УДК 534:539.3

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ АЕРОКОСМІЧНИХ СИСТЕМ НА БАЗІ ГІБРИДНИХ АСИМПТОТИЧНИХ МЕТОДІВ

Грищак Д. Д.

Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна

grk@znu.edu.ua

У статті запропоновано гібридний аналітико-чисельний метод дослідження нелінійної динаміки моделей аерокосмічних систем з параметрами, залежними від часу, при заданому характері зовнішнього навантаження. Аналізується ефективність запропонованого підходу до розв’зку класу задач динаміки, які зводяться до звичайних і частинними похідними нелінійних сингулярних диференціальних рівнянь та їх систем із змінними коефіцієнтами. Подається порівняння здобутих наближених аналітичних розв’язків із прямим чисельним інтегруванням основних рівнянь дослідження.

Ключові слова: математична модель, нелінійна задача, змінні за часом параметри, математичний маятник, коливання супутника, еліптична орбіта, літальний апарат, демпфування, збурена поверхня, концентрована рухома маса, гібридний асимптотичний підхід, візуалізація динамічного процесу.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ АЭРОКОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА БАЗЕ ГИБРИДНЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Грищак Д. Д.

Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина

grk@znu.edu.ua

В работе предложен гибридный аналитико-численный метод исследования нелинейной динамики моделей аэрокосмических систем з параметрами, зависящими от времени, при заданном характере внешнего нагружения. Анализируется эффективность предложенного подхода к решению класса задач динамики, который сводится к обыкновенным и в частных производных нелинейных сингулярных дифференциальных уравнений и их систем с переменными коэффициентами. Дается сравнение полученных приближенных аналитических решений с прямым численным интегрированием основных уравнений исследования.

Ключевые слова: математическая модель, нелинейная задача, переменные во времени параметры, математический маятник, колебания спутника, эллиптическая орбита, летательный аппарат, демпфирование, возмущенная поверхность, асимптотических подход, визуализация динамического процесса.

MATHEMATICAL MODELS FOR NONLINEAR DYNAMICS OF AIRSPACE SYSTEMS ON BASIS OF HYBRID ASYMPTOTIC METHODS

Gristchak D. D.

Zaporizhzhye National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhye, 69600, Ukraine

grk@znu.edu.ua

This paper deals with the proposed hybrid analytical-numerical method for nonlinear dynamics problem of airspace systems with time depending parameters ubder the external loading. Effectiveness of proposed approach for some class of dynamic problems which are described by ordinary and particular derivatives nonlinear singular differential equations with variable coefficients and systems of equations is analyzed. Proposed method is applied for investigation of control problem for forced vibrations of rotating mathematical pendulum with dependent from time length and mass as a mathematical model of dynamical systems with variable in time parameters. Basic differential equations of such problems are nonlinear with variable coefficients that in the general case can not be integrated analytically exactly. There are popular direct numerical methods of integration this type of equations or approximate asymptotic approaches. For the asymptotic solution of nonlinear problem on the first step of hybrid

approach the solution is presented by perturbation method on parameter of nonlinearity. Introducing it into initial equation and acquainting the coefficients at equal order of parameter nonlinearity, the system of singular linear equations with variable coefficients is obtained. On the second step the phase integral (or WKB) method is explored. Finally an approximate analytical solution for the problem is formulated. Comparison of obtained analytical solution with direct numerical integration of basic equations is given.
A two-step hybrid perturbation – WKB (or phase-integral) method is presented for the solution of a satellite nonlinear vibration problem in the plane of elliptic orbit. The resulting (an approximate) analytical solutions has a form of a sum where each term consists of the product of two functions according to perturbation (on parameter at nonlinear term) and WKB (on singular parameter) methods. Visualization of nonlinear satellite vibration in the plane of circular and elliptical orbits is given.
Proposed approach has been applied for the investigation of flying apparatus nonlinear vibration near the regular-perturbated surface. The problem leads to singular nonlinear equation with variable in time coefficients at given initial conditions. Obtained solution of the problem isn't limited by the value of non dimensional amplitude of perturbed surface and nonlinearity order of evocative forces.
Nonlinear dynamic problem for the airspace structure on the basis of flexible beam with moving concentrated mass which is a function from time and special algorithm of dynamical process visualization are analyzed.

Key words: mathematical model, nonlinear problem, variable in time parameters, mathematical pendulum, satellite vibration, elliptical orbit, flying apparatus, damping, perturbed surface, asymptotic approach, visualization dynamic process.

