

УДК 539.3

МІЦНІСТЬ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНИХ ПЛАСТИН З ДВОМА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИМИ РОЗРІЗАМИ (ТОНКИМИ ЖОРСТКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ) ЗА ВСЕБІЧНОГО РОЗТЯГУ

¹Кузь І. С., к. ф.-м. н., доцент, ²Кузь О. Н., к. т. н., доцент, ¹Пиз Н. Я., аспірант

¹Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна

²Національний університет «Львівська політехніка»,
вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна

ihorkuz24@gmail.com, olyakuzon@gmail.com, nazarpuz@gmail.com

Розвинуто застосування варіаційно-різницевого методу до розв'язування задач теорії малих пружно-пластичних деформацій для лінійно зміцнюваних пластин з розрізами (або такими самими за розмірами тонкими абсолютно жорсткими включеннями) з урахуванням розвантаження. Для розв'язування отриманих після дискретизації систем лінійних та нелінійних алгебричних рівнянь запропоновано використовувати ітераційний метод Ньютона-Канторовича та комбінований ітераційний процес, який містить градієнтний метод та метод з чебишевським набором ітераційних параметрів. Числово розв'язано низку задач про всебічний розтяг пружно-пластичних пластин з двома перпендикулярними розрізами (тонкими жорсткими включеннями). Побудовано зони еволюції пластичних деформацій за покрокового збільшення навантаження. З'ясовано напруження, за яких у пластинах досягаються межі текучості та міцності.

Ключові слова: пластина, розріз, тонке жорстке включення, теорія малих пружно-пластичних деформацій, лінійне зміцнення, розвантаження, варіаційно-різницевий метод.

ПРОЧНОСТЬ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ПЛАСТИН С ДВУМЯ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ РАЗРЕЗАМИ (ТОНКИМИ ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ) ПРИ ВСЕСТОРОННЕМ РАСТЯЖЕНИИ

¹Кузь И. С., к. ф.-м. н., доцент, ²Кузь О. Н., к. т. н., доцент, ¹Пыз Н. Я., аспирант

¹Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, г. Львов, 79000, Украина

²Национальный университет «Львовская политехника»,
ул. С. Бандеры, 12, г. Львов, 79013, Украина

ihorkuz24@gmail.com, olyakuzon@gmail.com, nazarpuz@gmail.com

Развито применение вариационно-разностного метода к решению задач теории малых упруго-пластических деформаций для линейно упрочняющихся пластин с разрезами (или такими же по размерам тонкими абсолютно жесткими включениями) с учетом их разгрузки. Для решения полученных после дискретизации систем линейных и нелинейных алгебраических уравнений предложено использовать итерационный метод Ньютона-Канторовича и комбинированный итерационный процесс, который содержит градиентный метод и метод с чебишевским набором итерационных параметров. Численно решено несколько задач о всестороннем растяжении упруго-пластических пластин с двумя перпендикулярными разрезами (тонкими абсолютно жесткими включениями). Построены зоны развития пластических деформаций при пошаговом увеличении нагрузки. Определены нагрузки, при которых в пластинах достигаются пределы текучести и прочности.

Ключевые слова: пластина, разрез, тонкое жесткое включение, теория малых упруго-пластических деформаций, линейное упрочнение, разгрузка, вариационно-разностный метод.

STRENGTH OF ELASTIC-PLASTIC PLATES WITH TWO PERPENDICULAR CUTS (THIN RIGID INCLUSIONS) UNDER ALL-ROUND STRETCHING

¹Kuz I. S., PhD in Physics and Math., associate professor,

²Kuz O. N., PhD in Technical Sciences, associate professor, ¹Pyz N. Ya., postgraduate

¹Ivan Franko National University of Lviv,
1 Universitetska Str., 79000, Lviv, Ukraine

²National University "Lviv Polytechnic",
12 S. Bandery Str., 79013, Lviv, Ukraine

