УДК 511.41+517.927.2

ЗАСТОСУВАННЯ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ ДЛЯ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Величко І. Г., к. ф.-м. н., доцент, [1]Ткаченко І. Г., к. ф.-м. н., доцент, [1]Балабанова В. В., студентка

[1]Запорізький національний університет, вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна

tig81@mail.ru

У статті запропоновано спосіб розв'язання систем диференціальних рівнянь, який ґрунтується на представленні шуканого розв'язку у вигляді функціонального ланцюгового дробу. Такий метод розв'язання застосовано вперше. Відмічено також, що отримані наближення є апроксимаціями Паде шуканої функції-розв'язку. Наведено приклади, які ілюструють використання такого способу.

Ключові слова: *ланцюговий дріб, наближення Паде, диференціальне рівняння, система диференціальних рівнянь.*

ПРИМЕНЕНИЕ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Величко И. Г., к. ф.-м. н., доцент, [1]Ткаченко И. Г., к. ф.-м. н., доцент, [1]Балабанова В. В., студентка

[1]Запорожский национальный университет, ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина

tig81@mail.ru

В статье предложен способ решения систем дифференциальных уравнений, который базируется на представлении искомого решения в виде функциональной цепной дроби. Данный метод предложен впервые. Отмечено, что полученные приближения являются аппроксимациями Паде искомой функции-решения. Для иллюстрации предложенного способа приведены примеры решения.

Ключевые слова: *цепная дробь, приближения Паде, дифференциальное уравнение, система дифференциальных уравнений.*

PREPARATION CONTINUED FRACTIONS FOR THE APPROXIMATE SOLUTION SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Velichko I. G., [1]Tkachenko I. G., [1]Balabanova V. V.

Zaporizhzhya National University, Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine

tig81@mail.ru

To describe the processes that occur in real life, using various mathematical models, including those described by ordinary differential equations and systems of such equations. Solutions of some differential equations are known, some of the equations can not be solved in elementary, but have a solution in the special functions. However, most of the equations can not be solved by quadrature, and various approximation methods should be used for them. One of the most effective methods to obtain approximate solutions have rows of the method by which, for example, the Bessel functions are introduced. From the theory of approximations is known that it is often more accurate than the approximation by polynomials, rational functions are approximations. The method of continued fractions, applied to first order differential equations, yields approach to solving systems of differential equations at once in the form of Pade approximants. The development process for the preparation of analytical approximations to the solution in the form of approximations Pade has an urgent task of mathematics. We note also that the Pade approximation of a given type of solutions of differential equations or systems of differential equations with the initial conditions can be obtained directly, using the method of undetermined coefficients. However, to obtain a more accurate approximation is necessary to carry out all the calculations again. In contrast to the direct construction of Pade approximations proposed in the method allows to improve them using data obtained from the previous iteration.

Key words: continued fraction, Pade approximation, differential equation, system of differential equations.

ВСТУП

Функціональні ланцюгові дроби мають доволі широку область застосування [1, 3, 9, 11]. У праці [11] описано метод, запропонований Ж. Лагранжем, для розв'язання диференціальних рівнянь Ріккаті. Розв'язанню рівнянь Ріккаті присвячені також роботи [6, 10].

Метою роботи є побудова наближених розв'язків деяких систем диференціальних рівнянь, а також рівнянь старших порядків, які можна звести до систем. Новизною роботи є те, що метод ланцюгових дробів застосовується до нового класу об'єктів – систем диференціальних рівнянь.

Для отримання наближених розв'язків систем застосовують різні методи [7, 12], одним з яких є метод наближення раціональними функціями. Наведений у роботі метод дозволяє отримувати наближення до розв'язку системи диференціальних рівнянь у вигляді наближень Паде [4]. Але, на відміну від безпосереднього знаходження Паде-апроксимацій, запропонований метод дозволяє покращувати їх, використовуючи дані попередньої ітерації. Отримання наближень Ерміта-Паде описано в роботі [5], при цьому використовується не явний вид диференціальних рівнянь, а лише властивості диференціальних та рекурентних рівнянь. У роботі [2] апроксимації Паде застосовуються для доведення існування розв'язків диференціальних рівнянь при деяких обмеженнях.

