

## REFERENCES

1. Lytvyn, O.M. and Matveeva, S.Y. (2011), "Method of surface recovery between strips with help information about surface on the perpendicular strips", *Control Systems and Computers*, vol. 1, pp. 33-41.
2. Joshua, J. and Darsan, G. (2016), "Digital inpainting techniques – a survey", *Intern. J. of Latest Research in Engineering and Techn.*, vol. 2, pp. 34-36.
3. Hays, J. and Efros, A. (2007), "Scene completion using millions of Graphics", *Computer Graphics Proceedings (SIGGRAPH)*, vol. 26, pp. 87-94.
4. Bertalmio, M., Sapiro, G., Caselles, V. and Ballester, C. (2000), "Image inpainting", *Proc. of the 27th Annual Conf. on Computer Graphics and Interactive Techniques*, pp. 417-424.
5. Sun, J., Yuan, L., Jian, J. and Shum, H.-Y. (2005), "Image completion with structure propagation", *Proc. of ACM Conf. Comp. Graphics*, vol. 24, pp. 861-868.
6. Oliviera, M., Bowen, B., McKenna, R. and Chang, Y.-S. (2001), "Fast digital image inpainting", *Proc. of Intl. Conf. on Visualization, Imaging and Image Processing*, pp. 261-266.
7. Lytvyn, O.M. (1992), *Interlinacija funkcij* [Interlination of functions], Osnova, Kharkiv.
8. Lytvyn, O.M. (2002), *Interlinacija funkcij ta dejaki jiji zastosuvannja* [Interlination of functions and some its applications], Osnova, Kharkiv.

УДК 539.3

## КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СЛОЯ С ОСНОВАНИЕМ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ НАГРУЖЕНИИ

Ободан Н. И., Гук Н. А., Козакова Н. Л.

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара,  
просп. Гагарина, 72, г. Днепр, 49010, Украина*

kkt\_fpm@ukr.net

Данная работа посвящена изучению нелинейного поведения слоя, лежащего на упругом основании, при действии комбинированной нагрузки – нормальной и тангенциальной. Задача формулируется в вариационной постановке. Произведен численный анализ напряженно-деформированного состояния слоя в зависимости от коэффициента трения и относительной жесткости слоя и основания.

*Ключевые слова: плоская контактная задача, упругое полупространство, покрытие, напряжение, перемещение, трение, удельный вес.*

## КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ШАРУ З ОСНОВОЮ ПРИ КОМБІНОВАНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Ободан Н. И., Гук Н. А., Козакова Н. Л.

*Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара,  
просп. Гагаріна, 72, м. Дніпро, 49010, Україна*

kkt\_fpm@ukr.net

Робота присвячена дослідженню нелінійної поведінки шару, що лежить на пружній основі, при дії комбінованого навантаження – нормального та тангенціального. Задача формулюється у варіаційній постановці. Здійснений числовий аналіз напружено-деформованого стану шару залежно від коефіцієнта тертя і відносної жорсткості шару та основи.

*Ключові слова: плоска контактна задача, пружний напівпростір, покриття, напруження, переміщення, тертя, титома вага.*

## CONTACT INTERACTION THE LAYER WITH THE BASE UNDER THE COMBINED LOADING

Obodan N. I., Guk N. A., Kozakova N. L.

*Oles Honchar Dnipropetrovsk National University,  
Gagarin av., 72, Dnepropetrovsk, 49005, Ukraine*

kkt\_fpm@ukr.net

The problem of the layer's behavior, which lies on an elastic base, under the action of the combined load – normal and tangential, is considered. This system is modeled the surface of the road. The urgency of the problem is determined by the need to ensure reliability in the construction of various road constructions.

Contact area the layer with the base is unknown beforehand; the contact area in the process of loading is varied. Unilateral contact model is used for this process in the existing studies. It is assumed that the communication, which act between the contacting surfaces, work in the same direction. Using this method of simulation the conditions of contact are formulated in the form of inequalities.

Changes in the properties of the system when changing the status of the contact in the process of loading are provided the non-linearity of such systems. The most significant type of the nonlinearity is associated with the determination of the existence of the contact failure and the separation of its borders. To implement it in the design scheme contact elements are introduced formally and are simulated the all options of the contact opposite surfaces. When the contact is existed, elements falling within the separation zone are assigned zero stiffness. Slippage in separate zones is assigned the tangent stiffness of zero values. Various analytical and numerical methods to solve this problem are used; the finite element method is the most common. At the same time, the classical formulation of the problem of elasticity theory for a discrete body connection is used, the state of communications specified by various iterative methods. Such a statement violates the continuity of the process solution and does not always ensure its convergence.

At the same time, the classical formulation of the problem of elasticity theory for the solid with discrete connections is used; the state of connections is specified by various iterative methods. Such a formulation of the problem violates the continuity of the process solution and does not always ensure its convergence. At the same time, the classical formulation of the problem of elasticity theory for a discrete body connection is used, the state of communications specified by various iterative methods. Such the formulation violates the continuity of the process solution and does not always ensure its convergence. Variation formulation of the problem is used to eliminate this disadvantage, inequality constraints are attached to the functional, the contact areas and sliding are simulated using special functions. Using the finite element method for unconstrained optimization problem is formulated as a finite problem.

A new approach that is proposed in the paper is simulated clutch slippage and stripping special characteristic functions. This makes it possible to formulate the problem in the variation formulation without running preconditions. Using the finite element method the problem is reduced to identify the displacement values on the contact line and the unknown characteristic functions.

