,0)$, $(h,0)$, $(0,h)$. Позначимо через $O(x,y,h)$ – інтерполяційно-апроксимаційний поліном для функції

$$f(x,y)=\frac{x^6}{6!}+\frac{x^5y}{5!\cdot1!}+\frac{x^4y^2}{4!\cdot2!}+\frac{x^3y^3}{3!\cdot3!}+\frac{x^2y^4}{2!\cdot4!}+\frac{xy^5}{1!\cdot5!}+\frac{y^6}{6!}$$

на трикутнику Δ_h.

Відхилення інтерполяційно-апроксимаційного полінома $O(x,y,h)$ від функції $f(x,y)$ на трикутнику Δ_h є функцією аргументу h. Позначимо цю функцію $\varepsilon(h)$, тобто

$$\varepsilon(h)\equiv\sup_{(x,y)\in\Delta_h}\left|f(x,y)-O(x,y,h)\right|.$$

Для функції $f(x,y)=\frac{x^6}{6!}+\frac{x^5y}{5!\cdot1!}+\frac{x^4y^2}{4!\cdot2!}+\frac{x^3y^3}{3!\cdot3!}+\frac{x^2y^4}{2!\cdot4!}+\frac{xy^5}{1!\cdot5!}+\frac{y^6}{6!}$ нами було проведено чисельний експеримент засобами системи комп'ютерної математики Mathcad, у якому ми обчислювали значення функції $\varepsilon^*(h)\equiv\varepsilon\left(h\sqrt{2}\right)$ при $h\in\{0,5;\,0,6;\,0,7;\,0,8;\,0,9;\,1\}$. Результати експерименту наведені в таблиці 1.

Таблиця 1 – Значення функції $\varepsilon^*(h)$ при $h\in\{0,5;\,0,6;\,0,7;\,0,8;\,0,9;\,1\}$

i	1	2	3	4	5	6
h_i	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\varepsilon^*(h_i)$	$2,379\cdot10^{-5}$	$7,101\cdot10^{-5}$	$1,791\cdot10^{-4}$	$3,991\cdot10^{-4}$	$8,089\cdot10^{-4}$	$1,522\cdot10^{-3}$

У роботі [6] показано, що похибка наближення функції інтерполяційним поліномом має вигляд степеневої функції від довжини найбільшої сторони трикутника.

Припускаючи степеневу залежність $\varepsilon^*(h)$, будемо шукати вираз $\varepsilon^*(h)$ у вигляді:

$$\varepsilon^*(h)=A_0\cdot h^{A_1}. \tag{11}$$

Має місце наступне твердження.

Теорема 3. Якщо довжини катетів трикутників Δ_h змінюються за законом $h_i=0,1\cdot i+0,4$, $i=\overline{1,6}$, то похибку наближення функції $f(x,y)$ інтерполяційно-апроксимаційним поліномом $O(x,y,h)$ можна представити у вигляді

$$\varepsilon(h)=0,238\cdot10^{-4}\cdot h^6.$$

Доведення. Логарифмуючи рівність (11), отримаємо

$$\ln\varepsilon^*(h)=\ln A_0+A_1\ln h.$$

Введемо заміну: $y=\ln\varepsilon^*(h),\ x=\ln h,\ a=A_1,\ b=\ln A_0$. Тоді $y=ax+b$.

Знайдемо коефіцієнти a та b методом найменших квадратів, мінімізуючи функцію $F(a,b)=\sum_{i=1}^{6}(y_i-ax_i-b)^2$, де $y_i=\ln\varepsilon^*(h_i),\ x_i=\ln h_i,\ i=\overline{1,6}$.

Маємо:

$$F_a' = 2\sum_{i=1}^{6}\left(y_i - ax_i - b\right)\left(-x_i\right) = 0, \quad F_b' = 2\sum_{i=1}^{6}\left(y_i - ax_i - b\right)\left(-1\right) = 0.$$

Отримуємо систему:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{6} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{6} x_i = \sum_{i=1}^{6} x_i\, y_i, \\ a\sum_{i=1}^{6} x_i + 6b = \sum_{i=1}^{6} y_i. \end{cases}$$

Звідси

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{6} x_i\, y_i & \sum_{i=1}^{6} x_i \\ \sum_{i=1}^{6} y_i & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{6} x_i^2 & \sum_{i=1}^{6} x_i \\ \sum_{i=1}^{6} x_i & 6 \end{vmatrix}} = 6, \quad b = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{6} x_i^2 & \sum_{i=1}^{6} x_i\, y_i \\ \sum_{i=1}^{6} x_i & \sum_{i=1}^{6} y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{6} x_i^2 & \sum_{i=1}^{6} x_i \\ \sum_{i=1}^{6} x_i & 6 \end{vmatrix}} \approx -8,567.$$

Отже, $A_1 = a = 6, \quad A_0 = e^b \approx 1,903\cdot 10^{-4}$.

