

9. Hodes A. Yu., Loboda V. V. Stress-strain state of an elastic plane with an arc crack between circular inclusion and matrix. *Bulletin of Dniepropetrovsk University: Mechanics*. 2013. Iss. 17, Vol. 1. P. 3–10 (in Russian).
10. Hodes A. Yu. An arc interfacial crack with loaded sides. *Bulletin of Dniepropetrovsk University: Mechanics*. 2014. Iss. 18, Vol. 1. P. 33–43 (in Russian).
11. Brighenti R., Carpinteri A., Scorza D. Fracture mechanics approach for a partially debonded cylindrical fibre. *Composites: Part B*. 2013. Vol. 53. P. 169–178.
12. Li Y.-D., Zhang N., Lee K. Y. Fracture analysis on the arc-shaped interfacial crack between a homogeneous cylinder and its coating. *Eur. J. Mech. A/Solids*. 2010. Vol. 29. P. 794–800.
13. Kushch V. I., Shmegeera S. V., Mishnaevsky Jr. L. Elastic interaction of partially debonded circular inclusions. I. Theoretical solution. *Int. J. Solids Struct.* 2010. Vol. 47. P. 1961–1971.
14. Chao R., Laws N. Closure of an arc crack in an isotropic homogeneous material due to uniaxial loading. *Q. J. Mech. Appl. Math.* 1992. Vol. 45. P. 629–640.
15. Chao R., Laws N. The Fiber-Matrix Interface Crack. *J. App. Mech.* 1977. Vol. 64. P. 992–999.
16. Hodes A. Yu., Loboda V. V. A contact problem for an arc interfacial crack. *Bulletin of Dniepropetrovsk University: Mechanics*. 2015. Iss. 19, Vol. 2. P. 3–17 (in Russian).
17. Ritz E., Pollard D. D. Closure of circular arc cracks under general loading: effects on stress intensity factors. *Int. J. Fract.* 2011. Vol. 167. P. 3–14.
18. Paris F., Cano J. C., Varna J. The fiber-matrix interface crack – A numerical analysis using Boundary Elements. *Int. J. Fract.* 1996. Vol. 82. P. 11–29.
19. Varna J., Paris F., Cano J. C. The effect of crack-face contact on fiber/matrix debonding in transverse tensile loading. *Compos. Sci. Technol.* 1997. Vol. 51. P. 523–532.
20. Gakhov F. D. *Boundary Value Problems*. Oxford: Pergamon Press, 1966. 561 p.
21. Jiang Q., Kuang Z.-B. Stress analysis in two dimensional electrostrictive material with an elliptic rigid conductor. *Eur. J. Mech. A/Solids*. 2004. Vol. 23. P. 945–956.
22. Stratton J. A. *Electromagnetic Theory*. New York: McGraw-Hill, 1941. 648 p.
23. Landau L., Lifshitz E. *Electrodynamics of Continuous Media*. Oxford: Pergamon Press, 1960. 417 p.
24. Rice J. R. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks. *J. Appl. Mech.* 1988. Vol. 55. P. 98–103.

УДК 539.3

## ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗРАХУНОК ЧАСТОТ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ НЕКРУГОВОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ЖОРСТКО ЗАКРІПЛЕНИМИ ТОРЦЯМИ

<sup>1</sup>Григоренко О. Я., д. ф.-м. н., професор, <sup>2</sup>Борисенко М. Ю., к. ф.-м. н.,  
<sup>2</sup>Бойчук О. В., к. ф.-м. н., <sup>2</sup>Пригода О. П., аспірант

<sup>1</sup>Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,  
вул. Нестерова, 3, Київ, 03057, Україна

<sup>2</sup>Миколаївський національний університет ім. В. О. Сухомлинського,  
вул. Нікольська, 24, Миколаїв, 54030, Україна

ayagrigorenko@yandex.ru, maxborisenko530@mail.ru

Визначаються частоти та форми вільних коливань тонкої циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу сталі товщини з жорстко закріпленими торцями. Дослідження проводились методом скінченних елементів, який реалізовано на ліцензійному програмному засобі FEMAP з розв'язувачем NX Nastran. Достовірність отриманих результатів забезпечується використанням обґрунтованої математичної моделі, коректністю постановки задачі, розв'язком тестових задач та практичною збіжністю розрахованих частот при застосуванні методу

скінченних елементів. У результаті дослідження розв'язано дві тестові задачі для кругової та не кругової циліндричної оболонки сталої товщини з жорстко закріпленими торцями. Результати тестових задач добре збігаються з результатами, отриманими іншими авторами експериментальним та чисельним методами. Проведено порівняльний аналіз частот і форм вільних коливань розглянутої оболонки з частотами і формами вільних коливань цієї ж оболонки з жорстко закріпленим одним торцем, інший торець вільний.