Analysis of stress-strain state of the layer depending on the friction coefficient and the relative stiffness of the base layer is held. Using the proposed model allows to establish a possible separation layer and its sliding. Variation formulation of the problem used to eliminate this disadvantage, inequality constraints are attached to the core functionality, and the contact area and sliding simulated special functions. Using the finite element method for unconstrained optimization problem is formulated as a finite task.

A new approach that is proposed in the work simulates clutch slippage and stripping special characteristic functions. This makes it possible to formulate the problem in the variation formulation without running preconditions. Using the finite element method reduces the problem to identify the problem, the displacement values on the contact line and unknown characteristic functions.

Analysis of stress-strain state of the layer depending on the friction coefficient and the relative stiffness of the base layer and held. Using the proposed model allows to establish a possible separation layer and its sliding.

*Key words: flat contact problem, an elastic semispace, surface, stress, movement, friction, specific gravity.*

### ВВЕДЕНИЕ

Исследованиям контактных задач для слоя, лежащего на упругом основании, посвящены многочисленные публикации, использующие различные модели поведения рассматриваемой системы [1-10]. Особое место занимают постановки задач, учитывающие такую конструктивную нелинейность, как наличие односторонних связей.

При контактном взаимодействии слоя с основанием зона контакта заранее неизвестна, причем она изменяется в процессе нагружения. В существующих исследованиях при моделировании такого процесса используется модель одностороннего контакта, когда связи, действующие между контактирующими поверхностями, работают в одну сторону. Моделирование таких связей условия контакта формулируются в виде неравенств. При этом нелинейность этих систем обусловлена изменениями в свойствах системы при изменении состояния контакта в процессе нагружения. Наиболее существенный тип нелинейности, связанный с определением существования площадки отрыва и ее границ, реализуется за счет формального введения в расчетную схему контактных элементов, моделирующих все варианты контактирования противоположащих поверхностей. При этом контактными элементами, попадающим в зону отрыва, назначают нулевую жесткость. Аналогично назначением нулевых значений касательной жесткости моделируется проскальзывание в отдельных зонах [1, 2].

Для решения указанных задач применяются различные аналитические и численные методы, наиболее распространенным является метод конечных элементов. При этом, как правило, используется классическая постановка задачи теории упругости для тела с дискретными связями, состояние связей уточняется различными итерационными методами, основанными на переключениях состояний [3-6].

Такая постановка нарушает непрерывность процесса решения и не всегда обеспечивает его сходимости. Для устранения этого недостатка наиболее перспективной является вариационная постановка задачи, в которой ограничения в виде неравенств присоединяются к основному функционалу, а зоны контакта и проскальзывания моделируются специальными функциями, что, при использовании метода конечных элементов, приводит к конечномерной задаче безусловной оптимизации.

В настоящей работе такой подход используется для решения задачи о контакте слоя и основания при комбинированном нагружении.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается упругий слой толщиной  $H$ , лежащий на упругом основании и нагруженный распределенной поверхностной нормальной  $q(x_1)$  и тангенциальной нагрузкой  $t(x_1)$ .

Разрешающая система уравнений плоской теории упругости на областях  $\Omega_i = \{x | x = \{x_1, x_2, x_3\} \in R^3, i = 1, 2, 3\}$  для слоя  $-\infty \leq x_1 \leq \infty$ ,  $0 \leq x_2 \leq H$  с гладкой границей контакта с основанием  $-\infty \leq x_1 \leq \infty$ ,  $-h \leq x_2 \leq 0$ ,  $h/H \gg 1$  при  $-\infty \leq x_3 \leq \infty$ , имеет вид [7]:

$$(\lambda_k + \mu_k) \text{grad div } u^k + \mu_k \Delta u^k + \tilde{q} = 0, \quad (1)$$

где  $u^k = \{u_1^k, u_2^k\}^T$  – вектор перемещений  $k$ -го слоя,  $\lambda_k = E_k \frac{\nu_k}{(1+\nu_k)(1-2\nu_k)}$ ,  $\mu_k = \frac{E_k}{2(1+\nu_k)}$  – коэффициенты Ляме,  $E_k, \nu_k$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона ( $k = \overline{1, 2}$ ) соответственно для слоя ( $k = 1$ ) и основания ( $k = 2$ );  $\tilde{q}$  – нагрузка, включающая собственный вес.

На верхней границе  $\Gamma_b$  ( $x_2 = H$ ) упругого слоя выполняются условия

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^{(1)}(u) &= q(x_1), \quad -\infty \leq x_1 \leq \infty, \\ \sigma_{12}^{(1)}(u) &= t(x_1), \quad -\infty \leq x_1 \leq \infty, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\sigma_{ij}^{(k)}(u)$ ,  $i, j = 1, 2$  – напряжения, выраженные через перемещения.

На границе раздела слоя и полупространства ( $x_2 = 0$ ) в зоне контакта  $\Gamma$  имеют место граничные условия

$$\sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)}, \quad u_2^{(k)} \leq 0, \quad \sigma_{22}^{(k)} \leq 0, \quad u_2^{(k)} \cdot \sigma_{22}^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2. \quad (3)$$

Предполагается, что существуют границы  $\Gamma_C, \Gamma_\Pi, \Gamma_O$ , соответствующие зоне сцепления, проскальзывания и отрыва соответственно, такие, что  $\Gamma_C \cup \Gamma_\Pi \cup \Gamma_O = \Gamma$ ,  $\Gamma_C \cap \Gamma_\Pi \cap \Gamma_O = \emptyset$ .