ihorkuz24@gmail.com, olyakuzon@gmail.com, nazarpyz@gmail.com

Effective numerical methods for solving 2D problems related to the theories of elasticity and plasticity have been worked out. The variation-difference method of building finite difference schemes is extended to disconnected domains. The application of the variation-difference method for solving problems of the theory of small elastic-plastic deformations relatively the plates with cuts (thin rigid inclusion), taking into account the linear strengthening of the material and unloading, has been developed. For solving the resultant systems of nonlinear and linear equation, the Newton-Kantorovich method and combined iterative method (gradient and cyclic Chebyshev's one) were proposed to be used. The choice of iteration parameters of the methods for solving the obtained systems of linear and nonlinear algebraic equations was made. The elaborated software ensures solving the problems with different boundary conditions, medium and domain parameters. A variety of problems concerning all-round stretching of the elastic-plastic plates with two perpendicular cuts (thin rigid inclusion) is numerically solved. The zones of evolution of plastic deformations for step enlarging of the loading are constructed. There are found the stresses under which the yield limit and the strength limit are achieved in the plates. On the base of numerical analysis the following main regularities are found: under the close mutual location of cuts in the plate, the plastic deformations first appear under the stress P^0 which is 33% less than in the plate with the same cuts under the far mutual location; however, the strength limit in the plates in the both considered cases is achieved practically under the same stress P^0 .

Key words: plate, cut, thin rigid inclusion, theory of small elastic-plastic deformations, linear strengthening, unloading, variation-difference method.

ВСТУП

Концентратори напружень, зокрема розрізи, тонкі включення або тріщини, існують у конструкціях внаслідок конструкційних вимог, технологічних операцій при їхньому виготовленні або впливу експлуатаційних навантажень. Їхня наявність призводить до концентрації напружень, що може спричинити передчасне руйнування або появу недопустимих деформацій. У багатьох випадках за високого рівня навантажень елементи конструкцій з концентраторами напружень перебувають в умовах допустимого пластичного деформування. Це призводить до складних задач визначення напружено-деформованого стану, розв'язування яких неможливе без залучення ефективних числових методів розрахунку, оскільки застосування аналітичних методів у зв'язку зі складністю форми тіл (обмеженість розмірів, незв'язність) та фізичної нелінійності значно обмежене.

Одним із ефективних числових методів розв'язування крайових задач деформаційної теорії пластичності в незв'язних областях є варіаційно-різницевий метод із використанням відображення криволінійної (косокутної) сітки у вихідній області на рівномірну прямокутну сітку в області, складеній з прямокутників [1-3]. Проте врахування зміцнення матеріалу при пластичному деформуванні та побудова зон еволюції пластичних деформацій при покроковому збільшенні навантаження дали б змогу точніше з'ясувати напружено-деформований стан пластин з двома перпендикулярними розрізами (або такими самими за розмірами тонкими жорсткими включеннями) та їхню міцність. Наша робота є продовженням циклу праць [1-3].

МЕТА РОБОТИ

З'ясувати вплив двох перпендикулярних розрізів, зокрема при їхньому зближенні, а також абсолютно тонких жорстких включень (АЖВ) замість розрізів, на напружено-деформований стан та міцність пружно-пластичних лінійно зміцнюваних пластин за всебічного розтягу.

ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ ТА ЧИСЛОВИЙ МЕТОД ЇЇ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Розглядаються плоскі задачі деформаційної теорії пластичності, зокрема теорії малих пружно-пластичних деформацій Ільюшина, за активного навантаження у незв'язній області V з межею Σ , які моделюють напружено-деформований стан у пластинах з двома перпендикулярними розрізами (рис. 2, 4). З математичного погляду вони полягають у розв'язуванні рівнянь рівноваги в пластині

$$(C_{ijkl}(\epsilon_u)u_{k,l})_{,j} = 0 \tag{1}$$

за використання мішаних крайових умов на її поверхні $\Sigma (\Sigma_u \cup \Sigma_\sigma = \Sigma)$

$$u_i|_{\Sigma_u} = u_i^0, \quad C_{ijkl}(\epsilon_u)u_{k,l}n_j|_{\Sigma_\sigma} = P_i^0, \tag{2}$$

де

$$C_{ijkl} = \lambda(\epsilon_u)\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\epsilon_u)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),$$

$$\lambda(\epsilon_u) = K - (2/3)\mu(\epsilon_u), \quad \mu(\epsilon_u) = \mu(1 - \omega(\epsilon_u)). \tag{3}$$

Тут u_i, P_i^0, n_j – компоненти векторів переміщень та поверхневих сил, а також зовнішньої нормалі до поверхні Σ_σ відповідно; ϵ_u – інтенсивність тензора деформацій ($e_{ij} = \epsilon_{ij} - (1/3)\epsilon_{kk}\delta_{ij}$; $\epsilon_u = \sqrt{e_{ij}e_{ij}}$); K – модуль об'ємного стиску; $\omega(\epsilon_u)$ – функція пластичності Ільюшина [4]; $u_{i,j} \equiv \partial u_i / \partial x_j$. За однаковими індексами, які зустрічаються в одному виразі двічі, відбувається підсумовування від одиниці до двох.