*Ключові слова: метод скінченних елементів, частоти і форми вільних коливань, кругова оболонка, оболонка еліптичного поперечного перерізу.*

## ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ЧАСТОТ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕКРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЖЕСТКО ЗАКРЕПЛЕННЫМИ ТОРЦАМИ

<sup>1</sup>Григоренко А. Я., д. ф.-м. н., профессор, <sup>2</sup>Борисенко М. Ю., к. ф.-м. н.,  
<sup>2</sup>Бойчук Е. В., к. ф.-м. н., <sup>2</sup>Пригода А. П., аспирант

<sup>1</sup>Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины,  
ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина

<sup>2</sup>Николаевский национальный университет им. В. А. Сухомлинского,  
ул. Никольская, 24, Николаев, 54030, Украина

ayagrigorenko@yandex.ru, maxborisenko530@mail.ru

Определяются частоты и формы свободных колебаний тонкой цилиндрической оболочки эллиптического поперечного сечения постоянной толщины с жестко закрепленными торцами. Исследования проводились методом конечных элементов, который реализован на лицензионной программе FEMAP с решателем NX Nastran. Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием обоснованной математической модели, корректностью постановки задачи, решением тестовых задач и практической сходимостью рассчитанных частот при применении метода конечных элементов. В результате исследования решено две тестовые задачи для круговой и некруговой цилиндрической оболочки постоянной толщины с жестко закрепленными двумя торцами. Результаты тестовых задач хорошо совпадают с результатами, полученными другими авторами экспериментальным и численным методами. Проведен сравнительный анализ частот и форм свободных колебаний рассматриваемой оболочки с частотами и формами свободных колебаний этой же оболочки с жестко закрепленным одним торцом, другой торец свободен.

*Ключевые слова: метод конечных элементов, частоты и формы свободных колебаний, круговая оболочка, оболочка эллиптического поперечного сечения.*

## NUMERICAL CALCULATION OF FREE VIBRATION FREQUENCIES OF A NON-CIRCULAR CYLINDRICAL SHELL WITH FIXED END FACES

<sup>1</sup>Grigorenko A. Ya., D.Sc. in Physics and Maths, Professor,  
<sup>2</sup>Borisenko M. Yu., D.Ph. in Physics and Maths, <sup>2</sup>Boychuk O. V., D.Ph. in Physics and Maths,  
<sup>2</sup>Prigoda A. P., postgraduate

<sup>1</sup>Tymoshenk Institute of Mechanics NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

<sup>2</sup>Sukhomlynsky National University of Mykolaiv, Mykolaiv, Ukraine

ayagrigorenko@yandex.ru, maxborisenko530@mail.ru

In many cases, cylindrical shell constructions have a noncircular cross-sectional contour, variable thickness and different boundary conditions, and other features. In the study of the strength and stability of shell structures possession of information about the distribution of dynamic characteristics, in particular, the distribution of frequencies and forms of free oscillations is needed.

Theoretical research of vibrations associated with considerable difficulties realization of the mathematical model and necessity solving difficult system of differential equations in partial derivatives with variable coefficients. The instability of solutions and the loss of the calculation accuracy required order occur in solving this system. There are some analytical solutions boundary problems describing vibrations noncircular cylindrical shells that can be used only in rare cases.

Numerical methods for theory shell problem solving got wide applications in comparison with analytical methods. Based on the finite element method many modern programs for engineering calculations created. One such program is the solver FEMAP with NX Nastran.

The proposed software tool used in several studies to determine the free vibration frequencies and forms of thin cylindrical shells elliptical cross section constant [1] and variable [2] thickness for different values of eccentricity [3] and different boundary conditions on one end face, the other an end face free [4]. Apart ready software developed by individual authors programs are often used. Thus, in two finite-element implementations thin-walled structures natural oscillations were studied [5].

Finite element method becomes more popular in engineering calculations, but remember that the basic check any calculation results is only physical experiment. One of the most effective methods of investigation vibration is a method holographic interferometry, which allows real-time observe interference patterns which makes it possible real-time observe interference patterns of vibrations shell surfaces, accurately set moment of occurrence of resonance, select the desired mode vibrational excitation, explore the spectrum of free oscillation frequencies and forms with a sufficient degree of reliability. This experimental method used to study the console fixed cylindrical shells with circular cross-section [6] and noncircular cross-section constant [7] and variable thickness. The experimental results are in good agreement with numerical calculations. In [8] on the basis of holographic interferometry circular cylindrical shell with both rigid fixed end faces investigated, the experiment results made it possible to get empirical formula to calculate the free oscillation frequencies.

In this paper estimates of two test problems are given, the results of which showed a good correspondence to the results obtained numerically [5] and experimentally [8] by other authors. The discrepancy between the numerical calculations does not exceed 4%, the difference between the numerical calculation, which is realized in FEMAP, and results obtained experimentally does not exceed 16%, which is acceptable and demonstrates the correctness of the proposed method for solving this class problems.

