

УДК 624.072.45: 539.384

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ НАХЛЕСТОЧНОГО СОЕДИНЕНИЯ ПЛАСТИНОК РАЗНОЙ ШИРИНЫ. ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

Куреннов С. С., д. т. н., доцент

*Національний аерокосмічний університет ім. Н. Е. Жуковського «ХАІ»,
ул. Чкалова, 17, Харків, 61070, Україна*

ss.kurennov@gmail.com

Предложена упрощенная двумерная модель клеевого соединения, основанная на гипотезе о высокой жесткости несущих слоев в поперечном направлении. Построено аналитическое решение задачи о напряженном состоянии симметричного соединения пластинок различных размеров. Решена модельная задача и проведен эксперимент, который показал высокую точность предложенной упрощенной математической модели.

Ключевые слова: клеевое соединение, модель Фолькерсена, двумерная модель, аналитическое решение.

НАПРУЖЕНИЙ СТАН З'ЄДНАННЯ ВНАПУСК ПЛАСТИНОК РІЗНОЇ ШИРИНИ. НАБЛИЖЕНА ТЕОРІЯ Й ЕКСПЕРИМЕНТ

Куреннов С. С., д. т. н., доцент

*Національний аерокосмічний університет ім. Н. Є. Жуковського «ХАІ»,
вул. Чкалова, 17, Харків, 61070, Україна*

ss.kurennov@gmail.com

Запропоновано спрощену двовимірну модель клейового з'єднання, яка ґрунтується на гіпотезі про високу жорсткість несучих шарів у поперечному напрямку. Побудовано аналітичний розв'язок задачі про напружений стан симетричного з'єднання пластинок різних розмірів. Розв'язано модельну задачу та проведено експеримент, який показав високу точність запропонованої спрощеної математичної моделі.

Ключові слова: клейове з'єднання, модель Фолькерсена, двовимірна модель, аналітичний розв'язок.

ON THE STRESSED STATE OF THE LAP JOINT OF THE DIFFERENT WIDTH PLATES. APPROXIMATIVE THEORY AND EXPERIMENT

Kurennov S. S., Dr. sc. nat., docent

*National Aerospace University, "Kharkiv Aviation Institute",
Street Chkalov, 17, Kharkiv, 61070, Ukraine*

ss.kurennov@gmail.com

A simplified two-dimensional model of an adhesive joint is proposed. This model is based on the hypothesis of high rigidity of the carrier layers in the transverse direction. An analytical solution of the stressed state problem for a symmetrical connection of the different sized plates is constructed. A model problem was solved and an experiment, which has shown us the high accuracy for the proposed simplified mathematical model, was performed.

Key words: adhesive joint, Volkersen model, two-dimensional model, analytical solution.

ВВЕДЕНИЕ

При расчете напряженно-деформированного состояния (НДС) нахлесточных клеевых соединений в ряде случаев необходимо учитывать неравномерность напряжений и деформаций по ширине соединения. Необходимость в этом возникает, например, при расчете НДС соединений накладок или силовых элементов конструкции с обшивкой. Точное аналитическое решение задачи о НДС соединения пластинок, которое учитывает неравномерность деформаций по ширине соединения, пока неизвестно. Существуют различные численные и приближенные методики численного решения данной задачи [1-5].

Обычно конструкция и прилагаемые к ней нагрузки симметричны относительно продольной оси. В этом случае допустимо применение упрощенной модели, согласно которой поперечные деформации и перемещения в плоскости соединения полагаются равными нулю. Ранее эта гипотеза была использована в работе [6] при построении уточненной теории балок. В работе [7] этот подход был использован для обобщения модели соединения Фолькерсена (которая описана, например, в обзорах [8, 9]) на двумерную постановку и получено аналитическое решение задачи о НДС соединения двух одинаковых прямоугольных пластинок. Данная статья развивает результаты работы [10], в которой решена задача о соединении пластинок разной ширины. Целью данной работы является построение аналитического решения задачи о напряженном состоянии симметричного нахлесточного соединения прямоугольных пластинок и экспериментальная проверка предложенной модели.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим симметричное клеевое соединение двух прямоугольных пластинок, имеющих размеры $l \times 2h$ и $L \times 2H$, показанное на рис. 1. Меньшую пластинку назовем накладкой.