ВСТУП

На стадії проектування конструкцій нової техніки, зокрема аерокосмічних систем, важливим елементом є наявність математичних моделей, які дозволяють одержати аналітичні залежності для надання надійних оцінок і рекомендацій щодо вибору раціональних параметрів та виявити функціональну залежність динамічних властивостей від характеру зміни їх за часом з урахуванням реальних схем зовнішнього навантаження та оцінити, у ряді випадків, результати прямого чисельного розрахунку. Необхідно зауважити, що точні аналітичні розв'язки вказаних проблем, які зводяться до нелінійних диференціальних рівнянь сингулярного типу зі змінними коефіцієнтами та їх систем, можуть бути здобуті лише у виняткових випадках. Для аналізу конструкцій зі змінними за часом і координатами параметрами, зазвичай, застосовуються чисельні методи. Однак, прямі чисельні підходи до аналізу нелінійних проблем динаміки систем зі змінними параметрами не дозволяють у повному обсязі провести якісний аналіз впливу характеру зміни параметрів досліджуваної конструкції, зокрема за часом, на її динамічну поведінку на етапі проектування нової системи. Як свідчить досвід застосування аналітичних і чисельних підходів, з одного боку асимптотичні методи є досить дієвим засобом розв'язку задач у таких напрямах природознавства, як квантова механіка, механіка деформівного твердого тіла, гідроаеромеханіка, прикладна газодинаміка, тепло-масоперенос та інші, з другого – попередній асимптотичний аналіз досліджуваних процесів (особливо нелінійних) може суттєво підвищити ефективність чисельних алгоритмів аналізу проблем нелінійної динаміки, зокрема конструкцій аерокосмічної техніки.

Не зважаючи на можливість одержання розв'язків проблем нелінійної динаміки на базі моделей із використанням сучасних чисельних методів, одержання надійних алгоритмів розв'язку значної кількості динамічних задач аерокосмічної техніки є проблемою, яка пов'язана зі створенням відповідних математичних моделей із застосуванням сучасних аналітичних, зокрема асимптотичних, методів із застосуванням існуючих програмних комплексів.

Що стосується літальних апаратів, то дослідження особливостей динамічних процесів у конструкціях зі змінними параметрами за координатами та часом є досить актуальною проблемою не тільки для інженерів-механіків, які займаються проектуванням сучасних аерокосмічних систем, аналізуючи міцність, статичну і динамічну несучу здатність в екстремальних умовах зовнішнього навантаження, але і для конструкторів, які на базі цих характеристик проектують системи управління і стабілізації літального апарату як об'єкта регулювання. Знання можливих змін динамічних характеристик літального апарату в часі дозволяє спростити вимоги до автомату стабілізації і покращити стійкість руху літального апарату загалом.

Не зважаючи на існування досить потужних чисельних програмних комплексів, для якісного аналізу нелінійних систем зі змінними параметрами необхідні удосконалені математичні моделі на базі ефективних аналітичних, у тому числі наближених, розв'язків, які із застосуванням чисельних методів дають змогу надати достовірний аналіз досліджуваних конструкцій на етапі проектування.

При цьому, математичні моделі динамічних процесів в аерокосмічних системах повинні враховувати специфіку, зумовлену наявністю змінності геометричних та жорсткісних характеристик і маси за координатами і часом, а також ефекти, пов'язані з геометричною нелінійністю та можливістю демпфуванням досліджуваних процесів.

Основна увага в статті приділена аналізу на базі існуючих публікацій, пов'язаних із математичним моделюванням нелінійних динамічних процесів в аерокосмічних системах на базі моделі математичного маятника зі змінними в часі параметрами і пружного стрижня із концентрованою масою, залежною від часу, з розширенням області застосування гібридних асимптотичних методів.

ДИНАМІКА ОБЕРТОВОГО МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА ЗІ ЗМІННИМИ В ЧАСІ ПАРАМЕТРАМИ

Проблема управління математичним маятником зі змінними за часом параметрами привертає останнім часом увагу дослідників у зв'язку з тим, що модель маятника може суттєво відображати основні динамічні ефекти в реальних системах. Необхідно зазначити, що існуючі розв'язки, зазвичай, зводяться до вирішення рівняння Мат'є за умови наявності кубічної складової нелінійного рівняння динаміки системи зі сталими параметрами [1-7]. Базове рівняння нелінійних коливань обертового маятника зі змінними параметрами має вигляд [8]:

$$\frac{d^2\upsilon}{dt^2}+D'(t)\frac{d\upsilon}{dt}=\mu\left[\beta_0^2\varphi(t)\,Sin2\upsilon-\frac{Sin\upsilon}{1+\psi(t)}\right]+\tilde{F}(t), \tag{1}$$

де $\mu=\dfrac{g}{L_0}=\omega_0^2$ – параметр власної частоти коливань лінеаризованої системи із незалежними від часу параметрами, $\phi(t)=[1+\eta(t)]$ – функція зміни швидкості обертання маятника від часу; $\beta_0^2=\dfrac{\Omega_0^2}{2\omega_0^2}$ – відносний параметр частот коливань; $D'(t)=\dfrac{\varphi'(t)}{[1+\varphi(t)]}+\dfrac{\psi'(t)}{[1+\psi(t)]}$ – функція зміни маси та довжини маятника за часом.