У випадку плоскої деформації

$$v_1 = u_x(x, y), \quad v_2 = u_y(x, y), \quad v_3 = u_z \equiv 0. \tag{4}$$

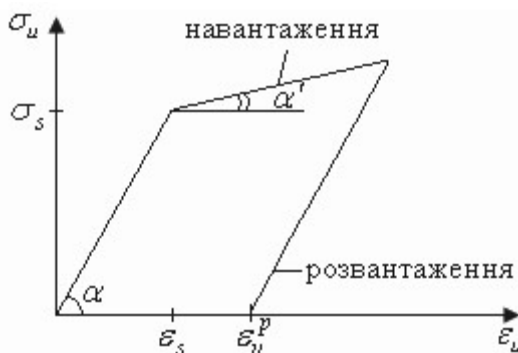


Рис. 1. Графік залежності $\sigma_u \sim \epsilon_u$ для матеріалу з лінійним зміцненням

Для матеріалу з лінійним зміцненням (рис. 1), зокрема міді, алюмінію та їхніх сплавів, функція $\omega(\epsilon_u)$ має вигляд

$$\omega(\epsilon_u) = \begin{cases} (1-\gamma)(\epsilon_u - \epsilon_s) / \epsilon_u, & \epsilon_u > \epsilon_s; \\ 0, & \epsilon_u \leq \epsilon_s, \end{cases} \tag{5}$$

де $\gamma \equiv \mu'/\mu$ – параметр зміцнення; $2\mu \equiv \operatorname{tg} \alpha$; $2\mu' \equiv \operatorname{tg} \alpha'$; σ_s, ε_s – межі течіння за напруженнями та деформаціями відповідно.

Для процесу розвантаження визначальні співвідношення мають вигляд

$$\sigma_{ii} = 3K\varepsilon_{ii}, \quad s_{ij} = s'_{ij} + 2\mu(e_{ij} - e'_{ij}), \quad (6)$$

де компоненти тензорів e'_{ij} і s'_{ij} відповідають початку процесу розвантаження.

Розглянемо дискретизацію задачі (1), (2), тобто побудуємо різницевий аналог цієї задачі, причому будемо виходити з її варіаційної постановки, тобто використовуватимемо варіаційно-різницевий метод побудови різницевої схеми [5].

Оскільки область V є незв'язною, то використовуємо такі координати β^1, β^2 , що відображення

$$x^1 = x^1(\beta^1, \beta^2), \quad x^2 = x^2(\beta^1, \beta^2) \quad (7)$$

переводить її в модельну область V_0 (прямокутник розмірами $l_1 \times l_2$ або область, складену з прямокутників). У цій області лагранжіан матиме вигляд

$$L_0 = (1/2) \int_{V_0} \sqrt{g} D^{ijkl} v_{ij} v_{kl} d\beta^1 d\beta^2 - \int_{V_0} \sqrt{g} \vec{X} \cdot \vec{v} d\beta^1 d\beta^2 - \int_{\Sigma_0} g(\vec{\beta}) \vec{P}^0 \cdot \vec{v} d\Sigma, \quad (8)$$

де $D^{ijkl} = C^{imkn}(\vec{\beta}) B_m^j B_n^l$, $A_j^i = \partial x^i / \partial \beta^j$, $B_j^i = \partial \beta^i / \partial x^j$, $\sqrt{g} = \det \underline{A}$,

$$g(\vec{\beta}) = \begin{cases} \sqrt{g_{11}}, & \beta^2 = \{0, l_2\}; \\ \sqrt{g_{22}}, & \beta^1 = \{0, l_1\}. \end{cases}$$

Замінивши у (8) всі континуальні функції сітковими, інтеграли – скінченними сумами, похідні – різницеви похідними, отримаємо різницевий аналог лагранжіана L_0^h за допомогою дискретного аналога відображення (7), яке не мусить бути задане аналітично, зокрема бути конформним. Достатньо мати взаємно однозначну відповідність між вузлами сітки в областях V та V_0 . Для визначення стаціонарної точки L_0^h матимемо систему нелінійних алгебричних рівнянь

$$\vec{P}(\vec{v}^h) + \vec{F}^h = 0, \quad (9)$$

яку доцільно розв'язувати ітераційним методом Ньютона – Канторовича, кожним кроком якого є дворівнева процедура розв'язування лінійної системи, яка реалізує схему градієнтного методу та методу з чебишевським набором ітераційних параметрів. Складністю її практичної реалізації є підбір ітераційних параметрів системи (9).