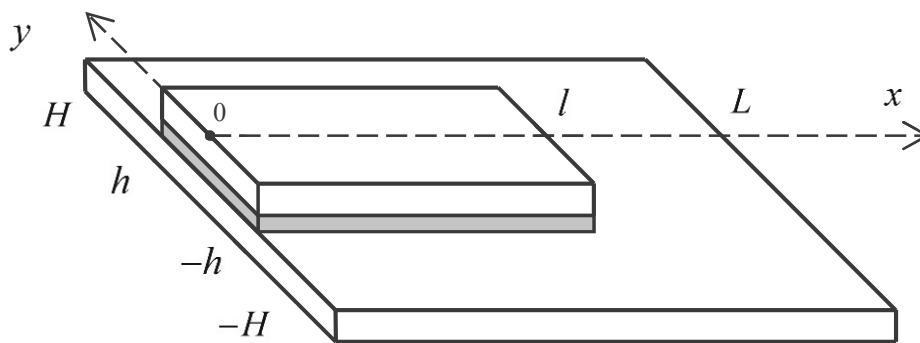


Рис. 1. Схема соединения

Положим, что краевые условия на торцах соединения ($x=0$ и $x=L$) симметричны относительно оси x , а боковые стороны обеих пластинок свободны от нагрузки. Для описания НДС соединения используем гипотезы модели соединения Фолькерсена [8, 9]: несущие слои деформируются только в плоскости соединения; клеевой слой работает только на сдвиг; напряжения равномерно распределены по толщине слоев. Будем считать, что обе пластинки являются абсолютно жесткими в направлении оси y .

В силу симметрии выделим три подобласти в задаче. Продольные перемещения в области склейки обозначим U_1 (накладка) и U_2 (широкая пластинка). Перемещения основной пластинки в области $x \in [0; l]$; $y \in [h; H]$ обозначим U_3 , а в области $x \in [L-l; L]$; $y \in [0; H]$ – U_4 . Соответствующие продольные и касательные усилия в пластинках обозначим $N_k = E_k \delta_k \frac{\partial U_k}{\partial x}$ и $q_k = G_k \delta_k \frac{\partial U_k}{\partial y}$ ($k=1, \dots, 4$). Толщину накладки обозначим δ_1 , толщину основной пластинки – δ_2 , а толщину соединительного (клеявого) слоя – δ_0 . Модули упругости накладки и основной пластинки вдоль оси x обозначим соответственно E_1 и E_2 , модули сдвига – G_1 и G_2 , модуль сдвига клея – G_0 .

В работе [7] показано, что в области склейки продольные перемещения несущих слоев описываются системой уравнений

$$\alpha_k \left(\frac{\partial^2 U_k}{\partial x^2} + \mu_k \frac{\partial^2 U_k}{\partial y^2} \right) + (-1)^k (U_1 - U_2) = 0; \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

где $\alpha_k = E_k \delta_k \delta_0 G_0^{-1}$, $\mu_k = G_k E_k^{-1}$.

Касательные напряжения в клее пропорциональны разности перемещений пластинок [8, 9]

$$\tau = \frac{G_0}{\delta_0} (U_2 - U_1). \quad (2)$$

Вне области склейки перемещения пластинки (при условии высокой поперечной жесткости [6]) описываются уравнением

$$\frac{\partial^2 U_m}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 U_m}{\partial y^2} = 0, \quad m = 3; 4. \quad (3)$$

Краевые условия: положим, что к торцу пластинки ($x = L$) приложено усилие $P(y)$, а противоположный торец накладки ($x = 0$) жестко зафиксирован:

$$U_1|_{x=0} = 0; \quad N_4|_{x=L} = E_2 \delta_2 \frac{\partial U_4}{\partial x} \Big|_{x=L} = P(y). \quad (4)$$

На боковых сторонах обеих пластинок и вдоль оси симметрии соединения касательные усилия в пластинках равны нулю:

$$q_1|_{y=0} = q_2|_{y=0} = q_1|_{y=h} = q_3|_{y=H} = q_4|_{y=H} = q_4|_{y=0} = 0. \quad (5)$$

Прочие торцы обеих пластинок свободны от усилий:

$$N_2|_{x=0} = N_3|_{x=0} = N_1|_{x=L} = 0. \quad (6)$$

На этих же краях пластинок касательные усилия также должны быть равны нулю. Однако это условие не может быть выполнено, поскольку в предлагаемой упрощенной модели учитывается только продольный сдвиг. Расчет НДС клеевого слоя по формуле (2), которая не учитывает обжатие, приводит к аналогичному эффекту – касательные напряжения в клее достигают максимальных значений на краях клеевого шва. Это противоречит закону парности касательных напряжений, поскольку внешний край клеевого слоя свободен от нагрузки и касательные напряжения на краю шва должны быть равны нулю. Данная особенность некоторых математических моделей НДС клеевого слоя хорошо известна [9]. Более точные модели показывают, что максимальных значений касательные напряжения в клее достигают на расстоянии порядка толщины клея от края шва, но мало отличаются от значений, вычисляемых по простым моделям. То же самое наблюдается и в данном случае.