The new calculation of free oscillation frequencies and forms of cylindrical shells elliptical cross section with rigid fixed both end faces carried, and conducted comparison of obtained the frequencies and frequencies received for the same shell with rigid fixed one end face, the other an end face free.

A result of research we found that the rigid fixing of the second end face makes it possible to increase the first resonant frequency is twice, and the vibration mode does not match the first resonance frequency form of the console fixed shell.

The obtained results make it possible to control the free vibration frequency spectrum of shell structures for its exclusion from the resonant regime by varying the boundary conditions, which is one on the actual problems of the research strength of shell structures.

*Key words: finite element method, free vibration frequencies and modes, circular shell, elliptical cross section shell.*

## ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

У багатьох випадках циліндричні оболонкові конструкції мають некруговий контур поперечного перерізу, змінну товщину, різні граничні умови та інші особливості. При дослідженні міцності та стійкості таких оболонкових конструкцій є необхідним володіти інформацією про розподіл їх динамічних характеристик, зокрема, про розподіл частот та форм вільних коливань.

Теоретичні дослідження коливань пов'язані зі значними труднощами реалізації математичної моделі та необхідністю розв'язування складної системи диференціальних рівнянь у частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, при розв'язуванні якої спостерігається нестійкість розрахунку, втрата необхідного порядку точності обчислень. Відомі аналітичні розв'язки деяких крайових задач, що описують коливання некругових циліндричних оболонок, які можна застосовувати тільки в окремих випадках.

Порівнянно з аналітичними методами широкого практичного застосування набули чисельні методи розв'язування задач динаміки теорії оболонок, а саме метод скінченних елементів (МСЕ). Використовуючи цей чисельний метод побудовано багато сучасних програм для інженерного розрахунку. Однією з таких програм є FEMAP з розв'язувачем NX Nastran. Запропонований програмний засіб використовується в ряді досліджень із визначення частот і форм вільних коливань тонких циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу сталої [1] та змінної [2] товщини при різних значеннях ексцентриситету [3] та різних граничних умовах на одному торці, інший торець вільний [4]. Окрім готових програмних засобів, часто використовуються розроблені власні програми. У [5] в рамках двох скінченно-елементних реалізацій досліджені власні коливання тонкостінних конструкцій. У першій з

них оболонка представлена як сукупність плоских елементів, що знаходяться одночасно під дією мембранних і згинальних сил. Друга заснована на рівняннях теорії пружності. Дискретизація області проводиться за допомогою 8-вузлового скінченного елемента з несумісними формами переміщень. Як приклади розглянуті циліндричні оболонки еліптичного поперечного перерізу. Проаналізовано вплив граничних умов і різних геометричних параметрів на власні частоти коливань. Виявлено переваги і недоліки кожного з підходів.

МСЕ набуває більшої популярності при інженерних розрахунках, проте слід пам'ятати, що основною перевіркою будь-якого з результатів розрахунків залишається тільки фізичний експеримент, чисельний аналіз представляє лише моделювання реальної конструкції і від того, наскільки вдала модель і математичний апарат, який реалізує цю модель, залежить відповідність результатам експериментальної перевірки. Одними з ефективних методів дослідження вібрацій є метод голографічної інтерферометрії, який дає можливість у реальному часі спостерігати інтерференційні картини коливань поверхні оболонок, точно встановлювати момент виникнення резонансу, вибирати необхідний режим віброзбудження, з достатнім ступенем достовірності досліджувати спектр частот і форм вільних коливань. Такий експериментальний метод використовується для дослідження консольно закріплених циліндричних оболонок кругового поперечного перерізу [6], а також некругового поперечного перерізу сталої [7] та змінної товщини. Отримані результати добре узгоджуються з чисельними розрахунками. У [8] на основі методу голографічної інтерферометрії досліджена кругова циліндрична оболонка з жорстко закріпленими торцями, результати експерименту дали можливість отримати емпіричну формулу для розрахунку частот вільних коливань.

Метою цієї роботи є визначення частот та форм вільних коливань пружної ізотропної циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу сталої товщини з жорстко закріпленими торцями на основі методу скінчених елементів.

### ВИХІДНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

Рівняння руху оболонки при відсутності демпфування має вигляд

$$\mathbf{K}\vec{\Phi}_j + \mathbf{M}\ddot{\vec{\Phi}}_j = 0, \quad (1)$$

де  $\mathbf{K}$  та  $\mathbf{M}$  – матриця жорсткості та матриця мас механічної системи відповідно,  $\vec{\Phi}_j$  – вектор переміщень вузлів системи, що відповідає  $j$ -тому ступеню вільності, який відтворює  $j$ -ту форму коливань.

При вільних коливаннях оболонок усі вузлові точки здійснюють гармонічні коливання як функції часу:

$$\vec{\Phi}_j(t) = \vec{\Phi}_j \sin \omega_j t. \quad (2)$$

Після підстановки функцій (2) в рівняння руху оболонки визначення власних частот і форм коливань зводиться до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{K}\vec{\Phi}_j - \omega_j^2 \mathbf{M}\vec{\Phi}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (3)$$

де  $\omega_j$  – пульсація або частота гармонічних коливань.