Описаний метод реалізований у вигляді пакету програм, який враховує різні крайові умови, геометрію області та параметри середовища.

РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

За допомогою викладеного вище варіаційно-різницевого методу розв'язано низку плоских задач деформаційної теорії пластичності про деформування пластин, виготовлених з матеріалу з лінійним зміцненням (див. рис. 1), наприклад, плакованого алюмінієвого сплаву Д16АТ, який широко використовується в літакобудуванні.

1. Пластина з двома перпендикулярними розрізами, відстань між якими дорівнює більшому розміру розрізу. На рис. 2 подано геометрію пластини з двома перпендикулярно розташованими розрізами однакового розміру, відстань між якими дорівнює більшому

розміру розрізу, та крайові умови на зовнішній межі. Тут введено безрозмірні координати $x^0 \equiv x/d$ та $y^0 \equiv y/d$, де d – менший розмір розрізу. Розрізи є вільними від навантажень ($\sigma_{nn} = 0, \sigma_{n\tau} = 0$). До усіх країв пластини прикладене безрозмірне рівномірне нормальне напруження $P^0 \equiv P/\sigma_s$, де σ_s – межа течіння.

За допомогою діаграм розподілу безрозмірної інтенсивності тензора напружень $\sigma_u^0 \equiv \sigma_u/\sigma_s$ можна з'ясувати області виникнення та розвитку пластичних деформацій, а також оцінити міцність пластини за тим чи іншим критерієм. Згідно з умовою течіння Губера-Мізеса пластичне деформування починається тоді, коли безрозмірна інтенсивність тензора напружень σ_u^0 досягає безрозмірної межі течіння $\sigma_s^0 = 1$. Згідно з критерієм міцності (скажімо найбільшої інтенсивності дотичних напружень) небезпечний стан досягається, коли безрозмірна інтенсивність тензора напружень σ_u^0 досягає безрозмірної величини $\sqrt{2/3}\sigma_B^0$, де $\sigma_B^0 \equiv \sigma_B/\sigma_s$ – безрозмірна межа міцності [6].

На рис. 3 зображено розвиток зон пластичних деформацій зі збільшенням безрозмірного напруження P^0 для зображеної на рис. 2 пластини (модуль пружності $E = 7,31 \cdot 10^4$ МПа; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,33$; параметр зміцнення $\gamma = 0,1$; межа текучості $\sigma_s = 324$ МПа; межа міцності $\sigma_B = 469$ МПа). На рис. 3 зони 1 побудовані за $P^0 = 0,37$; зони 2 – за $P^0 = 0,56$; зони 3 – за $P^0 = 0,8$; зона 4 – за $P^0 = 0,92$.

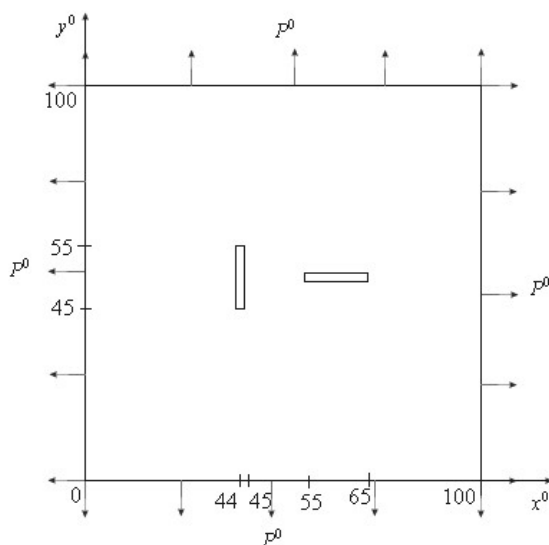


Рис. 2. Пластина з двома перпендикулярними розрізами, відстань між якими дорівнює більшому розміру розрізу, та крайовими умовами на зовнішній межі

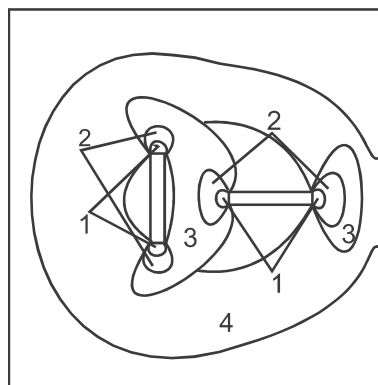


Рис. 3. Діаграма областей розвитку пластичних деформацій за покрокового збільшення P^0 у пластині з двома перпендикулярними розрізами, відстань між якими дорівнює більшому розміру розрізу