У доступній для нас літературі не вдалося виявити приклади знаходження наближених розв'язків задач Коші для систем диференціальних рівнянь методом ланцюгових дробів. У запропонованій роботі наводяться такі приклади.

СУТЬ МЕТОДА

Розглянемо систему диференціальних рівнянь, записану в нормальному вигляді

$$\left\{ y_i' = f_i\left(x, y_1, \ldots, y_n\right),\ i = \overline{1,n} \right. \tag{1}$$

з початковими умовами

$$y_i\left(0\right) = \overline{y}_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Кожну з невідомих функцій будемо шукати у вигляді

$$y_i\left(x\right) = \overline{y}_i + C_i x^{\alpha_i},$$

у якому додатні константи α_i та ненульові константи C_i обираються з умови, що різниці між лівими та правими частинами рівнянь системи (1) є при $x \to 0$ нескінченно малими якомога вищого степеня.

Після визначення констант шукані функції $y_i\left(x\right)$ представляємо через нові функції $z_{1i}\left(x\right)$ за формулами

$$y_i\left(x\right) = \overline{y}_i + \frac{C_i x^{\alpha_i}}{1 + z_{1i}\left(x\right)}, \tag{3}$$

причому будемо вважати, що

$$z_{1i}\left(0\right) = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Перший із індексів при $z_{1i}(x)$ означає номер ітерації.

Зі співвідношень (3) матимемо, що

$$y_i' = \frac{C_i x^{\alpha_i - 1}}{\left(1 + z_{1i}\right)^2}\left(\alpha_i\left(1 + z_{1i}\right) + x z_{1i}'\right). \tag{5}$$

Підставимо вирази (3) та (5) в (1). Після перетворень будемо мати систему:

$$\left\{ g_i\left(z_{1i}', z_{11}, \ldots, z_{1n}, x\right) = 0,\ i = \overline{1, n} \right. \tag{6}$$

з початковими умовами (4).

Для виконання наступної ітерації застосуємо ті ж самі міркування, що наведені вище. Єдина несуттєва різниця полягає в тому, що починаючи з другої ітерації будемо мати нульові початкові умови, і тому при $x \to 0$ виконуються умови: $z_{1i}(x) \sim M_{1i} x^{\beta_{1i}}$. Для визначення констант M_{1i} та β_{1i} у цій статті ми будемо використовувати ряди Маклорена.

Так само, як зазначено вище, для пошуку нових невідомих функції $z_{1i}(x)$ маємо представлення:

$$z_{1i}(x) = \frac{M_{1i} x^{\beta_{1i}}}{1 + z_{2i}(x)}, \tag{7}$$

де нові шукані функції $z_{2i}(x)$ задовольняють нульовим початковим умовам.

Для запису результатів першої ітерації ми повинні в (3) покласти рівним нулю $z_{1i}(x)$. Для запису результатів другої ітерації ми повинні в (7) покласти $z_{2i}(x) = 0$ та отриманий результат підставити в (3), й так далі. На кожній ітерації для кожної з шуканих функцій отримуємо функціональний ланцюговий дріб, який шляхом алгебраїчних перетворень зводиться до звичайного дробу.

У випадку, якщо розглядається задача Коші для диференціального рівняння степеня, більшого за одиницю, яке можна розв'язати відносно старшої похідної, то після запису цієї задачі у вигляді еквівалентної їй нормальної системи також можна застосувати наведену методику.

ЧИСЕЛЬНІ ПРИКЛАДИ

Приклад 1 [8]. Розглянемо лінійну систему

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 + y_2 - e^{2t}, \\ y_2' = -2y_1 + y_2 \end{cases} \tag{8}$$

з початковими умовами

$$\begin{cases} y_1(0) = 2, \\ y_2(0) = -1. \end{cases} \tag{9}$$

Розв'язок цієї системи має вигляд $y_1 = e^{3t} + (t+1)e^{2t}$, $y_2 = -e^{3t} - 2te^{2t}$.