NX Nastran для визначення частот і форм вільних коливань у випадку, коли дисипація енергії і демпфування не враховується, використовує, як основний, метод Ланцоша (Lanczos) [9].

## ТЕСТОВІ ЗАДАЧІ

Для перевірки достовірності вибраної методики при дослідженні динамічних характеристик циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу сталої товщини з жорстко закріпленими торцями спочатку розв'язувалися дві тестові задачі та виконувалося порівняння результатів з результатами, отриманими іншими авторами.

Як першу тестову задачу за допомогою системи FEMAP побудовано геометрію циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу з великою піввіссю  $a = 0,02 \text{ м}$  і малою піввіссю  $b = 0,01 \text{ м}$ , висотою  $h = 0,2 \text{ м}$ , товщиною  $d = 0,0005 \text{ м}$ . Дослідження проводилось для оболонки з жорстко закріпленими торцями:  $u = v = w = \varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$  (C-C). Як матеріал оболонки задавалась сталь з модулем Юнга  $E = 205 \text{ ГПа}$ , коефіцієнтом Пуассона  $\nu = 0,3$ , густиною  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ . Скінченно-елементна розбивка проводилась двома типами елементів: лінійними чотирикутними plate-елементами розміром сторони  $1 \text{ мм}$ ; лінійними восьмикутними solid-елементами розміром сторони  $1 \text{ мм}$ . Геометрія оболонки, фізико-механічні характеристики та граничні умови вибирались відповідно до оболонки дослідженої методом скінченних елементів у [5].

У результаті розв'язування першої тестової задачі отримано частоти вільних коливань за допомогою plate- та solid-елементів, які представлені в таблиці 1 разом із частотами, отриманими за допомогою 3D shell- і 3D solid-елементів іншим автором [5], а також з наведеною розбіжністю розрахунків у відсотках. Для наочного аналізу результати представлені у вигляді гістограм (рис. 1).

Зазначимо, що автор не класифікує отримані частоти за формами вільних коливань, а просто наводить десять перших отриманих частот, тому самостійно проведемо класифікацію частот без зміни порядку, запропонованого автором, з урахуванням наявності симетричних і несиметричних форм вільних коливань [7]. Введемо позначення:  $m$  – кількість вузлів уздовж твірної і  $n$  – кількість вузлів по колу для симетричних форм,  $\underline{m}$  і  $\underline{n}$  – відповідно для несиметричних форм.

Таблиця 1 – Частоти вільних коливань, отримані при розрахунку першої тестової задачі

$m$	$n$	$f, \text{Гц}$		$\varepsilon, \%$	$f, \text{Гц}$		$\varepsilon, \%$
		3D shell [5]	FEMAP plate		3D solid [5]	FEMAP solid	
1	4	1710,87	1703,51	0,4	1689,60	1720,23	1,8
<u>1</u>	<u>4</u>	1828,37	1816,52	0,6	1806,60	1797,61	0,5
згин		2596,38	2611,12	0,6	2650,20	2605,58	1,7
2	4	3042,21	3038,92	0,1	3070,50	3030,40	1,3
<u>2</u>	<u>4</u>	3360,86	3344,71	0,5	3391,90	3333,08	1,7
<u>1</u>	<u>6</u>	3676,46	3704,84	0,8	3616,80	3727,98	3,1
1	6	3781,88	3786,90	0,1	3694,00	3772,39	2,1
2	6	3969,78	3973,69	0,1	3897,90	3936,60	1,0
<u>2</u>	<u>6</u>	4011,43	4024,21	0,3	3952,20	4044,44	2,3
3	2	4456,36	4469,26	0,3	4493,30	4470,54	0,5