Як видно з рис. 3, спочатку з'являються овальні області пластичних деформацій на торцях розрізів (зони 1), які далі розповсюджуються овалами навколо торців (зони 2). За напруження $P^0 = 0,8$ області пластичних деформацій навколо торців лівого розрізу та лівого торця правого розрізу об'єднуються (зони 3). За напруження $P^0 = 0,92$ уже дві зони 3 об'єднуються і виходять на правий край пластини (зона 4). За цього напруження у пружному стані всередині зони 4 залишаються лише овальна зона навколо лівого отвору і зона у вигляді півмісяця навколо правого. Вихід зони пластичності саме на правий край пластини пояснюється найбільшою близькістю до нього відповідного торця розрізу.

2. Пластина з двома перпендикулярними розрізами, відстань між якими дорівнює меншому розміру розрізу. На рис. 4 подано геометрію пластини з двома перпендикулярно розташованими розрізами, відстань між якими дорівнює меншому розміру розрізу, та крайові умови на зовнішній межі. Тут також введено безрозмірні координати $x^0 \equiv x/d$ та $y^0 \equiv y/d$, де d – менший розмір розрізу. Розрізи є вільними від навантажень ($\sigma_{nn} = 0, \sigma_{nt} = 0$). До усіх країв пластини також прикладене безрозмірне рівномірне нормальне напруження $P^0 \equiv P/\sigma_s$, де σ_s – межа течіння.

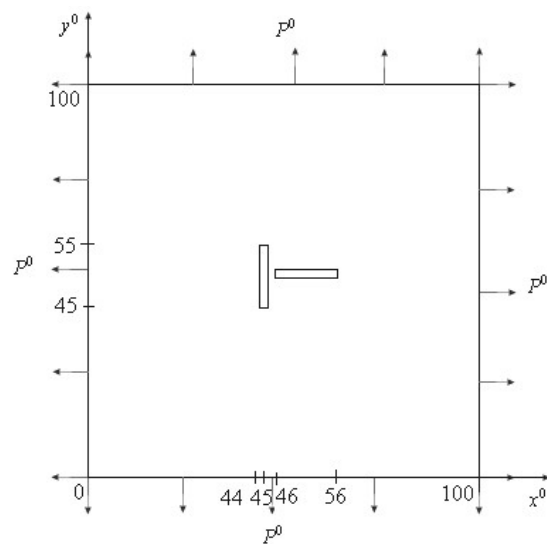


Рис. 4. Пластина з двома перпендикулярними розрізами, відстань між якими дорівнює меншому розміру розрізу, та крайовими умовами на зовнішній межі

На рис. 5 зображено розвиток зон пластичних деформацій зі збільшенням безрозмірного напруження P^0 для поданої на рис. 4 пластини з такими ж характеристиками. На рис. 5 зони 1 побудовані за $P^0 = 0,25$; зони 2 – за $P^0 = 0,62$; зони 3 – за $P^0 = 0,8$; зони 4 – за $P^0 = 0,92$.

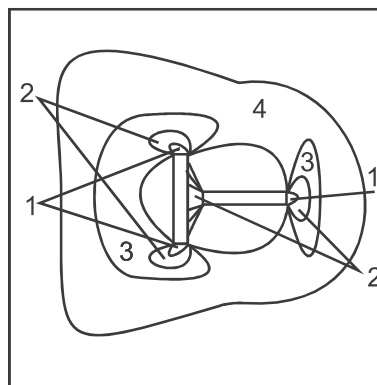


Рис. 5. Діаграма областей розвитку пластичних деформацій за покрокового збільшення P^0 у пластині з двома перпендикулярними розрізами, відстань між якими дорівнює меншому розміру розрізу

Як видно з рис. 5, на відміну від рис. 3, області пластичних деформацій вперше з'являються не на усіх торцях розрізів (зони 1). За напруження $P^0 = 0,62$ зони пластичних деформацій навколо лівого розрізу розвиваються зміщеними до лівого краю пластини овалами (зони 2), і за напруження $P^0 = 0,8$ ці овали об'єднуються (зони 3).

На основі числового аналізу виявлено такі основні закономірності: при ближчому взаємному розташуванні розрізів у пластині пластичні деформації вперше виникають за напруження P^0 на 33% меншого, ніж у пластині з такими ж розрізами при їхньому дальшому розташуванні; проте утримувальна здатність пластин в обох розглядуваних випадках втрачається практично за однакового напруження P^0 .