Условия сопряжения вдоль боковой стороны области склейки имеют вид:

$$q_2|_{y=h} = q_3|_{y=h}, \quad U_2|_{y=h} = U_3|_{y=h}. \quad (7)$$

Условия сопряжения вдоль линии $x = l$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} U_2|_{x=l} &= U_4|_{x=l}, \quad (y \in [0, h]); \quad U_3|_{x=l} = U_4|_{x=l}, \quad (y \in [h, H]); \\ q_2|_{x=l} &= q_4|_{x=l}, \quad (y \in [0, h]); \quad q_3|_{x=l} = q_4|_{x=l}, \quad (y \in [h, H]); \\ N_2|_{x=l} &= N_4|_{x=l}, \quad (y \in [0, h]); \quad N_3|_{x=l} = N_4|_{x=l}, \quad (y \in [h, H]). \end{aligned} \quad (8)$$

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим область склейки. Из системы (1) следует

$$U_2 = U_1 - \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \right), \quad (9)$$

$$\beta_1 \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4} + \beta_2 \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta_3 \frac{\partial^4 U_1}{\partial y^4} - \beta_4 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \beta_5 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = 0, \quad (10)$$

где $\beta_1 = \alpha_1 \alpha_2$; $\beta_2 = (\mu_1 + \mu_2) \alpha_1 \alpha_2$; $\beta_3 = \mu_1 \mu_2 \alpha_1 \alpha_2$; $\beta_4 = \alpha_1 + \alpha_2$; $\beta_5 = \alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2$.

В работе [7] при помощи метода разделения переменных получено и общее решение уравнения (10) при однородных краевых условиях на боковых сторонах соединения и условия $\mu_1 = \mu_2$. Полученное решение имеет вид суперпозиции линейной функции от x и частных решений уравнения (10), имеющих вид $e^{\pm \lambda x \pm i \xi y}$, где i - мнимая единица.

Решение рассматриваемой задачи строим в аналогичной форме. Подставив, например, $e^{\pm \lambda x} \sin \xi y$ в (10), получим алгебраическое уравнение, связывающее параметры λ и ξ :

$$\beta_3 \xi^4 + (\beta_5 - \beta_2 \lambda^2) \xi^2 + \beta_1 \lambda^4 - \beta_4 \lambda^2 = 0,$$

из которого следует, что каждому значению параметра $\pm \lambda$ соответствуют четыре значения ξ , которые можно записать в форме $\pm \xi_1(\lambda)$ и $\pm \xi_2(\lambda)$. Следовательно, частное решение уравнения (10), соответствующее, например, некоторому положительному значению λ , имеет вид

$$V_1^* = e^{\lambda x} (S_1 \sin \xi_1 y + C_1 \cos \xi_1 y + S_2 \sin \xi_2 y + C_2 \cos \xi_2 y),$$

где C_k, S_k - произвольные константы.

Положим, что все частные решения V_1^* и соответствующие им V_2^* , получаемые из (9), удовлетворяют однородным краевым условиям (5). Отсюда следует $S_1 = S_2 = 0$. Учитывая, что полученные частные решения справедливы и для $-\lambda$, частные решения уравнений (9) и (10) можно записать в виде

$$V_k^* = A \cdot Y^{(k)}(y) \operatorname{ch} \lambda x + B \cdot Y^{(k)}(y) \operatorname{ch} \lambda (x-l);$$

$$Y^{(1)}(y) = C_1 \cos \xi_1 y + C_2 \cos \xi_2 y, \quad Y^{(2)}(y) = C_1 \gamma_1 \cos \xi_1 y + C_2 \gamma_2 \cos \xi_2 y;$$

$$\gamma_k = 1 - \alpha_1 \lambda^2 + \alpha_1 \mu_1 \xi_k^2(\lambda),$$

где A, B - произвольные константы.

Перемещения U_3 также можно представить в виде $U_3 = W_3(x) + V_3(x, y)$ [6, 10], где $W_3(x)$ - линейная функция. Частные решения уравнения (3), удовлетворяющие условию $q_3|_{y=H} = 0$ (5), имеют вид

$$V_3^* = A^{(3)} Y^{(3)}(y) \operatorname{ch} \lambda x + B^{(3)} Y^{(3)}(y) \operatorname{ch} \lambda (x-l),$$

где $Y^{(3)}(y) = C_3 \cos \xi_3 (y-H)$; $\xi_3 = \lambda / \sqrt{\mu_2}$.

Вдоль границы области склейки $y = h$ перемещения U_2 и U_3 , а также соответствующие касательные напряжения одинаковы (7). Положим, что это условие выполняется точно. Отсюда следует, что линейные компоненты перемещений U_1 , U_2 и U_3 - одинаковы. Кроме того, условия сопряжения (7) и условие отсутствия касательных напряжений на боковой стороне накладки (5), записанные для частных решений V_1^* , V_2^* , V_3^* , приводят к системе

$$M \cdot \vec{C} = 0, \tag{11}$$

$$M = \begin{pmatrix} \gamma_1 \xi_1 \sin k_1 h & \gamma_2 \xi_2 \sin \xi_2 h & -\xi_3 \sin \xi_3 (h-H) \\ \gamma_1 \cos \xi_1 h & \gamma_2 \cos \xi_2 h & -\cos \xi_3 (h-H) \\ \xi_1 \sin \xi_1 h & \xi_2 \sin \xi_2 h & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