В зоне сцепления  $x_1 \in \Gamma_C$  выполняются условия:

$$\begin{aligned} u_1^{(1)} = u_1^{(2)}, \quad u_2^{(1)} = u_2^{(2)}, \\ \left| \sigma_{12}^{(1)} \right| \leq K \left| \sigma_{22}^{(1)} \right|, \quad \left| \sigma_{12}^{(2)} \right| \leq K \left| \sigma_{22}^{(2)} \right|, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $K$  – коэффициент трения.

В зоне проскальзывания для всех  $x_1 \in \Gamma_\Pi$

$$\begin{aligned} u_2^{(1)}(x_1 + u_1^{(1)}) = u_2^{(2)}(x_1 + u_1^{(2)}), \\ \left| \sigma_{12}^{(k)} \right| - K \left| \sigma_{22}^{(k)} \right| \geq 0, \\ u_1^{(1)} \neq u_1^{(2)}. \end{aligned} \quad (5)$$

В зоне отрыва для всех  $x_1 \in \Gamma_O$

$$\sigma_{22}^{(k)} = 0, \quad \sigma_{12}^{(k)} = 0. \quad (6)$$

Здесь  $\sigma_{ij}^{(k)}, u_i^{(k)}$ ,  $i, j = 1, 2$  – компоненты тензора напряжений и перемещений в слое ( $k = 1$ ) и основании ( $k = 2$ ).

### МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для описания неизвестных участков границ введем характеристические функции для точек границ  $\Gamma_C, \Gamma_\Pi, \Gamma_O$  в виде:

$$\begin{aligned} \gamma_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } \left| \sigma_{12} \right| \geq K \left| \sigma_{22} \right|, \quad x \in \Gamma_\Pi, \\ 0 & \text{при } \left| \sigma_{12} \right| < K \left| \sigma_{22} \right|, \quad x \in \Gamma_C; \end{cases} \\ \gamma_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } \sigma_{22} < 0, \quad x \notin \Gamma_O, \\ 1 & \text{при } \sigma_{22} \geq 0, \quad x \in \Gamma_O. \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

С учетом соотношения (7) вариационная постановка краевой задачи (1)-(6) будет иметь вид [8]

$$W = \arg \min_{W \in \tilde{W}} \mathfrak{E}(W), \quad (8)$$

при предварительном выполнении условия (4), где  $u = \{u^k\}^T$ ,  $k = 1, 2$ ,  $W = \{u, u^*\}^T$

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}(W) = & \sum_{k=1}^2 \left\{ \int_{\Omega} \frac{1}{2} C_k^{ijlm} \varepsilon_{ij}^k(u) \varepsilon_{lm}^k(u) d\Omega + \int_{\Gamma_a} (q(x_1)u_2^{(1)} + t(x_1)u_1^{(1)}) d\Gamma_a + \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma} \left\{ \gamma_1 K \sigma_{22}^k(u) u_1^k + \gamma_2 \left[ \sigma_{22}^k(u) (u_2^k - u_{2k}^*) + \sigma_{12}^k(u) (u_1^k - u_{1k}^*) \right] \right\} d\Gamma \right\}; \end{aligned} \quad (9)$$

$C_k^{ijlm}$  – коэффициенты жесткости,  $\varepsilon_{ij}^k = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ ,  $i, j, l, m = 1, 2$ ,  $u_{ik}^*$  – варьируемые значения перемещений на линии контакта,  $\sigma_{ij}^{(k)}$ ,  $u^{(k)}$  – значения напряжений и перемещений из области  $\Omega$  на ее границе. Принято соглашение о суммировании по повторяющимся индексам.

Для построения решения задачи (8) осуществляется переход к дискретной модели с использованием конечно-элементной аппроксимации [8]. Для этого на области  $\Omega$  вводится сетка с узлами в точках с координатами  $X_s$ ,  $s = 1, N$ , где  $X_s = \{x_{1s}, x_{2s}\}$ , тогда неизвестные функции  $u(x)$ ,  $\sigma_{ij}(x)$ ,  $u^*(x)$  представляются в виде векторов, компонентами которых являются значения функций задачи в узлах сетки

$$\begin{aligned} u = \{u_i\}^T, \quad \sigma_{ij} = \{\sigma_{ijs}\}^T, \quad u^* = \{u_i^*\}, \quad u_i = \{u_{ik}\}, \quad u_{ik} = \{u_{iks}\}, \\ u_i^* = \{u_{ik}^*\}^T, \quad u_{ik}^* = \{u_{iks}^*\}, \quad \gamma = \{\gamma_k\}^T, \quad \gamma_k = \{\gamma_{ks}\}^T, \\ i, j = 1, 2, \quad s = 1, N, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (10)$$

Узлы, лежащие на границе  $\Gamma$ , нумеруются как  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_M\}$ , число  $M$  выбирается путем численного эксперимента. Из элементов вектора  $P$  могут быть сформированы вектора

$$P^C = \{p_1^C, p_2^C, \dots, p_{r_1}^C\}, \quad P^\Pi = \{p_1^\Pi, p_2^\Pi, \dots, p_{r_2}^\Pi\}, \quad P^O = \{p_1^O, p_2^O, \dots, p_{r_3}^O\}, \quad (11)$$

которые определяют узлы сетки, соответствующие зонам сцепления, проскальзывания и отрыва путем вычисления значений  $\gamma_k$  в соответствии с условиями (7).