3. Пластина з розрізом та перпендикулярним до нього таким самим за розмірами АЖВ, відстань між якими дорівнює більшому розміру розрізу

На рис. 6 подано геометрію пластини з розрізом та перпендикулярним до нього таким самим за розміром АЖВ, відстань між якими дорівнює більшій величині розрізу, та крайові умови на зовнішній межі. Тут введено безрозмірні координати $x^0 \equiv x/d$ та $y^0 \equiv y/d$, де d – менший розмір розрізу. Розріз є вільним від навантажень ($\sigma_{nn} = 0, \sigma_{\tau\tau} = 0$). Наявність АЖВ моделюємо крайовими умовами $u_\tau = 0, u_n = 0$ на його межі. До усіх країв пластини прикладене безрозмірне рівномірне нормальне напруження $P^0 \equiv P/\sigma_s$, де σ_s – межа текучості.

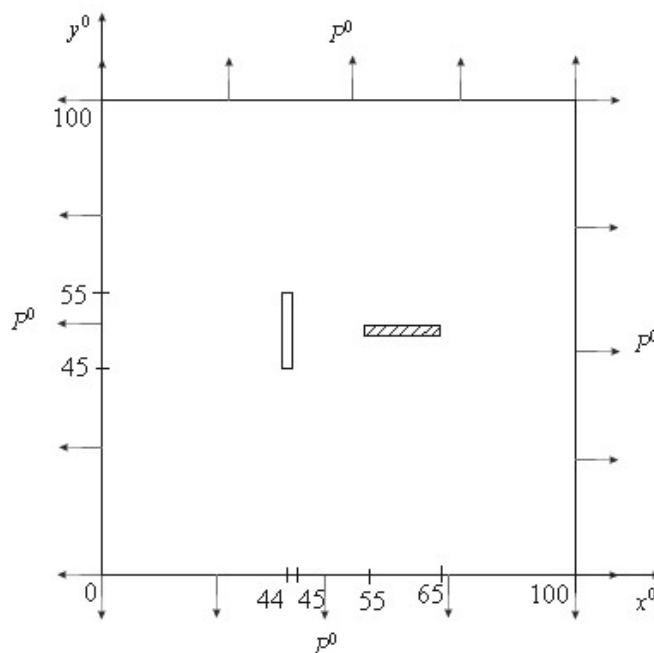


Рис. 6. Пластина з розрізом та перпендикулярним до нього таким самим за розміром АЖВ, відстань між якими дорівнює більшій величині розрізу, та крайові умови на зовнішній межі

На рис. 7 зображено розвиток зон пластичних деформацій зі збільшенням безрозмірного напруження P^0 для зображеної на рис. 6 пластини (модуль пружності $E = 7,31 \cdot 10^4$ МПа; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,33$; параметр зміцнення $\gamma = 0,1$; межа текучості $\sigma_s = 324$ МПа; межа міцності $\sigma_B = 469$ МПа). На рис. 3 зони 1 побудовані за $P^0 = 0,4$; зони 2 – за $P^0 = 0,68$; зони 3 – за $P^0 = 0,93$; зона 4 – за $P^0 = 0,96$.

Як видно з рис. 7, спочатку з'являються овальні області пластичних деформацій на торцях розрізу (зони 1), які далі розповсюджуються овалами навколо нього та з'являються навколо торців АЖВ (зони 2). За напруження $P^0 = 0,93$ області пластичних деформацій навколо

торців розрізу та АЖВ об'єднуються (зона 3). За напруження $P^0 = 0,96$ у пружному стані всередині зони 4 залишаються лише овальна зона навколо розрізу.

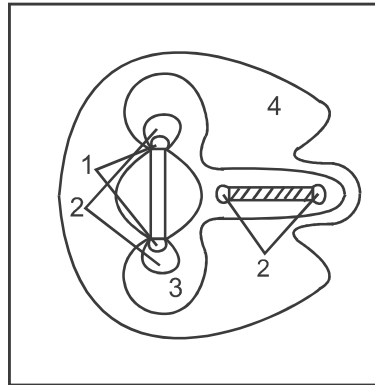


Рис. 7. Діаграма областей розвитку пластичних деформацій за покрокового збільшення P^0 у пластині з розрізом та перпендикулярним до нього таким самим за розміром АЖВ, відстань між якими дорівнює більшій величині розрізу

4. Пластина з двома перпендикулярними АЖВ, відстань між якими дорівнює більшому розміру АЖВ. На рис. 8 подано геометрію пластини з двома перпендикулярними АЖВ, відстань між якими дорівнює більшому розміру АЖВ, та крайові умови на зовнішній межі. Тут також введено безрозмірні координати $x^0 \equiv x/d$ та $y^0 \equiv y/d$, де d – менший розмір розрізу. Наявність АЖВ також моделюємо крайовими умовами $u_\tau = 0, u_n = 0$ на їхніх межах. До усіх країв пластини також прикладене безрозмірне рівномірне нормальне напруження $P^0 \equiv P/\sigma_s$, де σ_s – межа течіння.