Відповідно до праці [5] на першому етапі застосування гібридного асимптотичного методу розв'язок рівняння (1) представляємо у вигляді розкладу за методом збурення по параметру μ:

$$\upsilon(t)=\upsilon_0(t)+\mu\upsilon_1(t)+\ldots=\sum_{i=0}^{N}\upsilon_i(t)\,\mu^i\,. \tag{2}$$

Після підстановки (2) у рівняння (1) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях параметру μ, отримаємо зв'язану систему лінійних рівнянь зі змінними коефіцієнтами

$$\mu^1:\quad \frac{d^1\upsilon_0}{dt^2}+D'(t)\frac{d\upsilon_0}{dt}=\tilde{F}(t); \tag{3}$$

$$\mu^2: \quad \frac{d^2\upsilon_1}{dt^2}+D'(t)\frac{d\upsilon_1}{dt}=\beta_0^2\phi(t)Sin2\upsilon-\frac{Sin\upsilon}{1+\psi(t)}, \tag{4}$$

яка розв'язується за допомогою методу фазних інтегралів [4].

Загальний розв'язок набуває форми [6]

$$\upsilon_0(t)=\int\left\{\exp\left[\int -P(t)\,dt\right]\right\}dt\left\{c_1+\int\frac{\tilde{F}(t)}{\exp\left[\int -P(t)\,dt\right]}dt\right\}+ \\ +\left\{c_2-\int\frac{\tilde{F}(t)\int\left\{\exp\left[\int -P(t)\,dt\right]\right\}dt}{\exp\left[\int -P(t)\,dt\right]}dt\right\}. \tag{5}$$

З урахуванням початкових умов

$$\upsilon_0(0)=1, \\ \upsilon_0'(t)=0, \tag{6}$$

залежності розв'язку (5) надані на рис. 1.

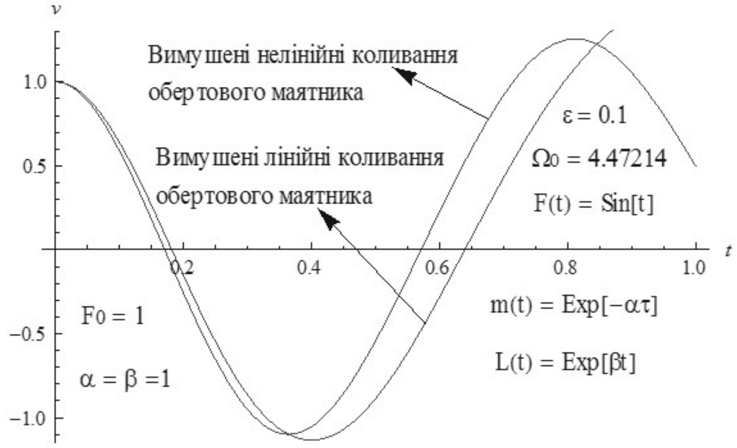

Рис. 1. Порівняння аналітичного та чисельного розв'язків для випадку вимушених коливань обертового маятника із змінними довжиною і масою за експоненціальним законом

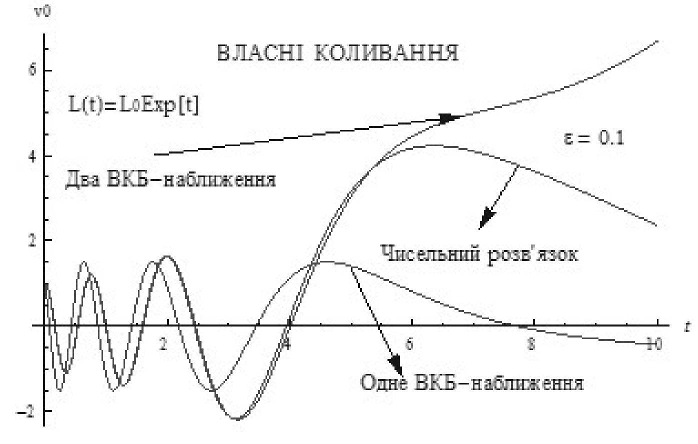

Рис. 2. Порівняння аналітичних та чисельного розв'язків для випадку власних коливань

Результати аналізу можуть бути застосовані для дослідження ефекту спонтанного порушення діаграми біфуркації цієї нелінійної системи, а також для подальшого застосування запропонованого аналітичного підходу для розв'язання математичних моделей нелінійної динаміки.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ СУПУТНИКА В ПЛОЩИНІ ЕЛІПТИЧНОЇ ОРБІТИ