Таким чином, $\varepsilon^*\left(h\right) = 1,903\cdot 10^{-4}\cdot h^6$. Звідси маємо

$$\varepsilon\left(h\right) = \varepsilon^*\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right) = 0,238\cdot 10^{-4}\cdot h^6.$$

ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНО-АПРОКСИМАЦІЙНИХ ПОЛІНОМІВ ДО НАБЛИЖЕНОГО ОБЧИСЛЕННЯ ПОХІДНИХ

Теорема 4. Якщо у вершинах “одиничного” трикутника $\triangle A_1A_2A_3$ відомі лише значення функції $f\left(x,y\right)$: $f_1 = f\left(A_1\right)$, $f_2 = f\left(A_2\right)$, $f_3 = f\left(A_3\right)$, то невідомі значення її похідних можуть бути наближено обчислені за формулами:

$$\left.\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}\right|_{A_1} \approx C_1^* = \frac{260}{209}f_2 - \frac{2780}{209}f_1 - \frac{120}{209}f_3, \quad \left.\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}\right|_{A_1} \approx C_2^* = \frac{260}{209}f_3 - \frac{120}{209}f_2 - \frac{2780}{209}f_1,$$

$$\left.\frac{\partial^2 f\left(x,y\right)}{\partial x^2}\right|_{A_1} \approx C_3^* = \frac{24840}{209}f_1 - \frac{540}{19}f_2 + \frac{900}{209}f_3, \quad \left.\frac{\partial^2 f\left(x,y\right)}{\partial x\partial y}\right|_{A_1} \approx C_4^* = \frac{25200}{209}f_1 + \frac{1260}{209}f_2 + \frac{1260}{209}f_3,$$

$$\left.\frac{\partial^2 f\left(x,y\right)}{\partial y^2}\right|_{A_1} \approx C_5^* = \frac{24840}{209}f_1 + \frac{900}{209}f_2 - \frac{540}{19}f_3, \quad \left.\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}\right|_{A_2} \approx C_6^* = \frac{2780}{209}f_2 - \frac{260}{209}f_1 + \frac{120}{209}f_3,$$

$$\left.\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}\right|_{A_2} \approx C_7^* = \frac{20}{11}f_3 - \frac{20}{11}f_1, \quad \left.\frac{\partial^2 f\left(x,y\right)}{\partial x^2}\right|_{A_2} \approx C_8^* = \frac{24840}{209}f_2 - \frac{540}{19}f_1 + \frac{900}{209}f_3,$$

$$\left.\frac{\partial^2 f\left(x,y\right)}{\partial x\partial y}\right|_{A_2} \approx C_9^* = -\frac{7200}{209}f_1 - \frac{360}{209}f_2 - \frac{360}{209}f_3, \quad \left.\frac{\partial^2 f\left(x,y\right)}{\partial y^2}\right|_{A_2} \approx C_{10}^* = -\frac{7560}{209}f_1 - \frac{720}{209}f_2 - \frac{7560}{209}f_3,$$

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{A_3} \approx C_{11}^* = \frac{20}{11} f_2 - \frac{20}{11} f_1, \quad \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{A_3} \approx C_{12}^* = \frac{120}{209} f_2 - \frac{260}{209} f_1 + \frac{2780}{209} f_3,$$

$$\left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right|_{A_3} \approx C_{13}^* = -\frac{7560}{209} f_1 - \frac{7560}{209} f_2 - \frac{720}{209} f_3, \quad \left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}\right|_{A_3} \approx C_{14}^* = -\frac{7200}{209} f_1 - \frac{360}{209} f_2 - \frac{360}{209} f_3,$$

$$\left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right|_{A_3} \approx C_{15}^* = \frac{900}{209} f_2 - \frac{540}{19} f_1 + \frac{24840}{209} f_3, \quad \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial \nu_{12}}\right|_{M_{12}} \approx C_{16}^* = \frac{75}{836} f_2 - \frac{5}{209} f_1 + \frac{145}{76} f_3,$$

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial \nu_{23}}\right|_{M_{23}} \approx C_{17}^* = \frac{145\sqrt{2}}{76} f_1 + \frac{5\sqrt{2}}{152} f_2 + \frac{5\sqrt{2}}{152} f_3, \quad \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial \nu_{31}}\right|_{M_{31}} \approx C_{18}^* = \frac{145}{76} f_2 - \frac{5}{209} f_1 + \frac{75}{836} f_3.$$

Доведення. Обчислюючи елементи матриці-стовпця C^* за формулою (3), отримаємо, наприклад, що $C_1^* = \frac{260}{209} f_2 - \frac{2780}{209} f_1 - \frac{120}{209} f_3$, причому цей коефіцієнт у виразі для $O(x,y,f)$ стоїть при базисному поліномі $\varphi_1(x,y) \equiv v_{110}(x,y)$, який, відповідно, в представленні інтерполяційного полінома (1) стоїть з множником $D^{1,0} f(x,y)\big|_{A_1} = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{A_1}$. Тому можна вважати C_1^* наближеним значенням похідної $\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{A_1}$. Тобто $\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{A_1} \approx C_1^* = \frac{260}{209} f_2 - \frac{2780}{209} f_1 - \frac{120}{209} f_3$. Аналогічно одержуємо інші наближені рівності.