После подстановки конечно-элементной аппроксимации в функционал (9), интегрирования и выполнения процедуры (8), получим разрешающую систему уравнений  $N$ -го порядка

$$Qu = R, \quad (12)$$

эквивалентную условию  $\partial \tilde{\mathfrak{E}}^* / \partial u_{is} = 0$ ,  $i = \overline{1, 2}$ ,  $s = \overline{1, N}$ ,  $\tilde{\mathfrak{E}}^*$  – значения функционала  $\tilde{\mathfrak{E}}$  после подстановки конечно элементной аппроксимации и выполнения процедуры интегрирования,  $Q$  – матрица жесткости, зависящая от значений векторов  $\gamma$ ,  $R$  – вектор, зависящий от  $u^*$ .

При построении матрицы жесткости учитывается, что

$$\sigma = Bu, \quad (13)$$

где  $\sigma = \{\sigma_{ijs}, i, j = \overline{1, 2}, s = \overline{1, N}\}^T$ ,  $B$  – функциональная матрица коэффициентов, получаемая из физических и геометрических соотношений.

Для выполнения условия минимума  $\tilde{\mathfrak{E}}$  по  $u_{is}^*$ ,  $s = \overline{1, N}$  используется метод градиентного спуска

$$u^{*(n)} = u^{*(n-1)} - \alpha^{(n-1)} \sigma^{(n-1)}. \quad (14)$$

Здесь

$$\sigma^{(n-1)} = \left\{ \sigma_s^{(n-1)} \right\}^T, \quad \sigma_s^{(n-1)} = \left\{ \sigma_{12s}^{(n-1)} \sigma_{22s}^{(n-1)} \right\}^T, \quad s = \overline{1, N},$$

где  $n$  – номер итерации.

Коэффициент  $\alpha^{(n)}$  – определяется из условия

$$\alpha^{(n)} = \arg \min_{\alpha} \tilde{\Theta} \left( u^{*(n-1)} \right) \quad (15)$$

методом половинного деления.

Значение функции  $\gamma_{ks}$  определяется в соответствии с условием (7).

### Алгоритм.

0. Задать  $l=1, n=1, \sigma_{22s} = q_s^*, \sigma_{12s}^{(0)} = t_s^{(0)}$  для  $\forall x_s \in \Gamma_\epsilon, u_{is}^{*(1,1)} = 0, \gamma_k^{(1,1)} = 0, k = \overline{1, 2}, \epsilon$  – малое число,  $\alpha^{(1,1)}, \Delta\alpha, t^*$ .
1. На каждом шаге по нагрузке  $t^{(n)} = t^{(n-1)} + \Delta t, t^{(n)} \leq t^*$
2. Построить сетку с узлами  $X_s, s = \overline{1, N}$ .
3. Сформировать вектор неизвестных  $u$  с учетом условий  $u_{1s}^{(1)} = u_{1s}^{(2)}, u_{2s}^{(1)} = u_{2s}^{(2)}$ , для узлов  $X_s$ , таких что  $X_s \in \Gamma$ .
4. Сформировать систему уравнений (12).
5. Определить вектор  $u^{(n,1)}, \sigma^{(n,1)}$ .
6. Определить вектор  $\gamma_{ks}^{(n,1)}, X_s \in \Gamma, k = \overline{1, 2}$ .
7. Если  $\exists \gamma_{ks}^{(n,1)} \neq 0$ , то дальше, иначе на пункт 1.
8. Определить  $u_{is}^{*(n,1)} \left( \alpha^{(n,1)}, u^{(n,1)} \right)$  по формуле (14).
9. Определить номера узлов  $P^{O(n,1)}, P^{\Pi(n,1)}, P^{C(n,1)}$  на основании значений вектора  $\gamma_k^{(n,1)}$ .
10. Создать узлы  $P_i^{O(n,1)}, i = \overline{1, 2}$  с соответствующими перемещениями  $u_2^{*(1)(n,1)} \neq u_2^{*(2)(n,1)}$ , и узлы  $P_i^{\Pi(n,1)}, i = \overline{1, 2}$  с соответствующими перемещениями  $u_1^{*(1)(n,1)} \neq u_1^{*(2)(n,1)}$ , сформировать вектор неизвестных  $u$ .
11. Определять  $\alpha^{(n,1)}$  из условия (16), пока  $\left\| u_{is}^{*(n,1)} - u_{is}^{*(n,l-1)} \right\| > \epsilon$ , на пункт 4, иначе на пункт 1.

**Результаты расчета.** С помощью предложенного алгоритма был проведен анализ поведения слоя  $H = 10 \text{ см}$ , имеющего следующие характеристики: для первого варианта был выбран удельный вес  $\gamma_1 = 2.72 \cdot 10^{-3} (\text{кг} / \text{см}^3)$ , модуль Юнга  $E_1 = 7.6 \cdot 10^2 \text{ кг} / \text{см}^2$  и коэффициент Пуассона  $\nu_1 = 0.28$  (для относительно мягкого покрытия), а для второго –  $\gamma_2 = 2.76 \cdot 10^{-3} (\text{кг} / \text{см}^3)$ ,  $E_1 = 7.6 \cdot 10^4 \text{ кг} / \text{см}^2$  и  $\nu_1 = 0.41$  (для относительно твердого покрытия). Основание описывалось следующими характеристиками:  $E_2 = 7.6 \cdot 10^4 \text{ кг} / \text{см}^2$ ,  $\nu_2 = 0.41$  – для первого варианта и  $E_2 = 3.8 \cdot 10^4 \text{ кг} / \text{см}^2$ ,  $\nu_2 = 0.35$  – для второго соответственно. Был введен безразмерный параметр  $\chi = E_1 / E_2$ , при этом для относительно мягкого покрытия  $\chi = 0.01$ , а для относительно твердого покрытия  $\chi = 2$ .