Вважаємо, що шукані функції можуть бути розкладені в ряди Маклорена. Підставимо $x = 0$ в (9), та, з урахуванням (8), знаходимо, що $y_1'(0) = 6$, $y_2'(0) = -5$. Для того, щоб виконувалися умови

$$\begin{cases} y_1' - 4y_1 - y_2 + e^{2t} = o(x), \\ y_2' + 2y_1 - y_2 = o(x), \end{cases}$$

потрібно взяти $C_1 = 6,\ \alpha_1 = 1,\ C_2 = -5,\ \alpha_2 = 1$. Отже шукані функції представляємо у вигляді:

$$y_1 = 2 + \frac{6x}{1+z_{11}},\ \ y_2 = -1 + \frac{-5x}{1+z_{12}}. \tag{10}$$

Підставимо (10) в (8), та для зручності помножимо перше рівняння на $(1+z_{11})^2(1+z_{12})$, а друге – на $(1+z_{11})(1+z_{12})^2$. Отримаємо рівняння:

$$(6-24x)(1+z_{11})(1+z_{12}) - 6xz_{11}'(1+z_{12}) + \left(e^{2x}-7\right)(1+z_{11})^2(1+z_{12}) + 5x(1+z_{11})^2 = 0,$$

$$(5x-5)(1+z_{11})(1+z_{12}) + 5xz_{12}'(1+z_{11}) + 5(1+z_{11})(1+z_{12})^2 + 12x(1+z_{12})^2 = 0. \tag{11}$$

Розкладемо ліві частини цих виразів у ряди з урахуванням того, що $z_{11}(0) = z_{12}(0) = 0$. Отримаємо співвідношення:

$$\left(-17 - 12z_{11}'(0)\right)x + o(x),\quad \left(10z_{12}'(0) + 17\right)x + o(x).$$

Прирівнявши дужки до нуля, знаходимо, що $z_{11}'(0) = -\frac{17}{12}x$, $z_{12}'(0) = \frac{17}{10}x$. Звідси визначаємо, що $z_{11} = -\frac{17}{12}x + o(x)$, $z_{11} = -\frac{17}{12}x + o(x)$, $z_{12} = -\frac{17}{10}x + o(x)$. У результаті другої ітерації отримуємо такі вирази

$$y_1 = 2 + \frac{6x}{1 - \frac{17}{12}x} = \frac{38x+24}{-17x+12},\ \ y_2 = -1 + \frac{-5x}{1-\frac{17}{10}x} = \frac{33x+10}{17x-10}. \tag{12}$$

Наступну ітерацію шукаємо у вигляді:

$$z_{11} = \frac{-\frac{17}{12}x}{1+z_{21}(x)},\quad z_{12} = \frac{-\frac{17}{10}x}{1+u_{22}(x)}. \tag{13}$$

Підставляємо (13) в (11) та для зручності помножимо перше рівняння на $(1+z_{21})^2(1+z_{22})$, а друге – на $(1+z_{21})(1+z_{22})^2$. Розкладаємо ліві частини в ряди Маклорена з урахуванням того, що $z_{21}(0) = z_{22}(0) = 0$:

$$\left(-\frac{51}{2}z_{21}'(0) + \frac{101}{8}\right)x^2 + o\left(x^3\right) = 0,\quad \left(\frac{51}{2}z_{22}'(0) - \frac{357}{20}\right)x^2 + o\left(x^3\right) = 0.$$

Звідси знаходимо, що $z_{21}'(0) = \frac{101}{204}$, $z_{22}'(0) = \frac{7}{10}$. Отже,

$$z_{21} = \frac{101}{204}x + o(x),\quad z_{22} = \frac{7}{10}x + o(x).$$

Маємо результати третьої ітерації

$$y_1 = 2 + \frac{6x}{1 - \frac{\frac{17}{12}x}{1 + \frac{101}{204}x}} = \frac{303x^2 + 424x + 204}{-94x + 102}, \quad y_2 = -1 + \frac{-5x}{1 - \frac{\frac{17}{10}x}{1 + \frac{7}{10}x}} = \frac{7x^2 + 8x + 2}{2x - 2}.$$

Як можна безпосередньо переконатися, отримані в результаті ітерацій вирази є наближеннями Паде шуканих функцій. У результаті першої ітерації отримано наближення типу [1,0] для першої ітерації, типу [1,1] для другої та типу [2,1] для третьої.