На рис. 9 зображено розвиток зон пластичних деформацій зі збільшенням безрозмірного напруження P^0 для поданої на рис. 4 пластини з такими ж характеристиками. На рис. 5 зони 1 побудовані за $P^0 = 0,46$; зони 2 – за $P^0 = 0,77$; зони 3 – за $P^0 = 0,93$; зони 4 – за $P^0 = 0,99$.

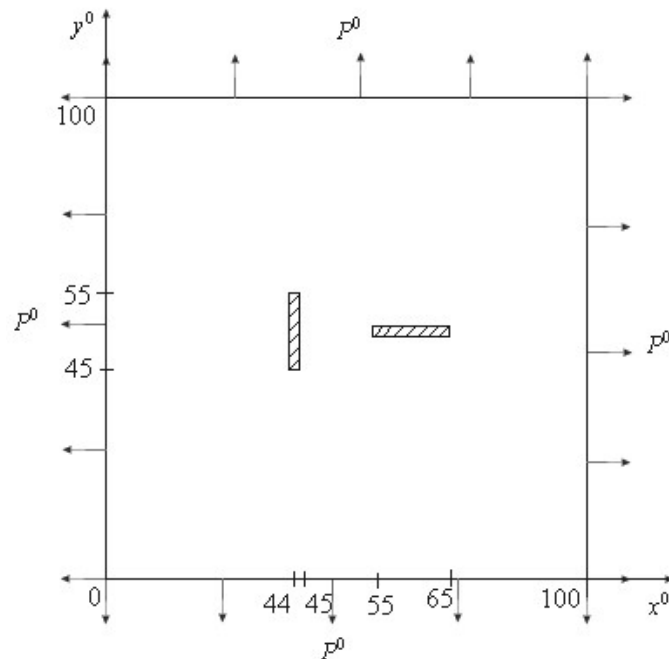


Рис. 8. Пластина з двома перпендикулярними АЖВ, відстань між якими дорівнює більшому розміру АЖВ, та крайові умови на зовнішній межі

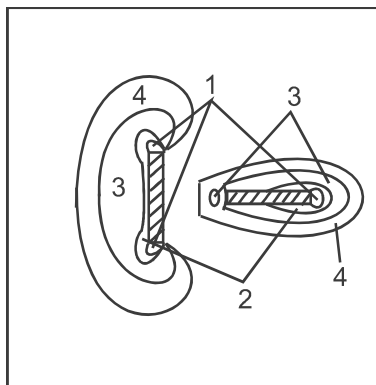


Рис. 9. Діаграма областей розвитку пластичних деформацій за покрокового збільшення P^0 у пластині з двома перпендикулярними АЖВ, відстань між якими дорівнює більшому розміру АЖВ, та крайові умови на зовнішній межі

Як видно з рис.9, області пластичних деформацій вперше з'являються не на усіх торцях розрізів (зони 1). За напруження $P^0 = 0,77$ зони пластичних деформацій навколо лівого АЖВ об'єднуються (зони 2), і за напруження $P^0 = 0,93$ з'являється овальна зона біля лівого торця правого АЖВ (зони 3).

ВИСНОВКИ

Побудовано зони еволюції пластичних деформацій у пластинах з двома перпендикулярними розрізами (тонкими АЖВ) за покрокового збільшення навантаження. З'ясовані напруження, за яких у пластинах досягаються межі текучості та міцності.

На основі числового аналізу виявлено такі основні закономірності: при ближчому взаємному розташуванні розрізів у пластині пластичні деформації вперше виникають за напруження P^0 на 33% меншого, ніж у пластині з такими ж розрізами при їхньому дальшому розташуванні; проте утримувальна здатність пластин в обох розглянутих випадках втрачається практично за однакового напруження P^0 . За наявності АЖВ замість розрізу пластина, очевидно, зміцнюється. Зокрема у пластині з розрізом та АЖВ пластичні деформації вперше виникають за напруження P^0 на 15% меншого, ніж у пластині з двома АЖВ; проте утримувальна здатність пластин в обох розглянутих випадках також втрачається практично за однакового напруження P^0 .