Система (11) имеет нетривиальное решение, если

$$\det M(\lambda) = 0. \tag{12}$$

Трансцендентное уравнение (12) имеет бесконечное число действительных корней λ_n . Обозначим $\xi_{k,n} = \xi_k(\lambda_n)$, $\gamma_{k,n} = \gamma_k(\lambda_n)$. Решение системы (11), а именно коэффициенты $C_{1,n}$, $C_{2,n}$ и $C_{3,n}$, соответствующие некоторому собственному числу λ_n , определяются с точностью до произвольного множителя. Для определенности и для облегчения анализа сходимости решения введем условие нормировки

$$\int_0^h [Y_n^{(1)}]^2 dx + \int_0^h [Y_n^{(2)}]^2 dx + \int_h^H [Y_n^{(3)}]^2 dx = 1. \tag{13}$$

Таким образом, общие решения уравнений (1) и (3) могут быть записаны в виде

$$U_k = A_0 x + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n X_n^{(1)}(x) + B_n X_n^{(2)}(x)] Y_n^{(k)}(y), \tag{14}$$

$$Y_n^{(1)} = C_{1,n} \cos \xi_{1,n} y + C_{2,n} \cos \xi_{2,n} y; \quad X_n^{(2)} = \frac{\text{ch } \lambda_n (x-l)}{\lambda_n \text{sh } \lambda_n l}; \quad X_n^{(1)} = \frac{\text{ch } \lambda_n x}{\lambda_n \text{sh } \lambda_n l};$$

$$Y_n^{(3)} = C_{3,n} \cos [\lambda_n \mu_2^{-0,5} (y-H)]; \quad Y_n^{(2)} = C_{1,n} \gamma_{1,n} \cos \xi_{1,n} y + C_{2,n} \gamma_{2,n} \cos \xi_{2,n} y.$$

Здесь $\lambda_n \text{sh } \lambda_n l$ в знаменателе - нормирующие множители; A_n и B_n - произвольные коэффициенты; коэффициенты $C_{k,n}$ определяются из системы (12) и соотношения (13).

Перемещения на участке 4 описываются уравнением (3). Поскольку на боковых сторонах этого участка краевые условия однородны (4), метод разделения переменных позволяет получить решение в виде

$$U_4 = a_0 x + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n X_n^{(3)}(x) + b_n X_n^{(4)}(x)] Y_n^{(4)}(y), \tag{15}$$

$$X_n^{(3)} = \frac{\text{ch } v_n (x-l)}{v_n \text{ch } v_n (L-l)}, \quad X_n^{(4)} = \frac{\text{ch } v_n (x-L)}{v_n \text{ch } v_n (L-l)}, \quad Y_n^{(4)} = \cos \frac{\pi n y}{H},$$

где a_0, b_0, a_n, b_n - произвольные коэффициенты; $v_n = \pi \sqrt{\mu_2} H^{-1} n$.

Перемещения (14) и (15) точно удовлетворяют краевым условиям вдоль боковых сторон областей. А условия (4), (6), (8) на торцах областей удовлетворяются приближенно, при помощи соответствующего выбора коэффициентов a_0, b_0, a_n, b_n и A_0, B_0, A_n, B_n .

Нормальные и касательные усилия в несущих слоях:

$$N_k = E_k \delta_k \left[A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n Z_n^{(1)} + B_n Z_n^{(2)} \right) Y_n^{(k)} \right], \quad q_k = G_k \delta_k \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n X_n^{(1)} + B_n X_n^{(2)} \right) \Psi_n^{(k)},$$

$$N_4 = E_2 \delta_2 \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n Z_n^{(3)} + b_n Z_n^{(4)} \right) Y_n^{(4)} \right], \quad Z_n^{(m)} = \frac{dX_n^{(m)}}{dx}, \quad m=1, \dots, 4; \quad k=1, 2, 3;$$

$$q_4 = G_2 \delta_2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n X_n^{(3)} + b_n X_n^{(4)} \right) \Psi_n^{(4)}, \quad \Psi_n^{(m)} = \frac{dY_n^{(m)}}{dy}.$$

Ограничим количество слагаемых в бесконечных суммах некоторым числом N , одинаковым для всех сумм (впрочем, это условие не является обязательным). Краевые условия (4), (6), (8) представляют собой систему из одиннадцати уравнений, которые можно записать в векторной форме:

$$A_0 \vec{H}_1 + B_0 \vec{H}_2 + a_0 \vec{H}_3 + b_0 \vec{H}_4 + \sum_{n=1}^N A_n \vec{f}_n^{(1)} + \sum_{n=1}^N B_n \vec{f}_n^{(2)} + \sum_{n=1}^N a_n \vec{f}_n^{(3)} + \sum_{n=1}^N b_n \vec{f}_n^{(4)} - \vec{R} = 0, \quad (16)$$