Размеры моделируемого полубесконечного основания выбирались из условия затухания решения при полном сцеплении ( $h = 50 \text{ см}$ ,  $L = 76 \text{ см}$ ). Решения задач (8) осуществлялись с помощью пакета прикладных программ «Cosmos» с автоматическим предварительным «слиянием» и «разъединением» узлов, соответствующим зонам сцепления, проскальзывания и отрыва. Использовался плоский конечный элемент. На рис. 1 представлена модель рассматриваемой системы, содержащая 1217 элементов и 1309 узлов.

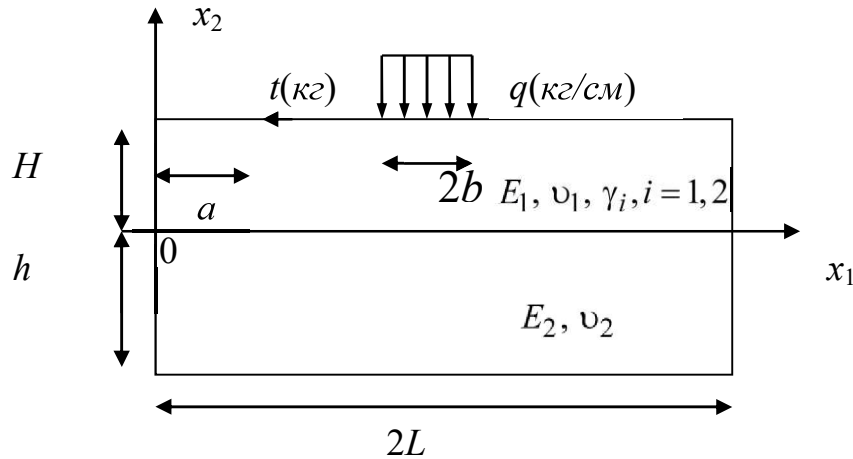


Рис. 1. Схема нагружения слоя, лежащего на упругом основании

Вначале исследовалось поведение слоя при наличии только касательной нагрузки  $t(x_1)$  ( $q = 0$ ). На рис. 2-3 приведены значения относительных смещений в слое  $\Delta u_1 = (u_1^{(1)}(x_1) - u_1^{(2)}(x_1)) / H$ ,  $\Delta u_2 = (u_2^{(1)}(x_1) - u_2^{(2)}(x_1)) / H$  в зависимости от относительной жесткости слоя и значения коэффициента трения  $K$  при  $t(x_1) = t_0 \delta(x_1 - a)$ ,  $t_0 = -1 \text{ кг}$ , где  $a$  – расстояние точки приложения силы от начала координат модельной конечно-элементной системы.

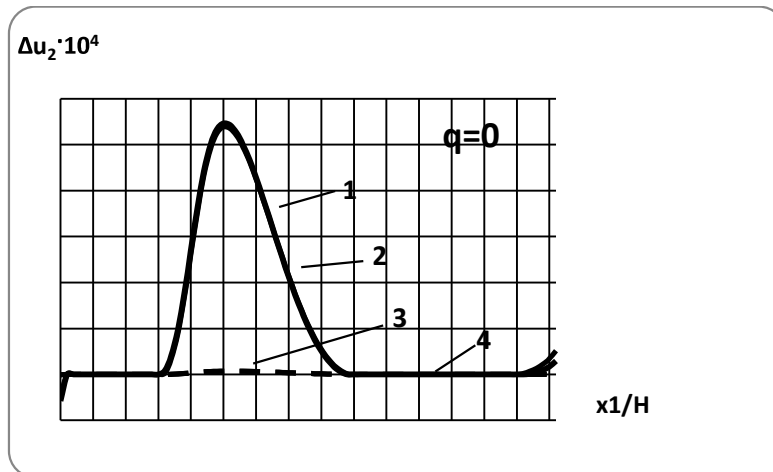


Рис. 2. Относительное перемещение точек слоя и основания на границе раздела:

- 1 – при  $K = 0.3$ ,  $\chi = 0.01$ ,  $\gamma_1$ ; 2 – при  $K = 0.7$ ,  $\chi = 0.01$ ,  $\gamma_1$ ;  
3 – при  $K = 0.3$ ,  $\chi = 2$ ,  $\gamma_2$ ; 4 – при  $K = 0.7$ ,  $\chi = 2$ ,  $\gamma_2$

Из приведенных результатов следует, что при больших значениях относительной жесткости слоя раскрытие практически отсутствует, при малых – имеет тот же порядок, что и проскальзывание, но не зависит от коэффициента трения. Проскальзывание в обоих случаях имеет одинаковый порядок и зависит от коэффициента трения. Так, при изменении коэффициента трения от 0.7 до 0.3 проскальзывание изменяется в  $\sim 1.4$  раза.