У припущенні, що супутник рухається в центральному гравітаційному полі так, що його центр мас рухається у площині еліптичної орбіти, основне нелінійне диференціальне рівняння проблеми зі змінними коефіцієнтами має вигляд [1]:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2\delta}{d\nu^2} - a(\nu)\frac{d\delta}{d\nu} + b(\nu)\sin\delta = F(\nu), \tag{7}$$

де

$$a(\nu) = \frac{1}{\mu^2}\frac{2e\sin\nu}{1+e\cos\nu}; \quad b(\nu) = \frac{1}{1+e\cos\nu}\cdot\frac{1}{\mu};$$

$$F(\nu) = \frac{1}{\mu^2}\frac{4e}{1+e\cos\nu}\sin\nu; \quad \delta = 2\theta, \quad \mu = \frac{A-C}{B}, \tag{8}$$

$\varepsilon^2 = \dfrac{1}{\mu^2}$ – параметр при старшій похідній.

При цьому параметри системи змінюються в інтервалах

$$-3 \le \mu \le 3; \quad 0 \le e \le 1. \tag{9}$$

У випадку, коли нелінійна функція не розкладається в ряд, розв’язок отримується у двох ВКБ-наближеннях у формі:

$$\delta(\nu) = \left[\frac{E(\nu)}{Q_2(\nu)^{0.25}}\right]\left\{\sin I_2(\nu)\left[s_1 + \int\frac{F(\nu)y_{22}(\nu)}{A_2^2(\nu)I_2'(\nu)}d\nu + \lambda\int\frac{\overline{b}(\nu)\sin[\delta_0]y_{22}(\nu)}{A_2^2 I_2'(\nu)}d\nu\right] - \right.$$

$$\left.\cos I_2(\nu)\left[s_1 + \int\frac{F(\nu)y_{12}(\nu)}{A_2^2(\nu)I_2'(\nu)}d\nu + \lambda\int\frac{\overline{b}(\nu)\sin[\delta_0]y_{12}(\nu)}{A_2^2 I_2'(\nu)}d\nu\right]\right\}, \tag{10}$$

де $A_2(\nu) = \dfrac{E(\nu)}{Q_2(\nu)^{0.25}}$, $y_{12}(\nu) = \dfrac{E(\nu)}{Q_2(\nu)^{0.25}}\sin[I_2(\nu)]$, $y_{22}(\nu) = \dfrac{E(\nu)}{Q_2(\nu)^{0.25}}\cos[I_2(\nu)]$,

$$N(\nu) = \tilde{b}(\nu)\sin[\delta_0(\nu)], \quad Q_2(\nu) = \frac{1}{2}\left[a'(\nu) - \frac{a^2(\nu)}{2\varepsilon^2}\right], \quad I_2(\nu) = \int^{\xi}\varepsilon^{-1}Q_2(\nu)^{1/2}\,d\xi. \tag{11}$$

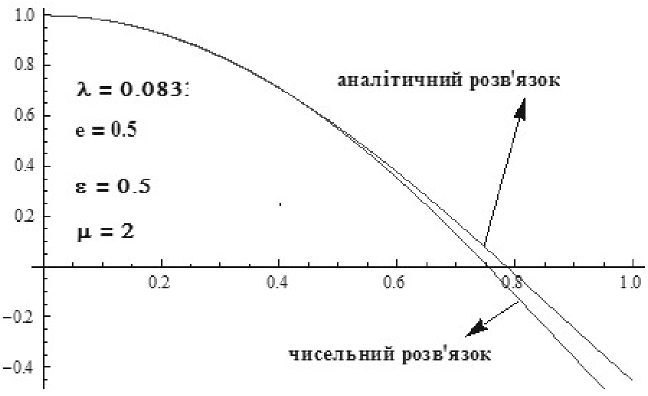

Рис. 3. Співставлення аналітичного та чисельного розв’язків однорідної нелінійної задачі $\delta = \delta(\nu)$

Висновок полягає в можливості застосування запропонованого підходу як на начальній стадії зміни параметру ν, так і для великих його значень.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ І ДЕМПФУВАННЯ АЕРОКОСМІЧНОГО АПАРАТУ ПОБЛИЗУ ЗБУРЕНОЇ ПОВЕРХНІ

Розв'язок математичної моделі на базі запропонованого гібридного підходу не обмежується величиною безрозмірної амплітуди збурень і степенем нелінійності відновлюючих сил. На відміну від [1], де припускається, що нелінійність моменту відновлюючи сил є кубічною функцією, у нащому дослідженні обговорюється нелінійність порядку m, а безрозмірна амплітуда збурень μ може бути не малою величиною, через те, що в цьому випадку можливе погіршення динамічних характеристик літального апарату. В цьому випадку диференціальне рівняння, яке описує бортове качання (ЛА), набуває вигляду

$$I_x\ddot{\gamma}(t)+n\dot{\gamma}(t)+C_{11}\gamma(t)+C_{22}\gamma^m(t)=0, \tag{12}$$