где

$$\kappa_n = \frac{1}{\lambda_n \operatorname{sh}(\lambda_n l)}, \quad \eta_n = \frac{1}{v_n \operatorname{sh} v_n (L-l)}, \quad \theta_n = \kappa_n \operatorname{ch}(\lambda_n l), \quad \chi_n = \eta_n \operatorname{ch} v_n (L-l);$$

$$\vec{H}_1 = (0; 0; 1; 1; 1; l; l; 1; 1; 0; 0)^T,$$

$$\vec{H}_2 = (0; 1; 0; 0; 0; 1; 1; 0; 0; 0; 0)^T,$$

$$\vec{H}_3 = (1; 0; 0; 0; 0; -l; -l; -1; -1; 0; 0)^T,$$

$$\vec{H}_4 = (0; 0; 0; 0; 0; -1; -1; 0; 0; 0; 0)^T,$$

$$\vec{R} = \left(\frac{P(y)}{E_2 \delta_2}; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0 \right)^T.$$

$$\vec{f}_n^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa_n Y_n^{(1)} \\ Y_n^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ \theta_n Y_n^{(2)} \\ \theta_n Y_n^{(3)} \\ Y_n^{(2)} \\ Y_n^{(3)} \\ \theta_n \Psi_n^{(2)} \\ \theta_n \Psi_n^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_n^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_n Y_n^{(1)} \\ 0 \\ -Y_n^{(2)} \\ -Y_n^{(3)} \\ \kappa_n Y_n^{(2)} \\ \kappa_n Y_n^{(3)} \\ 0 \\ 0 \\ \kappa_n \Psi_n^{(2)} \\ \kappa_n \Psi_n^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_n^{(3)} = \begin{pmatrix} Y_n^{(4)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\eta_n Y_n^{(4)} \\ -\eta_n Y_n^{(4)} \\ 0 \\ 0 \\ -\eta_n \Psi_n^{(4)} \\ -\eta_n \Psi_n^{(4)} \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_n^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\chi_n Y_n^{(4)} \\ -\chi_n Y_n^{(4)} \\ Y_n^{(4)} \\ Y_n^{(4)} \\ -\chi_n \Psi_n^{(4)} \\ -\chi_n \Psi_n^{(4)} \end{pmatrix};$$

Для поиска решения системы (16) используем метод ортогонализации невязки вектор-функциям \vec{H}_m и $\vec{f}_n^{(m)}$, $m=1, \dots, 4$; $n=1, \dots, N$. Скалярное произведение векторов представляет собой сумму интегралов от произведений компонент векторов, взятых на соответствующих интервалах:

$$(\vec{f}, \vec{g}) = \int_0^H f_1 g_1 dy + \int_0^h f_2 g_2 dy + \int_0^h f_3 g_3 dy + \int_0^h f_4 g_4 dy + \int_h^H f_5 g_5 dy + \\ + \int_0^h f_6 g_6 dy + \int_h^H f_7 g_7 dy + \int_0^h f_8 g_8 dy + \int_h^H f_9 g_9 dy + \int_0^h f_{10} g_{10} dy + \int_h^H f_{11} g_{11} dy,$$

где f_j, g_j – соответствующие компоненты некоторых вектор-функций \vec{f} и \vec{g} .

Ортогонализация (16) векторам \vec{H}_m и $\vec{f}_n^{(m)}$ приводит к системе линейных уравнений относительно коэффициентов $A_0, B_0, a_0, b_0, A_n, B_n$ и a_n, b_n . Абсолютные значения внедиагональных элементов матрицы полученной системы убывают и стремятся к нулю при удалении от главной диагонали. Численные расчеты показали, что для решения полученной системы допустим метод редукции, а найденные коэффициенты при увеличении N стабилизируются, и стремятся к соответствующим предельным значениям.

ЭКСПЕРИМЕНТ И МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Для проверки адекватности предложенной математической модели в лаборатории «Прочность» Национального аэрокосмического университета им. Н. Е. Жуковского «ХАИ» проведены тензометрические испытания склеенных алюминиевых пластинок. Размеры образцов, точки приклейки тензодатчиков, а также фотография одного из образцов показаны на рис. 2.