ЛІТЕРАТУРА

1. Кузь І., Тімар І. Напружено-деформований стан пружно-пластичних пластин з розрізом або абсолютно жорстким включенням. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* 2010. Вип. 73. С. 148–154.
2. Кузь І. Пластичне деформування пластин з двома співвісними або компланарними розрізами (абсолютно жорсткими включеннями). *Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* 2012. Вип. 76. С. 91–98.
3. Кузь І., Кузь О., Пиз Н. Напружено-деформований стан пружно-пластичних лінійно зміцнюваних пластин з двома перпендикулярними розрізами за всебічного розтягу. *Вісник ТНТУ.* 2015. № 2(78). С. 110–116.
4. Ильющин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. Москва: Изд-во АН СССР, 1963. 272 с.
5. Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1981. 344 с.
6. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Елементи теорії пластичності та міцності. Львів: Світ, 1999. Т.1. 532 с. 1999. Т.2. 419 с.

REFERENCES

1. Kuz, I. & Timar, I. (2010). Stress-strain state of elastic-plastic plates with crack or the same thin rigid body. *Visnyk of Lviv University, Ser. Mech. et Math.*, Iss. 73, pp. 148-154.
2. Kuz, I. (2012). Plactical strain of plates with two cuts (the same thin rigid body). *Visnyk of Lviv University, Ser. Mech. et Math.*, Iss. 76, pp. 91-97.

3. Kuz, I., Kuz, O. & Pyz, N. (2015). Stress-strain state of elastic-plastic linearly strengthenable plates with two perpendicular cuts under all-round stretching. Visnyk of TNTU, No. 2(78), pp. 110-116.
4. Плушин, А. (1963). Plasticity. Bases of General Mathematical Theory. Moscow: Publishing House of the USSR Academy of Science.
5. Pobedria, B. E. (1981). Numerical Methods in Theory of Elasticity and Plasticity. Moscow: Publishing House of Moscow University.
6. Bozydarnyk, V. V. & Sulym, H. T. (1999). Elements of Theory of Plasticity and Strength. Vol. 1, 2. Lviv: Publishing House "Svit".

УДК 519.172

СПЕКТР РЕБЕРНЫХ РАЗРЕЗОВ ГРАФА И ЗАДАЧА ИЗОМОРФИЗМА

Курапов С. В., к. ф.-м. н., доцент, Давидовский М. В.

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

lilili5050@rambler.ru

Данная работа посвящена одной из основополагающих структур в графе – реберному разрезу графа. В статье приведены формальные определения центрального и реберного разрезов графа. Показана связь между центральными разрезами и квалиразрезами в графе. На основании понятия реберного разреза и операции порождения строится спектр реберных разрезов, характеризующийся множеством ребер определенного уровня. Показано, что спектр реберных разрезов графа может быть применен для задачи распознавания изоморфизма графов.

Ключевые слова: граф, изоморфизм, центральные разрезы, реберные разрезы, квазициклы, спектр реберных разрезов.

СПЕКТР РЕБЕРНОГО РОЗРІЗУ ГРАФА ТА ЗАДАЧА ІЗОМОРФІЗМУ

Курапов С. В., к. ф.-м. н., доцент, Давидовський М. В.

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

lilili5050@rambler.ru

Робота присвячена одній з основоположних структур у графі – реберному розрізу графа. У статті наведені формальні визначення центрального і реберного розрізів графа. Показано зв'язок між центральними розрізами і квалірозрізами у графі. На основі поняття реберного розрізу і операції породження будується спектр реберних розрізів, що характеризується множиною ребер визначеного рівня. Показано, що спектр реберних розрізів графа може бути застосований для задачі розпізнавання ізоморфізму графів.

Ключові слова: граф, ізоморфізм, центральні розрізи, реберні розрізи, квазіцикли, спектр реберних розрізів.

GRAPH EDGE CUT AND THE GRAPH ISOMORPHISM PROBLEM

Kurapov S. V., PhD in Physics and Maths, associate professor, Davidovsky M. V.

*Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky st., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

lilili5050@rambler.ru

The presented research is devoted to one of the fundamental structures in graphs – the edge cut of a graph. In this article the authors provide formal definitions of central and edge cuts of a graph and show the relation between central cuts and quasi-cycles in a graph. For that they use the notion of a ring sum of graphs and prove three special lemmas. The first lemma states that the ring sum of all central cuts of a