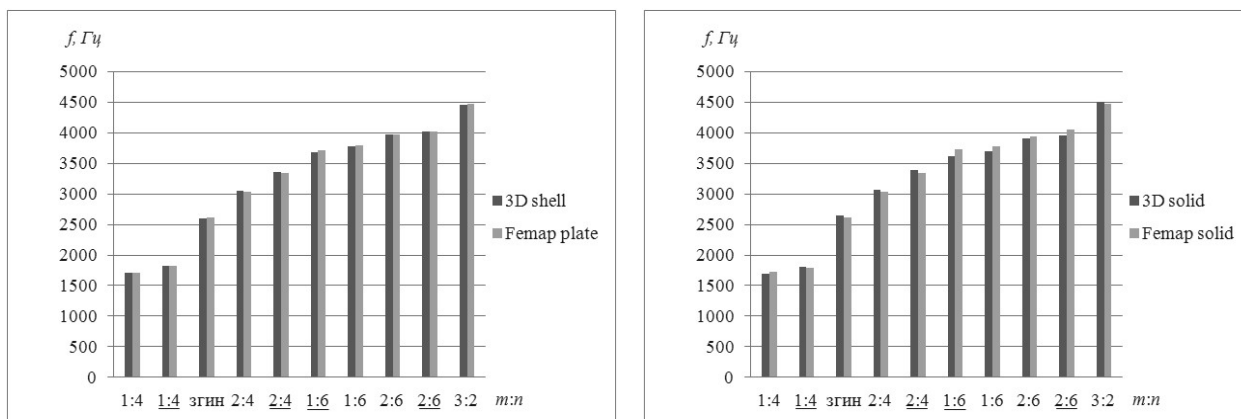


Рис. 1. Порівняльні гістограми частот вільних коливань першої тестової задачі

Як другу тестову задачу за допомогою системи FEMAP побудовано геометрію циліндричної оболонки кругового поперечного перерізу радіусом  $R = 0,04\text{ м}$ , висотою  $h = 0,12\text{ м}$ , сталою товщиною  $d = 0,00024\text{ м}$ . Дослідження проводилось для оболонки з жорстко закріпленими торцями:  $u = v = w = \varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$  (C-C). Як матеріал оболонки задавалась сталь з модулем Юнга  $E = 200\text{ ГПа}$ , коефіцієнтом Пуассона  $\nu = 0,3$ , густиною  $\rho = 7800\text{ кг/м}^3$ . Скінченно-елементна розбивка проводилась лінійними чотирикутними plate-елементами розміром сторони 1 мм. Геометрія оболонки, фізико-механічні характеристики та граничні умови вибирались відповідно до оболонки, дослідженої експериментально методом голографічної інтерферометрії [8].

У результаті розв’язування другої тестової задачі отримано частоти вільних коливань, які представлені в таблиці 2 разом із частотами, отриманими іншим автором [8], а також з наведеною розбіжністю розрахунків у відсотках. Для наочного аналізу результати представлені у вигляді гістограми (рис. 2).

Аналізуючи отримані результати двох тестових задач, можна побачити добру відповідність між частотами вільних коливань, отриманих за допомогою FEMAP та частотами, отриманими іншими авторами, що свідчить про коректність використання всіх розглянутих методик.

Таблиця 2 – Частоти вільних коливань, отримані при розрахунку другої тестової задачі

m	n	f, Гц		ε, %
		Експеримент [8]	FEMAP	
1	8	1880	2303	22,5
1	10	1597	1828	14,5
1	12	1680	1760	4,8
1	14	2064	1999	3,1
2	12	2745	3166	15,3
4	16	5040	5581	10,7
5	20	6112	6594	7,9
5	26	8188	7806	4,7
8	28	11848	11185	5,6

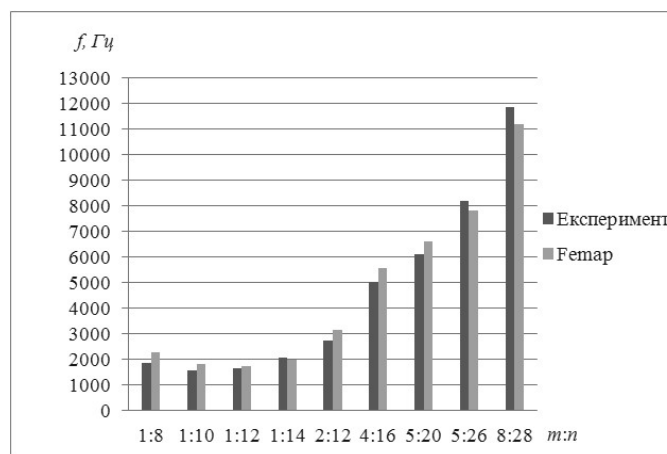


Рис. 2. Порівняльна гістограма частот вільних коливань другої тестової задачі

## РЕЗУЛЬТАТИ

Достовірність отриманих результатів забезпечується використанням обґрунтованої математичної моделі, коректністю постановки задачі, розв'язком тестових задач та практичною збіжністю розрахованих частот при застосуванні методу скінченних елементів.

За допомогою системи FEMAP досліджуються частоти і форми вільних коливань циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу з великою піввіссю  $a = 50,810 \cdot 10^{-3} \text{ м}$  і малою піввіссю  $b = 36,285 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ , висотою  $h = 0,12 \text{ м}$ , товщиною  $d = 0,002 \text{ м}$ . Дослідження проводилось для оболонки з жорстко закріпленими торцями:  $u = v = w = \varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$  (C-C). Як матеріал оболонки задавалась сталь з модулем Юнга  $E = 214 \text{ ГПа}$ , коефіцієнтом Пуассона  $\nu = 0,32$ , густиною  $\rho = 7820 \text{ кг/м}^3$ . Скінченно-елементна розбивка проводилась лінійними восьмикутними solid-елементами розміром сторони  $1 \text{ мм}$ . Геометрія оболонки та фізико-механічні характеристики вибирались відповідно до оболонки, дослідженої методом скінченних елементів та методом стробоголографічної інтерферометрії у випадку жорстко закріпленого одного торця, інший торець вільний (C-F) [4].