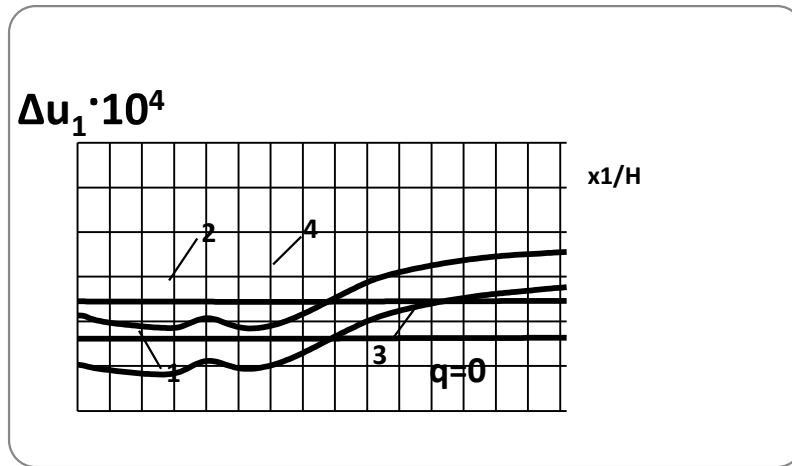


Рис. 3. Относительное проскальзывание точек слоя и основания на границе раздела:

1 – при  $K = 0.3, \chi = 0.01, \gamma_1$ ; 2 – при  $K = 0.7, \chi = 0.01, \gamma_1$ ;

3 – при  $K = 0.3, \chi = 2, \gamma_2$ ; 4 – при  $K = 0.7, \chi = 2, \gamma_2$

При комбинированном нагружении поперечной нагрузкой

$$q(x_1) = \begin{cases} q & \text{при } -b \leq x_1 \leq b, \\ 0 & \text{при } x_1 > b, x_1 < -b; \end{cases}$$

и

$$t(x_1) = t_0 \delta(x_1 - a), \quad b = 4 \text{ см}, \quad a = 40 \text{ см}$$

раскрытие при большой относительной жесткости отсутствует, при малой – зависит от коэффициента трения и имеет порядок проскальзывания (рис. 4-5). Проскальзывание уменьшается в обоих случаях по сравнению со случаем  $q = 0$ , но существенно зависит от относительной жесткости слоя и от коэффициента трения. Кроме того, раскрытие зоны контакта, в отличие от напряженного состояния, определяется наличием и величиной касательной нагрузки даже при наличии поперечного нагружения.

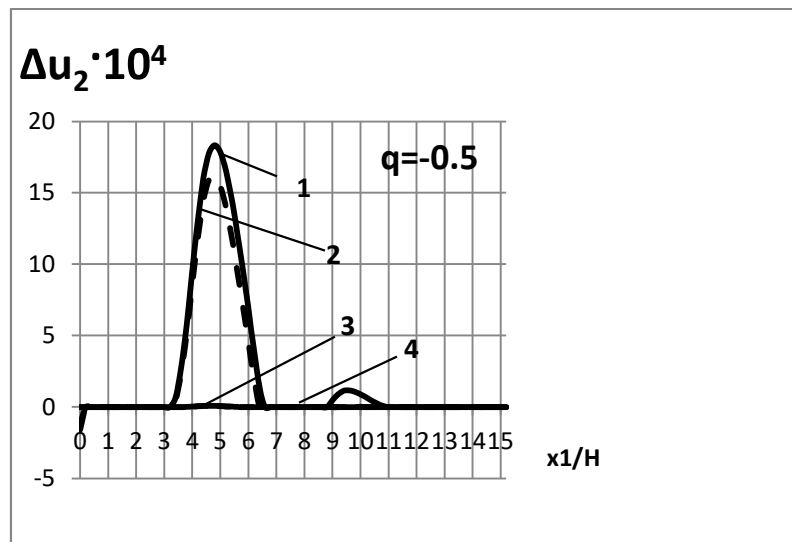


Рис. 4. Относительное перемещение точек слоя и основания на границе раздела:

1 – при  $K = 0.3, \chi = 0.01, \gamma_1$ ; 2 – при  $K = 0.7, \chi = 0.01, \gamma_1$ ;

3 – при  $K = 0.3, \chi = 2, \gamma_2$ ; 4 – при  $K = 0.7, \chi = 2, \gamma_2$



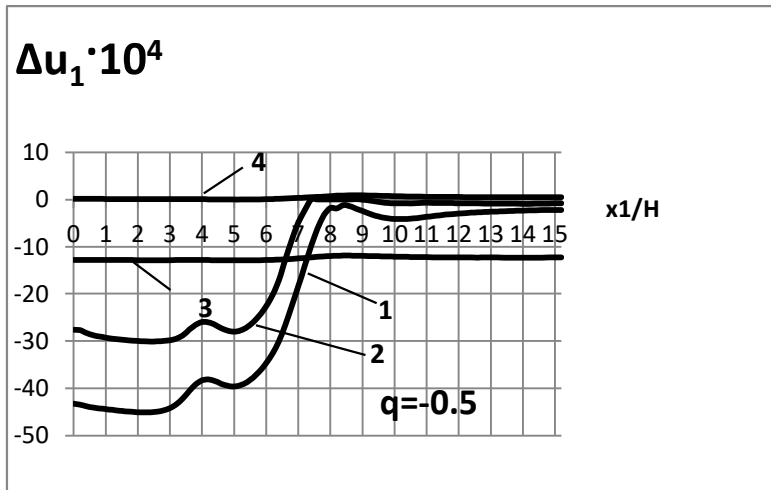


Рис. 5. Относительное проскальзывание точек слоя и основания на границе раздела:  
 1 – при  $K = 0.3, \chi = 0.01, \gamma_1$ ; 2 – при  $K = 0.7, \chi = 0.01, \gamma_1$ ;  
 3 – при  $K = 0.3, \chi = 2, \gamma_2$ ; 4 – при  $K = 0.7, \chi = 2, \gamma_2$

Картина напряженного состояния на линии контакта при комбинированном нагружении существенно отличается от случая  $q = 0$  – даже в случае  $t/q = 2$  она определяется поперечной нагрузкой (рис. 6, 7).