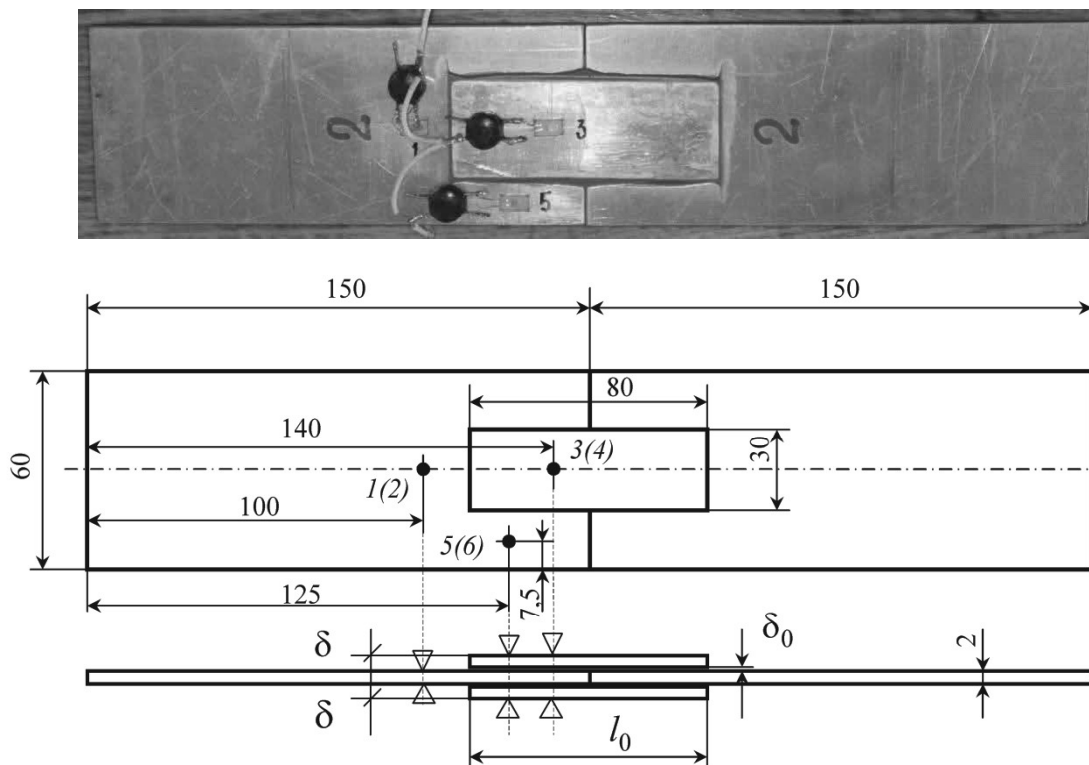


Рис. 2. Фотография и схема образца для испытаний

Было изготовлено три образца. Пластины для изготовления образцов вырезаны из листового материала АМг-6 толщиной 2 мм. Пластинки склеивались пленочным клеем ВК-36. Перед склеиванием проведены измерения толщины пластинок в нескольких местах, а после склеивания – измерения суммарной толщины пакета и определена толщина клея. Средние величины толщин пластинок $\delta = 1,856$ мм, толщина клея $\delta_0 = 0,076$ мм, длина клеевого слоя $2l = 79,67$ мм, ширина приклеенной накладки $2h = 29$ мм. На образцы с двух сторон в точках 1(2), 3(4), 5(6) приклеены тензорезисторы.

Для расчета НДС соединения использованы следующие параметры: $\delta_1 = 1,856$ мм, $\delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 0,5\delta = 0,928$ мм, $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = 71$ ГПа, $G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = 25$ ГПа, $\delta_0 = 0,0813$ мм (толщина клея), $G_0 = 0,6$ ГПа (модуль сдвига клея ВК-36), $h = 14,5$ мм, $H = 30$ мм, $l = 39,835$ мм, $L = 70$ мм (часть пластинки входит в губки разрывной машины).

Зависимость деформаций от нагрузки близка к линейной при нагрузке до 2000 кгс. Обусловлено это тем, что использованный для изготовления образцов алюминиевый сплав АМг-6 является высокопластичным, и при нагрузке около 2000 кгс напряжения в накладках достигают предела текучести.

На рис. 3 показаны графики зависимости напряжений в точках наклейки тензодатчиков, полученные с помощью предложенной математической модели (пунктирные линии) и полученные в результате проведенных экспериментов (сплошные линии). Для построения этих графиков использованы средние значения напряжений, определенных в результате проведенных экспериментов.

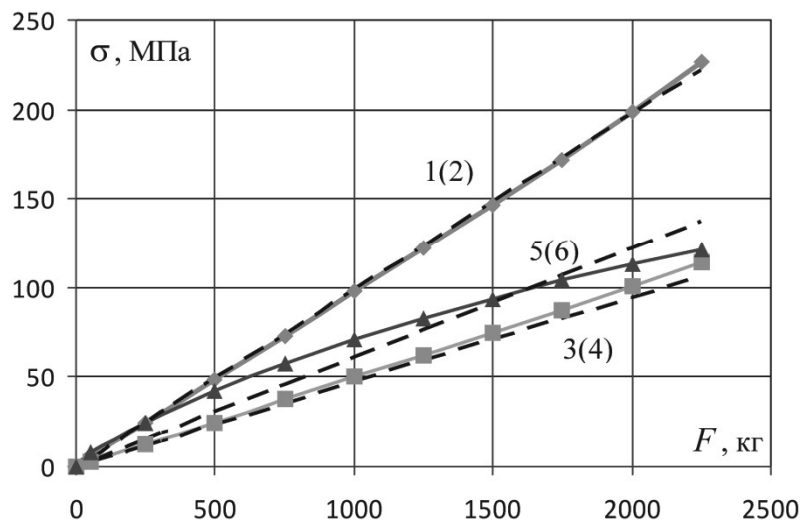


Рис. 3. Зависимость напряжений в местах наклейки тензорезисторов от нагрузки

Графики, изображенные на рис. 3, показывают, что полученные в результате теоретических расчетов и определенные экспериментально напряжения в местах наклейки тензодатчиков весьма близки. Это подтверждает адекватность предложенной математической модели и правильность построенного решения.

На рис. 4 показаны графики нормальных напряжений в широкой пластинке вдоль боковых сторон ($y = \pm H$) и вдоль оси $y = 0$ при растягивающей нагрузке $F = 1500$ кг, полученные с помощью предложенной модели.