У результаті розрахунків отримано частоти вільних коливань, які представлені в таблиці 3 разом із частотами, отриманими в [4], а також з наведеною розбіжністю розрахунків. Для наочного аналізу результати представлені у вигляді гістограми (рис. 3).

Таблиця 3 – Частоти вільних коливань циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу з різними граничними умовами на торцях

m	n	f, Гц		$\frac{f_{C-C}}{f_{C-F}}$
		C-F	C-C	
1	4	1712	5451	3,2
1	6	2154	4026	1,9
1	8	3849	4466	1,2
1	10	6129	6720	1,1
1	12	8963	9428	1,1
2	4	6159	9545	1,5
2	6	4488	7176	1,6
2	8	4895	7001	1,4
2	10	7072	8875	1,3
2	12	9748	11023	1,1

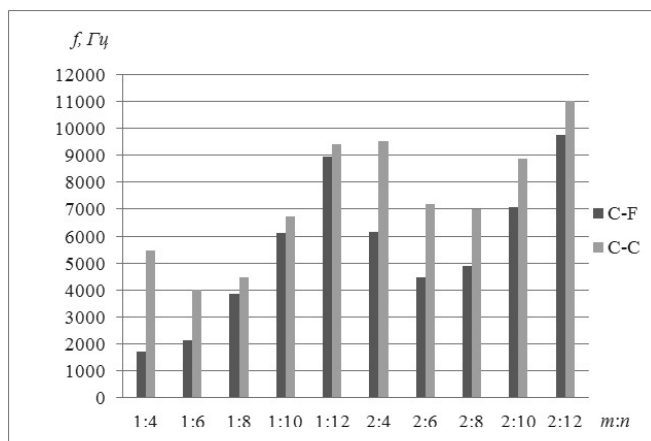
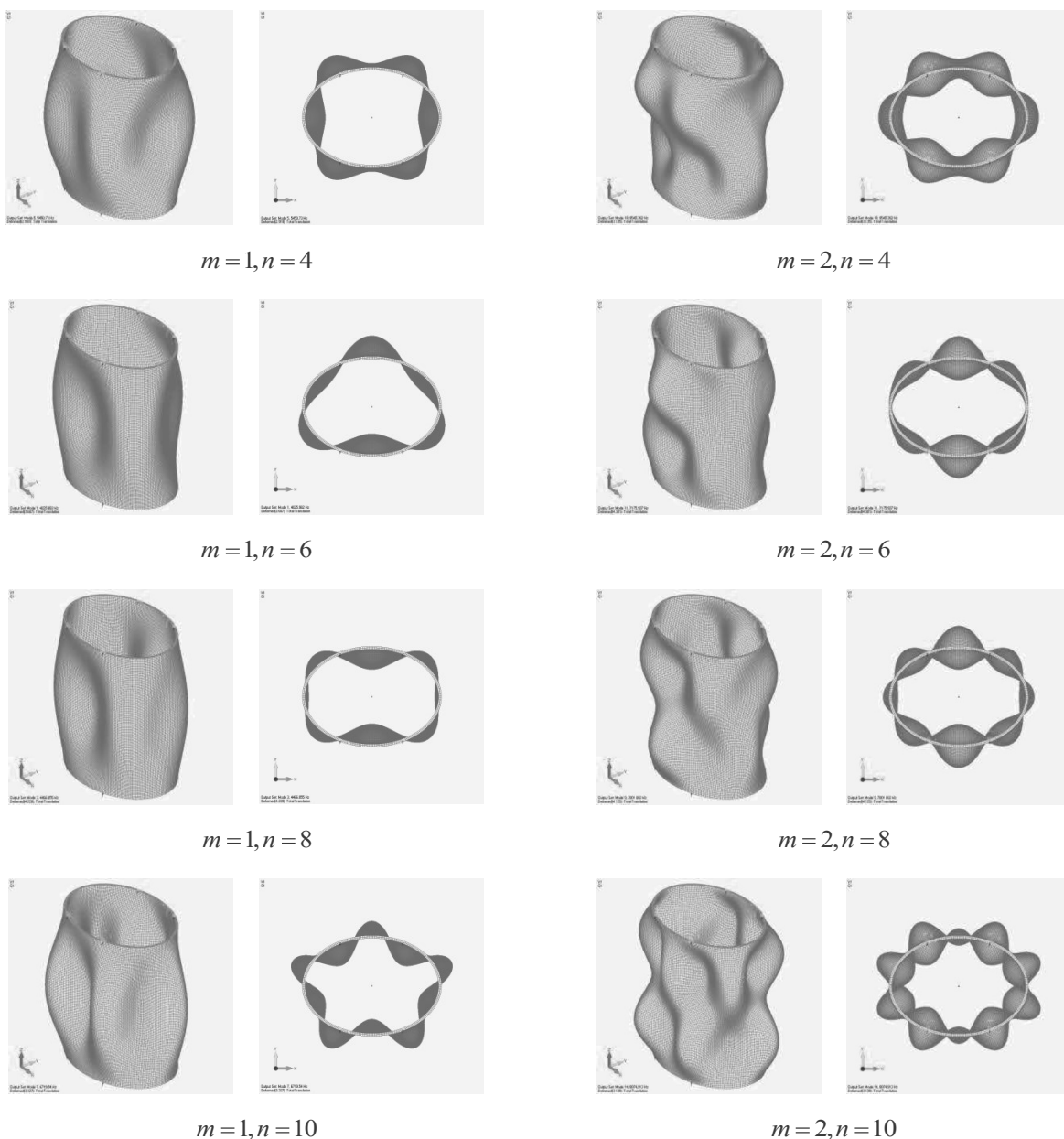