Приклад 2. Як другий приклад розглянемо наближене розв'язання задачі Коші для рівняння Бесселя нульового порядку

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$$

з початковими умовами $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$, розв'язком якої є функція Бесселя $J_0(x)$. Задане рівняння запишемо у вигляді системи диференціальних рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} y' - z = 0, \\ x^2 z' + xz + x^2 y = 0 \end{cases} \tag{14}$$

з умовами $y(0) = 1,\ z(0) = 0$.

Для зручності, щоб не перевантажувати приклад індексами, будемо дещо інакше позначати функції, ніж це описано в теоретичній частині статті. Розклад лівих частин рівнянь системи (14) в ряд Маклорена має вигляд

$$\left(y'(0) - z(0)\right) + \left(y''(0) - z'(0)\right)x + o(x), \tag{15}$$

$$\left(z(0)\right)x + \left(2z'(0) + y(0)\right)x^2 + \left(\frac{3}{2}z''(0) + y'(0)\right)x^3 + o\left(x^3\right). \tag{16}$$

З рівності $y'(0) - z(0) = 0$ отримуємо, що

$$y'(0) = 0. \tag{17}$$

Оскільки перша дужка в (16) дорівнює нулю, то зробимо так, щоб вираз (16) не містив і другого доданку. З умови

$$2z'(0) + y(0) = 0$$

знаходимо, що

$$z'(0) = -\frac{1}{2}. \tag{18}$$

Для наступної ітерації нам потрібно знайти перші ненульові доданки розвинень функцій $y(x)$ та $z(x)$ в ряди. Для цього прирівняємо до нуля і другу дужку в (15). Отримаємо, що $y''(0) = z'(0) = -\frac{1}{2}$. Отже, робимо висновок, що $y(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + o\left(x^2\right)$, $z(x) = -\frac{1}{2}x + o(x)$.

У результаті першої ітерації отримуємо наближення

$$y(x) = 1 - \frac{x^2}{4}, \quad z(x) = -\frac{1}{2}x,$$

а для наступної ітерації маємо представлення

$$y(x)=1-\frac{\frac{x^2}{4}}{1+y_1(x)},\quad z(x)=\frac{-\frac{1}{2}x}{1+z_1(x)},\tag{19}$$

у якому нові шукані функції задовольняють нульовим початковим умовам

$$y(0)=z(0)=0.\tag{20}$$

Підставимо (19) в (14) та для зручності помножимо перше рівняння на $(1+y_1)^2(1+z_1)$, а друге – на $(1+y_1)(1+z_1)^2$. Ліві частини отриманих рівнянь

$$\frac{x}{4}\left(xy_1'(1+z_1)+2y_1^2+2y_1-2y_1z_1-2z_1\right)=0,$$

$$\frac{x^2}{4}\left(2xz_1'(1+y_1)+4z_1+4y_1z_1+4z_1^2+4z_1^2y_1-2x^2z_1-x^2z_1^2-x^2\right)=0\tag{21}$$

розкладемо в ряди Маклорена. Маємо відповідні представлення (з урахуванням однорідних початкових умов):

$$\left(\frac{3}{4}y_1'(0)-\frac{1}{2}z_1'(0)\right)^2x^2+\left(2y_1''(0)+2y_1'^2(0)-y_1'(0)z_1'(0)-z_1''(0)\right)\frac{x^3}{4}+o\left(x^4\right),$$

$$\frac{3}{2}z_1'(0)x^3+\left(z_1'^2(0)+z_1''(0)+\frac{3}{2}y_1'(0)z_1'(0)-\frac{1}{4}\right)x^4+o\left(x^4\right).$$