де C_{11}, C_{22} даються виразами з роботи [1]:

$$C_{11}=C_1+C_2; \quad C_{22}=C_1 3l_1^2\Big/\left(7h_1^2\right)+C_2 3l_2^2\Big/\left(7h_2^2\right);$$
$$C_1=2\alpha_1 q l_1^3\Big/\left[5\bar{h}_1^2\left(1+6/\lambda_1^2\right)\right]; \tag{13}$$
$$C_2=2\alpha_2 q l_2^2\Big/\left[5\bar{h}_2^2\left(1+6/\lambda_2^2\right)\right];$$

q – швидкісний напір; l_1, l_2 – половина розмаху крилів; $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$ – відносна відстань крил від екрану; λ_1, λ_2 – відносне подовження; α_1, α_2 – чисельні коефіцієнти; n – сумарний коефіцієнт демпфування.

Якщо покласти

$$h_1=h_2=h^*=h+I_0\cos\omega t \tag{14}$$

з урахуванням періодичних добавок вертикальних коливань (ЛА) у площині тангажа, вводячи безрозмірний час

$$2\tau=\omega t, \tag{15}$$

отримується основне рівняння задачі у формі:

$$\frac{d^2\gamma}{d\tau^2}+\nu\frac{d\gamma}{d\tau}+\left(a-2\mu\cos 2\tau\right)\gamma+\eta\gamma^m=0, \tag{16}$$

де

$$\nu=2n\Big/\left(I_x\omega\right); \quad a=4C_{11}\Big/\left(I_x\omega^2\right); \quad \eta=4C_{22}\Big/\left(I_x\omega^2\right); \quad \mu=aI_0/h=ka. \tag{17}$$

У загальному випадку рівняння (18) може бути представлено у вигляді:

$$\varepsilon^2\gamma''(\tau)+\bar{\nu}\gamma'(\tau)+b(\tau)\gamma(t)+\bar{\eta}\gamma^m(\tau)=0, \tag{18}$$

де $(\ )'=\dfrac{d(\ )}{d\tau}$; $b(\tau)=\dfrac{a}{\mu}-2\cos 2\tau$; $\varepsilon^2=\dfrac{1}{\mu}$; $\bar{\nu}=\dfrac{\nu}{\mu}$; $\bar{\eta}=\dfrac{\eta}{\mu}$; ε і $\bar{\eta}$ – скалярні параметри асимптотичного розвинення відповідно до методів фазних інтегралів та збурення.

Відповідно до запропонованого гібридного асимптотичного підходу [5], отримується розв'язок

$$\gamma(\tau)=E(\tau)\left\{\sin I(\tau)\left[c_1+\bar{c}_1\left(G(\gamma_0)\right)\right]+\cos I(\tau)\left[c_2+\bar{c}_2\left(G(\gamma_0)\right)\right]\right\}, \tag{19}$$

де

$$E(\tau)=\exp\int-\frac{\overline{\nu}}{2}d\tau\,;\quad I(\tau)=\int\varepsilon^{-1}Q(\tau)^{1/2}\,d\tau\,;$$

$$Q(\tau)=\left[-\frac{\overline{\nu}^2}{4}+b(\tau)\right];\quad \overline{c}_1=-\overline{\eta}\int\frac{\cos I(\tau)G(\gamma_0)}{\exp\int-\frac{\overline{\nu}}{2}d\tau\cdot I'(\tau)}\,; \tag{20}$$

$$\overline{c}_2=+\overline{\eta}\int\frac{\sin I(\tau)G(\gamma_0)}{\exp\int-\frac{\overline{\nu}}{2}d\tau\cdot I'(\tau)}\,;\quad G(\gamma_0)=[\gamma_0]^m;\quad \gamma_0=E(\tau)\left[c_1\sin I(\tau)+c_2\cos I(\tau)\right].$$

Характерні залежності наведені на рис. 4.

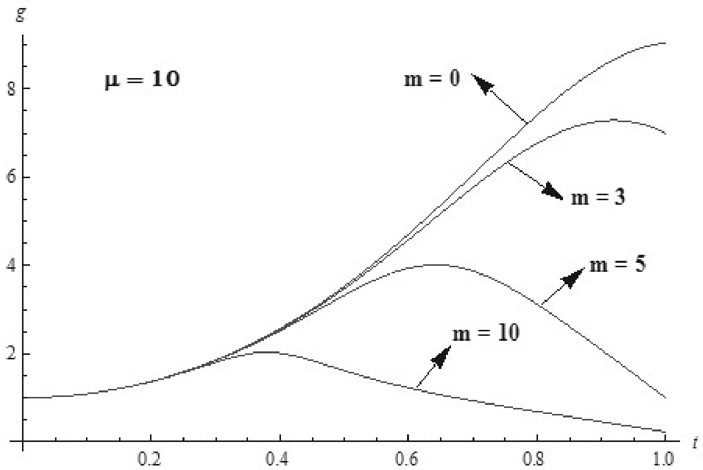

Рис. 4. Порівняння чисельних розв'язків для різного степеня нелінійності

НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ЛІТАЛЬНОГО АПАРАТУ З КОНЦЕНТРОВАНОЮ РУХОМОЮ МАСОЮ, ЗАЛЕЖНОЮ ВІД ЧАСУ