Рис. 3. Порівняльна гістограма частот вільних коливань циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу з різними граничними умовами на торцях

Форми вільних коливань розглянутої оболонки з жорстко закріпленими торцями зображено на рис. 4. Переміщення точок оболонок для візуалізації показані в чотирикратному збільшенні.





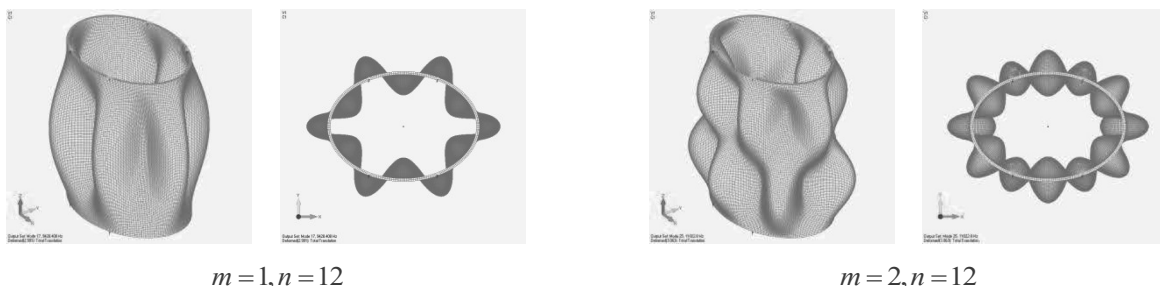


Рис. 4. Форми вільних коливань циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу з жорстко закріпленими торцями

## ВИСНОВКИ

Розраховано дві тестові задачі та проведено порівняння з результатами, отриманими чисельно і експериментально іншими авторами. Розбіжність між чисельними розрахунками не перевищує 4%, розбіжність між чисельним розрахунком, який реалізовано на FEMAP та результатами, отриманими експериментально, не перевищує 23%, що є допустимою і свідчить про коректність використання запропонованого методу до розв'язування задач цього класу.

Проведено новий розрахунок частот і форм вільних коливань циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу з жорстко закріпленими торцями, а також проведено порівняння отриманих частот з частотами, отриманими для такої самої оболонки з жорстко закріпленим одним торцем, інший торець вільний. У результаті дослідження встановлено, що жорстке закріплення другого торця дає можливість підвищити першу резонансну частоту вдвічі, при цьому форма коливань не відповідає формі коливань першої резонансної частоти консольно закріпленої оболонки.

Отримані результати дають можливість керувати спектром частот вільних коливань оболонкових конструкцій для виключення її з резонансного режиму за рахунок варіації граничних умов, що є однією з актуальних проблем дослідження міцності оболонкових конструкцій.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Budak V. D., Grigorenko A. Ya., Borisenko M. Yu., Boychuk E. V. Determination of eigenfrequencies of an elliptic shell with constant thickness by the finite-element method. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016. Vol. 212, № 2. P. 182–192.
2. Будак В. Д., Григоренко А. Я., Борисенко М. Ю., Бойчук Е. В. Вільні коливання еліптичної оболонки змінної товщини. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка*. 2014. 2(32). С. 32–37.
3. Будак В. Д., Григоренко О. Я., Борисенко М. Ю., Бойчук О. В. Вплив ексцентриситету еліптичної оболонки на розподіл її динамічних характеристик. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, серія: «Фізико-математичні науки»*. 2015. № 1. С. 23–28.
4. Будак В. Д., Григоренко О. Я., Борисенко М. Ю., Бойчук О. В. Про вільні коливання циліндричних оболонок кругового та некругового поперечного перерізу при різних граничних умовах. *Вісник Запорізького національного університету, серія фізико-математичні науки*. 2015. № 2. С. 20–28.
5. Лекомцев С. В. Конечно-элементные алгоритмы расчёта собственных колебаний трёхмерных оболочек. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2012. 5, № 2. С. 233–243.
6. Budak V. D., Grigorenko A. Ya., Khorishko V. V., Borisenko M. Yu. Holographic Interferometry Study of the Free Vibrations of Cylindrical Shells of Constant and Variable Thickness. *International applied mechanics*. 2014. Vol. 50, № 1. P. 68–74.
7. Будак В. Д., Григоренко О. Я., Борисенко М. Ю., Пригода О. П., Бойчук О. В. Визначення власних частот тонкостінної оболонки некругового поперечного перерізу методом стробоголографічної інтерферометрії. *Проблеми вычислительной механики и прочности конструкций*. 2015. № 24. С. 18–25.