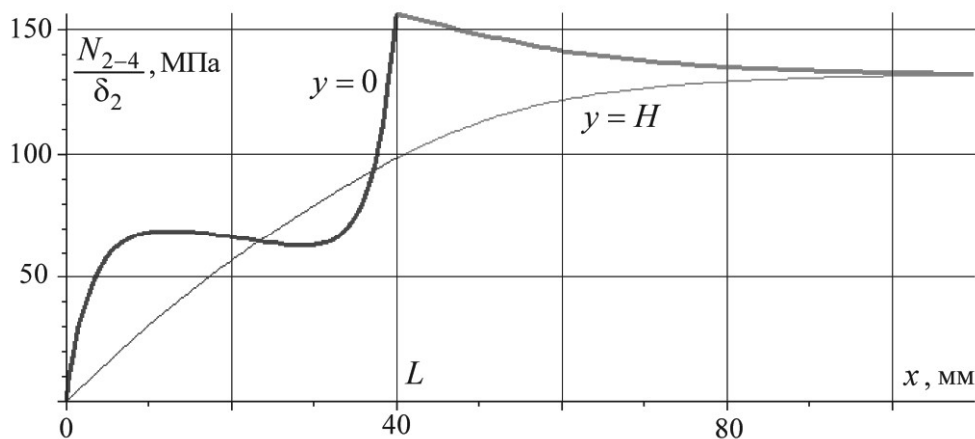


Рис. 4. Нормальные напряжения в широкой пластинке вдоль продольной оси и вдоль боковых сторон

Соответствующие касательные напряжения в клеевом слое (2) показаны на рис. 5. Поскольку соединение симметрично относительно продольной оси, на рисунке изображена половина области склейки, $y \geq 0$.

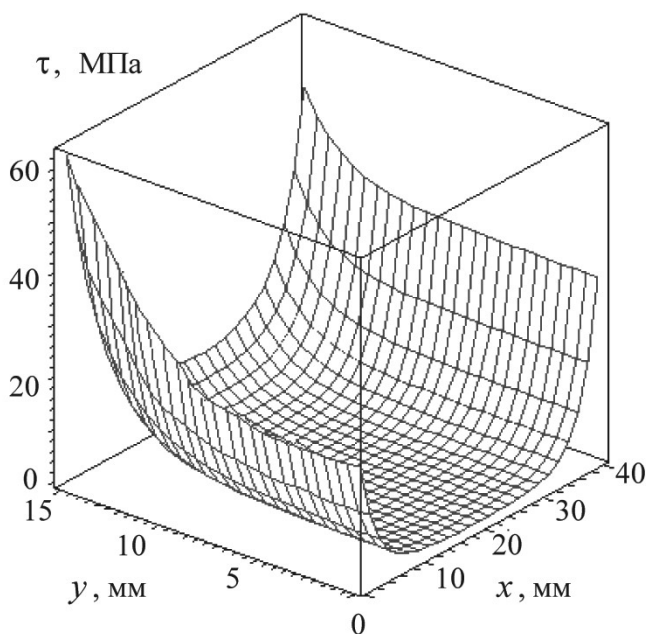


Рис. 5. Касательные напряжения в клее ($y \geq 0$) при нагрузке $F = 1500$ кгс

Выводы

Предложенная математическая модель соединения позволяет построить аналитические решения ряда новых задач о двумерном НДС склеенных пластинок различных линейных размеров при продольной нагрузке (например, задачи о НДС ремонтной накладки, НДС соединения с дефектом и т.д.).

Экспериментальные исследования показали высокую точность предложенной модели.

Классические одномерные модели не могут быть применены для расчета НДС соединения в случае существенного отличия ширины соединяемых слоев ввиду того, что напряжения в клее у бокового края склейки значительно превышают напряжения на продольной оси соединения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рябенков Н. Г., Артюхин Ю. П. Определение напряжений клея в соединении двух полубесконечных пластин. *Исслед. по теор. пластин и оболочек*. Изд-во Казанского ун-та, 1981. № 16. С. 82–90.
2. Kim H. S., Cho M., Lee J., Deheeger A., Grédiac M., Mathias J. D. Three dimensional stress analysis of a composite patch using stress functions. *Int. J. of Mechanical Sciences*. 2010. V. 52. P. 1646–1659.
3. Andruet R. H., Dillard D. A., Holzer S. M. Two- and three-dimensional geometrical nonlinear finite elements for analysis of adhesive joints. *Int. J. of Adhesion & Adhesives*. 2001. V. 21. P. 17–34.
4. Mortensen F., Thomsen O. T. Simplified linear and non-linear analysis of stepped and scarfed adhesive-bonded lap-joints between composite laminates. *Composite Structures*. 1997. Vol. 38, No. 1–4. P. 281–294.
5. Rapp P. Mechanics of adhesive joints as a plane problem of the theory of elasticity. Part II: Displacement formulation for orthotropic adherends. *Archives of civil and mechanical engineering*. 2015. № 15. P. 603–619.
6. Васильев В. В., Лурье С. А. О сингулярности решения в плоской задаче теории упругости для консольной полосы. *Изв. РАН. МТТ*. 2013. № 4. С. 40–49.
7. Kurenov S. S. A Simplified Two-Dimensional Model Of Adhesive Joints Nonuniform Load. *Mechanics of Composite Materials*. 2015. Vol. 51, Issue 4. P. 479–488.