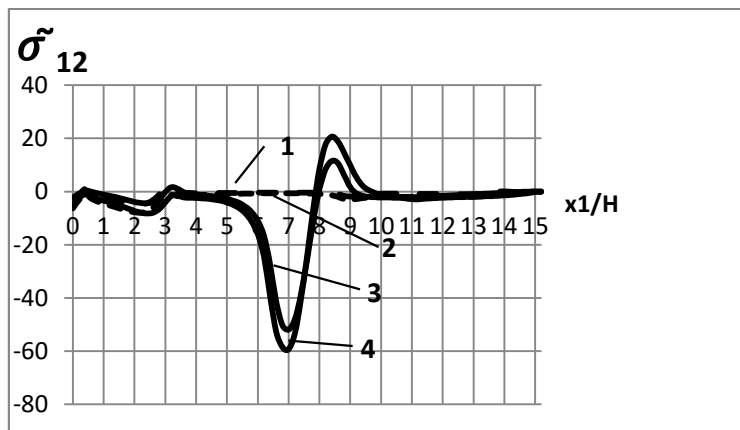


Рис. 6. Функция  $\tilde{\sigma}_{12} = \sigma_{12}^{(2)} \cdot H^2 / t$  на верхней границе основания:  
 1 – при  $K = 0.3, \chi = 0.01, \gamma_1, q = 0$ ; 2 – при  $K = 0.7, \chi = 0.01, \gamma_1, q = 0$ ;  
 3 – при  $K = 0.3, \chi = 0.01, \gamma_1, q = -0.5$ ; 4 – при  $K = 0.7, \chi = 0.01, \gamma_1, q = -0.5$

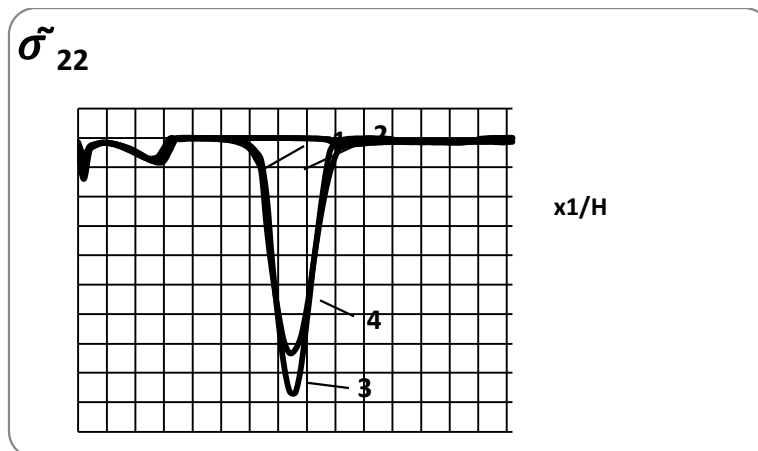


Рис. 7. Функция  $\tilde{\sigma}_{22} = \sigma_{22}^{(2)} \cdot H^2 / t$  на верхней границе основания:  
 1 – при  $K = 0.3, \chi = 0.01, \gamma_1, q = 0$ ; 2 – при  $K = 0.7, \chi = 0.01, \gamma_1, q = 0$ ;  
 3 – при  $K = 0.3, \chi = 0.01, \gamma_1, q = -0.5$ ; 4 – при  $K = 0.7, \chi = 0.01, \gamma_1, q = -0.5$

## ВЫВОДЫ

Проведенный численный анализ позволяет установить, что:

- 1) жесткость слоя существенно влияет как на наличие отрыва слоя, так и на величину проскальзывания как при наличии комбинированного нагружения, так и в случае только касательной нагрузки.
- 2) при комбинированном нагружении уровень напряженного состояния определяется нормальной нагрузкой при нагрузках, величина которых имеет один порядок, при этом зависимость от коэффициента трения сохраняется.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лукашевич А. А. О решении контактных задач строительной механики с односторонними связями и трением методом пошагового анализа / А. А. Лукашевич, Л. А. Розин // Инженерно-строительный журнал. – 2013. – № 1. – С. 75-81.
2. Зернин М. В. Моделирование контактного взаимодействия с использованием положений механики «контактной псевдосреды» / М. В. Зернин, А. П. Бабин, А. В. Мишин, В. Ю. Бурак // Вестник Брянского государственного технического университета. – 2007. – № 4(16). – С. 62-73.
3. Долгачев М. В. Применение метода Лемке для расчета пластин на одностороннем основании Винклера / М. В. Долгачев // Новые идеи нового века – 2011 : материалы одиннадцатой международной научной конференции ИАС ТОГУ. The New Ideas Of The New Century 2011 : The Eleven International Scientific Conference Proceeding of IACE PNU : в 2 т. – Хабаровск, 2011. – С. 25-32.
4. Смирнов М. С. Решение контактной задачи теории упругости с податливостью в односторонних связях методом итераций по зазорам / М. С. Смирнов // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань : УНИПРЕСС, 1998. – С. 138-139.
5. Розин Л. А. Вариационные постановки задачи теории упругости с идеальными односторонними связями. Задачи Синьорини / Л. А. Розин // Метод конечных элементов и строительная механика. Труды ЛПИ. – № 236. – 1979. – С. 3-15.
6. Ловцов А. Д. Применение алгоритма Лемке к задаче изгиба балки, взаимодействующей с упругим основанием посредством трения Кулона / А. Д. Ловцов // Вестник гражданских инженеров. – 2006. – № 5. – С. 19-26.
7. Александров В. М. Механика контактных взаимодействий / В. М. Александров, И. И. Ворович. – М. : Наука, 2001. – 670 с.
8. Bathe K. Numerical method in finite element analysis // K. Bathe, E. L. Wilson. – М. : Наука, 1985. – 648 с.
9. Jun L. Numerical and experimental analysis of delamination in the T-stifferer integrated composite structure / L. Jun., X. Y. Lui, Y. Y. Nan, Y. Xuefeng // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2016. – V. 23(10). – P. 1188-1196.
10. Slobodyan B. S. Modeling of Contact Interaction of Periodically Textured Bodies with Regard for Frictional Slip / B. S. Slobodyan, B. A. Lyashenko, N. I. Malanchuk, V. E. Marchuk, R. M. Martyniak // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – Vol. 215, iss. 1. – P. 110-120.