8. Шалабанов А. К. Исследование высокочастотных колебаний цилиндрических оболочек на основе двух методов голографической интерферометрии. *Исслед. по теор. пластин и оболочек*. 1979. № 14. С. 184–190.
9. Рудаков К. Н. FEMAP 10.2.0. Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций. Київ: НТУУ «КПИ», 2011. 317 с.

### REFERENCES

1. Budak, V. D., Grigorenko, A. Ya., Borisenko, M. Yu. & Boychuk, E. V. (2016). Determination of eigenfrequencies of an elliptic shell with constant thickness by the finite-element method. *Journal of Mathematical Science*, Vol. (212), No. 2, pp. 182-192.
2. Budak, V. D., Grigorenko, O. Ya., Borisenko, M. Yu. & Boychuk, O. V. (2014). Vilni kolyvannia eliptychnoi obolonky zminnoi tovshchyny, *Visnyk Kyivskogo natsionalnogo universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Matematika. Mekhanika*, 2(32), pp. 32-37.
3. Budak, V. D., Grigorenko, O. Ya., Borisenko, M. Yu. & Boychuk, O. V. (2015). Vplyv ekscentrycity eliptychnoi obolonky na rozpodil yii dynamichnykh kharakterystyk, *Visnyk Kyivskogo natsionalnogo universytetu imeni Tarasa Shevchenka, seriia Fizyko-matematychni nauky*, No. 1, pp. 23-28.
4. Budak, V. D., Grigorenko, O. Ya., Borisenko, M. Yu. & Boychuk, O. V. (2015). Pro vilni kolyvannia tsylindrychnykh obolonok kruhovooho ta nekruhovooho poperechnoho pererizu pry riznykh hranychnykh umovakh. *Visnyk Zaporizhskogo natsionalnogo universytetu, seriia Fizyko-matematychni nauky*, No. 2, pp. 20-28.
5. Lekomtsev, S. V. (2012). Konechno-elementnyie algoritmy rascheta sobstvennykh kolebaniy trekhmernykh obolochek, *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred*, 5, No. 2, pp. 233-243.
6. Budak, V. D., Grigorenko, A. Ya., Khorishko V. V. & Borisenko, M. Yu. (2014). Holographic Interferometry Study of the Free Vibrations of Cylindrical Shells of Constant and Variable Thickness, *International applied mechanics*, Vol. 50, No. 1, pp. 68-74.
7. Budak, V. D., Grigorenko, O. Ya., Borisenko, M. Yu., Prygoda, O. P. & Boychuk, O. V. (2015). Vyznachennia vlasnykh chastot tonkostinnoi obolonky nekruhovooho poperechnoho pererizu metodom stroboholohrafichnoi interferometrii. *Problemy vychislitel'noi mekhaniki i prochnosti konstruksii*, No. 24, pp. 18-25.
8. Shalabanov, A. K. (1979). Issledovanie vysokochastotnykh kolebaniy tsilindricheskiy obolochek na osnove dvukh metodov golograficheskoy interferometrii, *Issled. po teor. plastin i obolochek*, No. 14, pp. 184-190.
9. Rudakov, K. N. (2011). FEMAP 10.2.0. Geometricheskoe i konechno-elementnoe modelirovanie konstruksii. Kiev: NTUU «KPI».

УДК 539.3

## НЕСТАЦІОНАРНІ КОЛИВАННЯ ПЛОСКОГО БАГАТОШАРОВОГО П'ЄЗОЕЛЕМЕНТА З УРАХУВАННЯМ ПРУЖНОГО ПІДКРІПЛЮЮЧОГО ШАРУ Й АКУСТИЧНОГО СЕРЕДОВИЩА

Григор'єва Л. О.

*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,  
вул. П. Нестерова, 3, Київ, 03057, Україна*

[l\\_grigoryeva@ukr.net](mailto:l_grigoryeva@ukr.net)

Розвинуто чисельний спосіб дослідження нестационарного напружено-деформівного стану плоских багатошарових електромеханічних перетворювачів з електродованими поверхнями спряження при електричних збуреннях. Проводиться дослідження параметрів електромеханічного стану перетворювача в динаміці в залежності від кількості електродованих шарів та оцінка впливу пружного шару та акустичного середовища.

*Ключові слова: п'єзокерамічний перетворювач, нестационарні коливання, електричне збурення, багатошаровий п'єзоелемент.*