На базі математичної моделі гнучкого пружного стрижня досліджується диференціальне рівняння задач у частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, де нелінійні складові третього та п'ятого порядків відповідають високій амплітуді та розтягуванню серединної лінії стрижня, а права частина початкового рівняння описує ефект, пов'язаний із наявністю концентрованої, залежною від часу, рухомої маси:

$$\begin{aligned}\ddot{q}(\tau)+\omega_0^2(\tau)q(\tau)&=\mu\left[\overline{f}(u,\xi_0)q^3(\tau)+\overline{\gamma}(u,\xi_0)q^5(\tau)\right]+\tilde{Q}_0(\xi)Sin\tilde{\Omega}\tau=\\&=\mu N\left[q(\tau)\right]+Q(\xi,\tau),\end{aligned} \tag{21}$$

де коефіцієнти мають вигляд

$$\omega_0^2(u,\xi_0)=\frac{\left[\pi^4-2u^2a(\tau)\sin^2(\pi\xi_0)\right]\pi^2}{1+2\tilde{a}(\tau)\sin^2(\pi\xi_0)}\,;$$

$$f(\xi_0)=\frac{\beta\pi^4}{4\left[1+2\tilde{a}(\tau)\sin^2(\pi\xi_0)\right]}\,; \tag{22}$$

$$\gamma(\xi_0)=\frac{3\beta\pi^6}{64\left[1+2\tilde{a}(\tau)Sin^2(\pi\xi_0)\right]}\,.$$

Для одержання наближеного аналітичного розв'язку рівняння (22) застосовується гібридний асимптотичний підхід [2, 3], який базується на традиційному методі збурення за параметром нелінійності досліджуваної системи та методі фазних інтегралів за параметром при старшій похідній:

$$q(\tau)=\frac{1}{\left[\overline{\varpi}_{0}^{2}(\tau)\right]^{0.25}}\left\{SinK(\tau)\left[c_1+\frac{1}{\varepsilon}\int\frac{\overline{Q}(\xi,\tau)CosK(\tau)}{\dot{K}(\tau)}+\mu\int\frac{N(q_0,\tau)CosK(\tau)}{\dot{K}(\tau)}d\tau\right]+\right.$$

$$\left.+CosK(\tau)\left[c_2-\frac{1}{\varepsilon}\int\frac{Q(\xi,\tau)SinK(\tau)}{\dot{K}(\tau)}-\mu\int\frac{N(q_0,\tau)SinK(\tau)}{\dot{K}(\tau)}d\tau\right]\right\},$$

де

$$K(\tau)=\int\varepsilon^{-1}\omega_0(\tau)d\tau\,. \tag{23}$$

Результати чисельного аналізу наведені на рис. 5, 6.

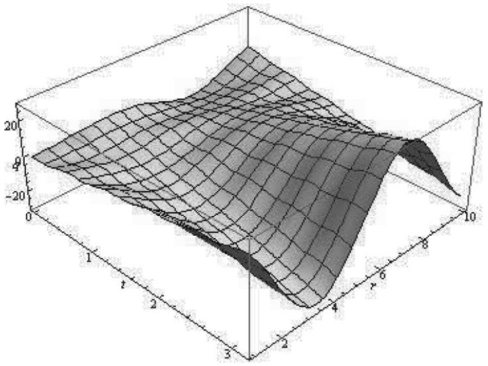

Рис. 5. Залежність від амплітуди функції коливань концентрованої маси в часі

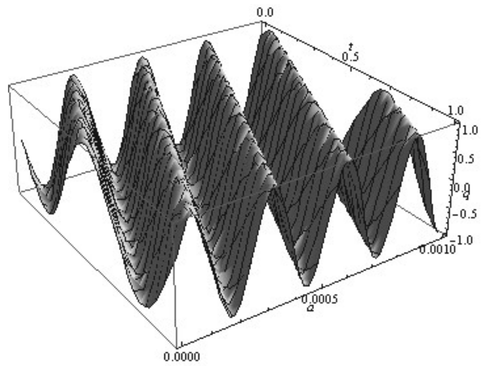

Рис. 6. Вплив безрозмірного параметру рухомої концентрованої маси в часі

ВИСНОВКИ

Подано аналіз математичних моделей та запропоновано удосконалений алгоритм наближеного аналітичного розв'язку задач нелінійної динаміки ряду аерокосмічних систем, які зводяться до інтегрування сингулярних нелінійних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Запропонований аналітико-чисельний підхід на базі застосування гібридних асимптотичних методів може бути ефективним при розв'язку нелінійних задач динаміки систем зі змінними в часі параметрами.