## REFERENCES

1. Lukashevich, A.A. and Rozin, L.A. (2013), “On the decision of contact problems of structural mechanics with unilateral constraints and friction by step-by-step analysis”, *Inzhenerno-stroitelnyi zhurnal*, no. 1, pp. 75-81.
2. Zernin, M.V., Babin, A.P., Mishin, A.V. and Burak, V.YU. (2007), “Simulation of the contact interaction with provisions of the Mechanics’ the pseudo-contact”, *Vestnik Brianskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, no. 4(16), pp. 62-73.
3. Dolgachev, M.V. (2011), “Application of the method for calculating lemken plates one-sided Winkler base”, *Novye idei novogo veka – 2011: materialy odinadtsatoy mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsui IAS TOGU* [The New Ideas Of The New Century 2011: The Eleven International Scientific Conference Proceeding of IACE PNU], Khabarovsk, vol. 1-2, pp. 25-32.
4. Smirnov, M.S. (1998), “Solution elasticity contact problem with suppleness in one-way communication by method to iterate through the gaps”, *Trudy matematicheskogo tsentra im. N.I. Lobachevskogo*, UNIPRESS, Kazan, pp.138-139.

5. Rozin, L.A. (1979), "The variational formulation of the elasticity problem with perfect unilateral constraints. Tasks Signorini", *Metod konechnykh elementov i stroitel'naya mekhanika. Trudy LPI*, no. 236, pp. 3-15.
6. Lovtsov, A.D. (2006), "Application Lemke algorithm to the problem of bending of the beam interacting with the elastic base by Coulomb friction", *Vesnik grazhdanskikh inzhenerov*, no. 5, pp. 19-26.
7. Alekandrov, V.M. and Vorovich, I.I. (2001), "Mekhanika kontaktnykh vzaimodeystviy" [Contact mechanics], Nauka, Moscow, Russia.
8. Bathe, K. and Wilson, E.L. (1985), "Numerical method in finite element analysis", Nauka, Moscow, Russia.
9. Jun, L., Lui, X.Y., Nan, Y.Y. and Xuefeng, Y. (2016), "Numerical and experimental analysis of delamination in the T-stiffener integrated composite structure", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 23(10), pp. 1188-1196.
10. Slobodyan, B.S., Lyashenko, B.A., Malanchuk, N.I., Marchuk, V.E. and Martynyak, R.M. (2016), "Modeling of Contact Interaction of Periodically Textured Bodies with Regard for Frictional Slip", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 215, iss. 1, pp. 110-120.

УДК 519.876.5

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДЕФОРМУВАННЯ ТРИШАРОВОЇ ПЛАСТИНИ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ

Овський О. Г., здобувач, Леонтєва В. В., к. ф.-м. н., доцент,

Кондрат'єва Н. О., к. ф.-м. н., доцент

*Запорізький національний університет,*

*вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

vleonteva15@gmail.com, n-kondr@mail.ru

У статті розглянутий вигин пружної прямокутної тришарової пластини із твердим наповнювачем, яка перебуває у стані спокою на пружній основі. Для опису кінематики шарів прийняті гіпотези Кірхгофа. Реакція основи описана моделлю Вінклера. На контурі пластини передбачається наявність твердої діафрагми, яка перешкоджає відносному зсуву шарів. Для побудови системи рівнянь рівноваги використано варіаційний принцип Лагранжа разом зі спрощуючою символікою В.З. Власова.

*Ключові слова: Вінклерова основа, спрощуюча символіка, принцип Лагранжа, гіпотези Кірхгофа, наповнювач.*

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Овский А. Г., соискатель, Леонтёва В. В., к. ф.-м. н., доцент,

Кондратьева Н. А., к. ф.-м. н., доцент

*Запорожский национальный университет,*

*ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

vleonteva15@gmail.com, n-kondr@mail.ru

В статье рассмотрен изгиб упругой прямоугольной трехслойной пластины с жестким наполнителем, которая находится в состоянии покоя на упругом основании. Для описания кинематики слоев приняты гипотезы Кирхгофа. Реакция основы описана моделью Винклера. На контуре пластины предполагается наличие твердой диафрагмы, которая препятствует относительному сдвигу слоев. Для построения системы уравнений равновесия использован вариационный принцип Лагранжа вместе с упрощающей символикой В.З. Власова.

*Ключевые слова: Винклерово основание, упрощающая символіка, принцип Лагранжа, гипотезы Кирхгофа, наполнитель.*