8. Артюхин Ю. П. Напряжения в клеевых соединениях. *Исследования по теории пластин и оболочек*. К.: Изд-во КГУ, 1973. Вып. 10. С. 3–27.
9. da Silva L. F. M., das Neves P. J. C., Adams R. D., Spelt J. K. Analysis of Mixed Adhesive Bonded Joints Part I: Theoretical Formulation. *J. of Adhesion Science and Technology*. 2009. V. 23. Pp. 1–34.
10. Куреннов С. С., Танчик Е. В. Расчет напряженного состояния клеевого соединения прямоугольных пластинок разной ширины. *Вестник Московского авиационного института*. 2015. Т. 22, № 2. С. 162–169.

REFERENCES

1. Ryabenkov, N. G. & Artyuxin, Yu. P. (1981). Opredelenie napryazhenij kleya v soedinenii dvux polubeskonechnyx plastin. Issled. po teor. plastin i obolochek. Izd-vo Kazanskogo un-ta, No. 16, pp. 82-90.
2. Kim, H. S., Cho, M., Lee, J., Deheeger, A., Grédiac, M. & Mathias, J. D. (2010). Three dimensional stress analysis of a composite patch using stress functions. *Int. J. of Mech. Sc.*, Vol. 52, pp. 1646-1659.
3. Andruet, R. H., Dillard, D. A. & Holzer, S. M. (2001). Two- and three-dimensional geometrical nonlinear finite elements for analysis of adhesive joints. *Int. J. of Adhesion & Adhesives*, Vol. 21, pp. 17-34.
4. Mortensen, F. & Thomsen, O. T. (1997). Simplified linear and non-linear analysis of stepped and scarfed adhesive-bonded lap-joints between composite laminates. *Composite Structures*, Vol. 38, No. 1-4, pp. 281-294.
5. Rapp, P. (2015). Mechanics of adhesive joints as a plane problem of the theory of elasticity. Part II: Displacement formulation for orthotropic adherends. *Archives of civil and mechanical engineering*, No. 15, pp. 603-619.
6. Vasilev, V. V. & Lure, S. A. (2013). O singulyarnosti resheniya v ploskoj zadache teorii uprugosti dlya konsolnoj polosy. *Izv. RAN. MTT*, No. 4, pp. 40-49.
7. Kurennov, S. S. (2015). A Simplified Two-Dimensional Model Of Adhesive Joints Nonuniform Load. *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 51, Issue 4, pp. 479-488.
8. Artyuxin, Yu. P. (1973). Napryazheniya v kleevykh soedineniyax. Issledovaniya po teorii plastin i obolochek. Kazan: Izd-vo KGU. No. 10, pp. 3-27.
9. da Silva, L. F. M., das Neves, P. J. C., Adams, R. D. & Spelt, J. K. (2009). Analysis of Mixed Adhesive Bonded Joints Part I: Theoretical Formulation. *J. of Adhesion Science and Technology*, Vol. 23, pp. 1-34.
10. Kurennov, S. S. & Tanchik, E. V. (2015). Raschet napryazhennogo sostoyaniya kleeвого soedineniya pryamougolnykh plastinok raznoj shiriny. *Vestnik Moskovskogo aviacionnogo institute*, Issue. 22, No. 2, pp. 162-169.

УДК 539.3

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УСИЛЕННЫХ ПЕРЕКРЕСТНЫМИ СИСТЕМАМИ РЕБЕР И НАГРУЖЕННОЙ ОСЕВЫМИ СЖИМАЮЩИМИ СИЛАМИ ОРТОТРОПНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПРОТЕКАЮЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ

Латифов Ф. С., д. ф.-м. н., профессор, Гулиева З. М., докторант

*Азербайджанский архитектурно-строительный Университет,
ул. А. Султанова, 5, г. Баку, Аз. 1073/1, Азербайджан*

flatifov@mail.ru

В данной работе исследуется свободное колебание усиленных перекрестными системами ребер и нагруженные осевыми сжимающими силами ортотропной вязкоупругой цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью. Уравнение движения подкрепленной перекрестными системами ребер, нагруженной осевыми сжимающими силами ортотропной оболочки с движущейся жидкостью, получены на основе принципа стационарности действия Остроградского-Гамильтона. Построено частотное уравнение свободных колебаний, подкрепленное перекрестными системами ребер, нагруженной осевыми сжимающими силами ортотропной цилиндрической оболочки, заполненной покоящейся жидкостью и реализовано численно.

Ключевые слова: свободные колебания, оболочка, идеальная жидкость, напряжение, подкрепление, принцип вариации.