Усі виписані члени рядів будуть дорівнювати нулю, якщо $y_1'(0)=z_1'(0)=0$, $y_1''(0)=\frac{1}{8}$, $z_1''(0)=\frac{1}{4}$. Отже,

$$y_1=\frac{x^2}{16}+o\left(x^2\right),\ z_1=\frac{x^2}{8}+o\left(x^2\right).$$

У результаті другої ітерації отримуємо наближення

$$y(x)=1-\frac{\frac{x^2}{4}}{1+\frac{x^2}{16}}=\frac{16-3x^2}{x^2+16},\quad z(x)=\frac{-\frac{1}{2}x}{1+\frac{x^2}{8}}=-\frac{4x}{x^2+8},\tag{22}$$

а для наступної ітерації маємо представлення

$$y(x)=1-\frac{\frac{x^2}{4}}{1+\frac{\frac{x^2}{16}}{1+y_2}},\quad z(x)=\frac{-\frac{1}{2}x}{1+\frac{\frac{x^2}{8}}{1+z_2}},\tag{23}$$

у якому нові шукані функції задовольняють нульовим початковим умовам

$$y_2(0)=z_2(0)=0.\tag{24}$$

Підставимо (24) в (21) та, для зручності, помножимо перше рівняння на $\left(1+y_2\right)^2\left(1+z_2\right)x^4$, а друге – на $\left(1+y_2\right)\left(1+z_2\right)^2x^5$. Ліві частини отриманих рівнянь розкладемо в ряди Маклорена. Маємо такі представлення (з урахуванням однорідних початкових умов):

$$\left(\frac{1}{16}z_2'(0)-\frac{5}{64}y_2'(0)\right)+\left(1+24y_2'(0)z_2'(0)-24y_2''(0)+16z_1''(0)-32y_1'^2(0)\right)\frac{x}{512}+o(x),$$

$$\frac{-5}{16}z_2'(0)-\left(8z_2'^2(0)+6z_2''(0)+10y_2'(0)z_2'(0)+1\right)\frac{x}{32}+o(x).$$

Усі виписані члени рядів дорівнюватимуть нулю, якщо $y_2'(0)=z_2'(0)=0$, $y_2''(0)=-\frac{5}{72}$, $z_2''(0)=-\frac{1}{6}$. Отже,

$$y_2=-\frac{5x^2}{144}+o\left(x^2\right),\ z_2=-\frac{x^2}{12}+o\left(x^2\right).$$

У результаті третьої ітерації отримуємо наближення

$$y(x)=1-\cfrac{\frac{x^2}{4}}{1+\cfrac{\frac{x^2}{16}}{1-\frac{5x^2}{144}}}=\frac{5x^4-128x^2+576}{16\left(x^2+36\right)},\quad z(x)=\cfrac{-\frac{1}{2}x}{1+\cfrac{\frac{x^2}{8}}{1-\frac{x^2}{12}}}=\frac{x^3-12x}{x^2+24}. \tag{25}$$

Зауважимо, що в результаті ітерацій для функції $y(x)$ ми отримали вирази, які співпадають з наближеннями Паде порядків (2,0), (2,2), (4,2) до її точного виразу $J_0(x)$. Аналогічно для функції $z(x)=y'(x)$ ми отримали вирази, які співпадають з наближеннями Паде порядків (1,0), (1,2), (3,2) до її точного виразу $J_0'(x)=-J_1(x)$.

ВИСНОВКИ

Запропоновано спосіб розв’язання задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь, який ґрунтується на методі ланцюгових дробів. У математичній літературі зустрічається описання застосування цього методу лише для знаходження наближеного розв’язку звичайних диференціальних рівнянь, запропонований Ж.Л. Лагранжем. У статті описано алгоритм пошуку наближень та на прикладах показано, що в результаті кожного з наближень отримуються апроксимації Паде шуканих функції. Без обмеження загальності розв’язок шукається в околі початку координат. Для пошуку нескінченно малих степеневих функції, еквівалентних до шуканих функцій, пропонується апарат рядів Маклорена. У другому прикладі будуються апроксимації Паде для функцій Бесселя першого роду першого та другого порядків.

ЛІТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Цепные дроби / В. И. Арнольд. – М. : МЦНМО, 2001. – 40 с.
2. Вишневский В. Э. Аппроксимация Паде решения задачи Коши / В. Э. Вишневский, А. В. Зубов, О. А. Иванова // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. – 2012. – № 4. – С. 3-17.
3. Джоунс У. Непрерывные дроби: аналитическая теория и приложения / У. Джоунс, В. Трон [Перев. с англ. под ред. И. Д. Софронова]. – М. : Мир, 1985. – 410 с.