ВИСНОВКИ

Запропонований нами метод побудови інтерполяційно-апроксимаційних поліномів 5-го степеня на трикутнику дозволяє будувати інтерполяційно-апроксимаційні сплайни 5-го степеня на тріангульованій сітці вузлів. Планується використання цих сплайнів до математичного моделювання розподілу корисних копалин.

ЛІТЕРАТУРА

1. Zenisek A. Interpolation polynomials on the triangle / A. Zenisek // Numer. Math. – 1970. – Vol. 15. – P. 283-296.
2. Zenisek A. Maximum-angle condition and triangular finite elements of hermite type / A. Zenisek // Math. Comp. – 1995. – Vol. 64, N 211. – P. 929-941.
3. Bramble J. H. Triangular elements in the finite element method / J. H. Bramble, M. Zlamal // Math. Comp. – 1970. – Vol. 24. – P. 809-820.
4. Литвин О. О. Одна теорема про інтерполяційно-апроксимаційні оператори в інтегральній формі методу найменших квадратів / О. О. Литвин // Бионика интеллекта. – 2012. – № 2(79). – С. 19-22.
5. Сергиенко И. В. Явные формулы для интерполяционных сплайнов 5-й степени на треугольнике / И. В. Сергиенко, О. Н. Литвин, О. О. Литвин, О. И. Денисова // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – Т. 50, N 5. – С. 25-33.
6. Субботин Ю. Н. Зависимость оценок аппроксимации интерполяционными полиномами пятой степени от геометрических характеристик треугольника / Ю. Н. Субботин // Труды института математики и механики. – УрО РАН, 1992. – Т. 2. – С. 110-119.

REFERENCES

1. Zenisek, A. (1970), "Interpolation polynomials on the triangle", *Numer. Math.*, vol. 15, pp. 283-296.
2. Zenisek, A. (1995), "Maximum-angle condition and triangular finite elements of hermite type", *Math. Comp.*, vol. 64, no. 211, pp. 929-941.
3. Bramble, J.H. and Zlamal, M. (1970), "Triangular elements in the finite element method", *Math. Comp.*, vol. 24, pp. 809-820.
4. Litvin, O.O. (2012), "A theorem on interpolating-approximating operators in the integral form of the least-squares method", *Bionika intellekta*, vol. 79, no. 2, pp. 19-22.
5. Sergienko, I.V., Litvin, O.N., Litvin, O.O. and Denisova, O.I. (2014), "Explicit formulas for interpolation splines 5th degree on a triangle", *Kibernetika i sistemnyi analiz*, vol. 50, no. 5, pp. 25-33.
6. Subbotin, Yu.N. (1992), "Dependence of the estimates of approximation by interpolation polynomials of the fifth degree of the geometrical characteristics of the triangle", *Trudy instituta matematiki i mekhaniki*, vol. 2, pp. 110-119.

УДК 519.6

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ ЗА ДОПОМОГОЮ ЇХ СЛІДІВ НА СИСТЕМІ ПЕРЕТИННИХ СМУГ, РОЗТАШОВАНИХ ПІД ДОВІЛЬНИМ КУТОМ

Литвин О. М., Славік О. В.

Українська інженерно-педагогічна академія,
вул. Університетська, 16, м. Харків, Україна

academ_mail@ukr.net, aleksey.slavik@yandex.ru

У статті здійснено огляд існуючих методів відновлення пошкоджених цифрових зображень. Наведено стандартний метод інтерстріпації функції двох змінних. Запропоновано новий модифікований метод інтерстріпації для відновлення зображення поверхні за неповною інформацією про неї у випадку, якщо границі пошкоджених (невідомих) ділянок зображення є смугами, розташованими під довільним кутом.

Ключові слова: зображення, відновлення зображень, інтерстріпація, інтерлінація.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ С ПОМОЩЬЮ ИХ СЛЕДОВ НА СИСТЕМЕ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ПОЛОС, РАСПОЛОЖЕННЫХ ПОД ПРОИЗВОЛЬНЫМ УГЛОМ

Литвин О. Н., Славик А. В.

Украинская инженерно-педагогическая академия,
ул. Университетская, 16, г. Харьков, Украина

academ_mail@ukr.net, aleksey.slavik@yandex.ru

В статье проведен обзор существующих методов восстановления поврежденных цифровых изображений. Приведен стандартный метод интерстрипации функции двух переменных. Предложен новый модифицированный метод интерстрипации для восстановления изображения поверхности при неполной информации о ней в случае, если границы поврежденных (неизвестных) участков изображения являются полосами, расположенными под произвольным углом.

Ключевые слова: изображение, восстановление изображений, интерстрипация, интерлинация.