ЛІТЕРАТУРА

1. Красильников П. С. О нелинейных колебаниях маятника переменной длины на вибрирующем основании. *ПММ*. 2012. Т. 76, Вып. 1. С. 36–51.

2. Безгласный С. П., Кутырев Н. И. Управление колебаниями маятника переменной длины. *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*. 2013. Т. 15, № 6(3). С. 590–593.

3. Николис Дж. Динамика иерархических систем. Эволюционное представление. Москва: Мир, 1989. 486 с.

4. Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. Нестационарные колебания осциллятора переменной массы с учетом вязкого трения. *Вібрації в техніці і технологіях*. 2014. № 3(75). С. 18–27.

5. Азарсков В. Н., Грищак Д. Д. Приближенное аналитическое решение задачи динамики математического маятника переменной массы и длины. *«АВІА-2013»*: Матеріали XI міжнар. наук.-техн. конф. (Київ, 21-23 травня 2013). Київ: НАУ, 2013. Т. 4. С. 22.1–22.4.

6. Azarskov V. N., Gristchak D. D. Vibration damping for the problems of aircraft motion. *J. Electronics and Control Systems*. 2014. N 4(42). P. 30–34.

7. Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. Москва: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.

8. Брюно А. Д., Петрович В. Ю. Вычисление периодических колебаний спутника. *Математическое моделирование*. 1997. Т. 9, № 6. С. 82–94.

9. Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. Москва: Наука, 1979. 256 с.

10. Красильников П. С. Малые плоские колебания спутника на эллиптической орбите. *Нелинейная динамика*. 2013. Т. 9, № 4. С. 671–696.

11. Садов С. Ю. Нормальная форма уравнения колебаний спутника в сингулярном случае. *Математические заметки*. 1995. Т. 58, № 5. С. 785–789.

12. Сарычев В. А., Сазонов В. В., Златоустов В. А. Периодические колебания спутника в плоскости эллиптической орбиты. *Космические исследования*. 1977. Т.15, № 6. С. 809–834.

13. Bruno A. D., Varin V. P. Limit problems for the equation of oscillation of a satellite. *Celestial Mechanics*. 1977. V. 66, N 1. P. 17–68.

14. Gaetan Kerschen, Keith Worden, Aleksander F. Vakakis, Jean-Claude Golinval. Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics. *Jnt. J. Mechanical Systems and Signal Processing*. 2006. 20. P. 505–592.

15. Gristchak V. Z., Gristchak D. D., Fatieieva Yu. A. Hybrid asymptotic method. Theory and applications. Zaporizhzhye: ZNU, 2016. 107 p.

16. Gristchak V. Z., Gristchak D. D. More Precise Analytical Solution for Satellite Nonlinear Vibration Problem in the Plane of Elliptical Orbit. *Proc. 4-th Int. Conf. “Nonlinear Dynamics”* (Sevastopol, 19-22 June, 2013). Sevastopol, 2013. P. 46–50.

17. Gristchak D. D. Vibration of Spacecraft Structure with Joint-up Dynamic Absorber and Periodic Damping Coefficients Near Disturbed Surface. *Problems of Computational Mechanics and Strength of Structures*. 2015. Vol. 24. P. 24–27.

18. Ольков В. В., Гусев И. Н. Динамическая устойчивость летательного аппарата вблизи взволнованной поверхности. *Методы возмущений в механике*. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1982. С. 105–111.

19. Гусев И. Н. Переходные режимы движения летательного аппарата в плоскости крена. *Методы возмущений в механике.* Иркутск, 1979. С. 171–180.

20. Gristchak D. D. Nonlinear Vibration of Launch Vehicle Carrying a Moving Time-Dependent Mass. *Proceedings of the 5-th International Conference on Nonlinear Dynamics ND–KhPI 2016.* (Kharkov, 27-30 September 2016). Kharkov, 2016. P. 294–297.

REFERENCES

1. Krasilnikov, P. S. (2012). On nonlinear oscillations of a pendulum of variable length on a vibrating base. PMM, Vol. 76, Iss. 1, pp. 36-51.

2. Bezglasnyiy, S. P. & Kutyirev, N. I. (2013). Control of oscillations of a pendulum of variable length. Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra Rossiyskoy akademii nauk, Vol. 15, No. 6(3), pp. 590-593.

3. Nikolis, Dzh. (1989). Dynamics of hierarchical systems. Evolutionary view. Moscow: Mir.

4. Olshanskiy, V. P. & Olshanskiy, S. V. (2014). Nonstationary oscillations of a variable mass oscillator with allowance for viscous friction. Vibratsiyi v tekhnitsi i tekhnolohiyakh, No. 3(75), pp. 18-27.