4. Лабыч Ю. А. Приближение непрерывных функций рациональными дробями Паде-Чебышева / Ю. А. Лабыч, А. П. Старовойтов // ПФМТ. – 2011. – № 1. – С. 69-78.
5. Макаров Ю. Н. Паде-приближения решений дифференциальных уравнений / Ю. Н. Макаров // Фундамент. и прикл. матем. – 1999. – Т. 5, вып. 2. – С. 527-537.
6. Маурер Г. В. Решение одного дифференциального уравнения Риккати с помощью цепных дробей / Г. В. Маурер // В сб. : Цепные дроби и их применения. – К. : Ин-т математики АН УССР, 1976. – С. 76-77.
7. Самойленко А. М. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, Н. А. Перестюк. – М. : Высш. шк., 1989. – 383 с.
8. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – 176 с.
9. Хинчин А. Я. Цепные дроби / А. Я. Хинчин. – М. : Наука, 1978. – 112 с.
10. Хлопонин С. С. Решение одного дифференциального уравнения Риккати с помощью цепной дроби Стилтьеса / С. С. Хлопонин // Изв. ВУЗов. Математика. – 1969. – № 3. – С. 78-85.
11. Хованский А. Н. Приложение цепных дробей и их обобщение к вопросам приближенного анализа / А. Н. Хованский. – М. : ГИИТЛ, 1956. – 204 с.
12. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. – М. : Эдиториал УРСС, 2002. – 320 с.

REFERENCES

1. Arnol’d, V.I. (2003), *Cepnye drobi* [Continued fraction], MCNMO, Moskow, Russia.
2. Vishnevskij, V.Je., Zubov, A.V. and Ivanova, O.A. (2012), “Pade approximation of the Cauchy problem”, *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta*, no. 4, pp. 3-17.
3. Dzhouns, U. and Tron, V. (1985), *Nepreryvnye drobi: analiticheskaja teorija i prilozhenija* [Continued fractions: analytical theory and applications], Translated by Sofronov I.D., Moskow, Russia.
4. Labych, Ju.A. and Starovojtov, A.P. (2011), «Approximation of continuous functions by rational fractions Pade-Chebyshev», *Problemy fiziki, matematiki i tehniki*, no. 1, pp. 69-78.
5. Makarov, Ju.N. (1999), “Pade-approximations to solutions of differential equations”, *Fundamental’naja i prikladnaja matematika*, vol. 5, issue 2, pp. 527-537.
6. Maurer, G.V. (1976), *Reshenie odnogo differencial’nogo uravnenija Rikkati s pomoshh’ju cepnyh drobej*, [Solution of Riccati differential equation by means of continued fractions], Institut matematiki AN USSR, Kyiv, Ukraine.
7. Samojlenko, A.M., Krivosheja, S.A. and Perestjuk, N.A. (1989), *Differencial’nye uravnenija: primery i zadachi*, [Differential equations: examples and problems], Visshaja shkola, Moskow, Russia.
8. Filippov, A.F. (2000), *Sbornik zadach po differencial’nym uravnenijam* [Problems in Differential Equations], NIC “Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika”, Izhevsk, Russia.
9. Hinchin, A.Ja. (1978), *Cepnye drobi* [Continued fraction], Nauka, Moskow, Russia.
10. Hloponin, S.S. (1969), «Solution of Riccati differential equation by means of a Stieltjes continued fraction», *Izvestie VUZov. Matematika*, no. 3, pp. 78-85.
11. Hovanskij, A.N. (1956), *Prilozhenie cepnyh drobej i ih obobshhenie k voprosam priblizhennogo analiza*, [The application of continued fractions and their generalization to the issues of the approximate analysis], GIITL, Moskow, Russia.
12. Jel’sgol’c, L.Je. (2002), *Differencial’nye uravnenija i variacionnoe ischislenie* [Differential equations and calculus of variations], Jeditorial URSS, Moskow, Russia.