5. Azarskov, V. N. & Grischak, D. D. (2013). An approximate analytical solution of the problem of the dynamics of a mathematical pendulum of variable mass and length. XI International Materials Sci.-Tech. Conf. “AVIA-2013”, (Vol. 4, pp. 22.1-22.4), Kyiv.

6. Azarskov, V. N. & Gristchak, D. D. (2014). Vibration damping for the problems of aircraft motion. J. Electronics and Control Systems, No. 4(42), pp. 30-34.

7. Beletskiy, V. V. (1975). The motion of the satellite relative to the center of mass in the gravitational field. Moscow: Izd-vo MGU.

8. Bryuno, A. D. & Petrovich, V. Yu. (1997). Calculation of periodic oscillations of a satellite. Matematicheskoe modelirovanie, Vol. 9, No. 6, pp. 82-94.

9. Bryuno, A. D. (1979). Local method of nonlinear analysis of differential equations. Moscow: Nauka.

10. Krasilnikov, P. S. (2013). Small flat oscillations of the satellite in elliptical orbit. Nelineynaya dinamika, Vol. 9, No. 4, pp. 671-696.

11. Sadov, S. Yu. (1995). The normal form of the satellite oscillation equation in the singular case. Matematicheskie zametki, Vol. 58, no. 5, pp. 785-789.

12. Saryichev, V. A., Sazonov, V. V. & Zlatoustov, V. A. (1977). Periodic oscillations of the satellite in the plane of the elliptical orbit. Kosmicheskie issledovaniya, Vol. 15, No. 6, pp. 809-834.
13. Bruno, A. D. & Varin, V. P. (1977). Limit problems for the equation of oscillation of a satellite. Celestial Mechanics, Vol. 66, No. 1, pp. 17-68.
14. Gaetan Kerschen, Keith Worden, Aleksander F. Vakakis & Jean-Claude Golinval (2006). Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics. Jnt. J. Mechanical Systems and Signal Processing, 20, pp. 505-592.
15. Gristchak, V. Z., Gristchak, D. D. & Fatieieva, Yu. A. (2016). Hybrid asymptotic method. Theory and applications. Zaporizhzhye: ZNU.
16. Gristchak, V. Z. & Gristchak, D. D. (2013). More Precise Analytical Solution for Satellite Nonlinear Vibration Problem in the Plane of Elliptical Orbit. Proc. 4-th Int. Conf. “Nonlinear Dynamics” (pp. 46-50), Sevastopol.
17. Gristchak, D. D. (2015). Vibration of Spacecraft Structure with Joint-up Dynamic Absorber and Periodic Damping Coefficients Near Disturbed Surface. Problems of Computational Mechanics and Strength of Structures, Vol. 24, pp. 24-27.
18. Olkov, V. V. & Gusev, I. N. (1982). Dynamic stability of an aircraft near an agitated surface. Perturbation methods in mechanics (pp. 105-111). Novosibirsk: Nauka, Sibirskoe otdelenie.
19. Gusev, I. N. (1979). Transitional regimes of the aircraft in the plane of roll. Perturbation methods in mechanics (pp. 171-180). Irkutsk.
20. Gristchak, D. D. Nonlinear Vibration of Launch Vehicle Carrying a Moving Time-Dependent Mass. Proceedings of the 5-th International Conference on Nonlinear Dynamics ND–KhPI 2016, (pp. 294-297), Kharkov.

УДК 519.6

СХОДИМОСТЬ ИТЕРАТИВНОГО ОБОБЩЁННОГО МЕТОДА КАНТОРОВИЧА ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ КАРМАНА

Громов В. А., к. ф.-м. н., с. н. с.

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, просп. Гагарина, 72, Днепр, Украина

stroller@rambler.ru

В работе устанавливается возможность применения итеративного обобщённого метода Канторовича к анализу уравнений Кармана. Доказывается, что последовательность приближений к решению, порождаемая указанным методом, сходится в норме специального энергетического пространства.

Ключевые слова: итеративный обобщённый метод Канторовича, нелинейные краевые задачи, уравнения Кармана.

ЗБІЖНІСТЬ ІТЕРАТИВНОГО УЗАГАЛЬНЕНОГО МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА ПРИ РОЗВ’ЯЗАННІ РІВНЯНЬ КАРМАНА

Громов В. О., к. ф.-м. н., с. н. с.

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, просп. Гагаріна, 72, Дніпро, Україна

stroller@rambler.ru

У роботі встановлюється можливість застосування ітеративного узагальненого методу Канторовича до аналізу рівнянь Кармана. Доводиться, що послідовність наближень до розв’язку, що породжується зазначеним методом, збігається у нормі спеціального енергетичного простору.

Ключові слова: ітеративний узагальнений метод Канторовича, нелінійні крайові задачі, рівняння Кармана.