УДК 539.3

ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ОБОБЩЕННОЕ ПЛОСКОЕ ЭЛЕКТРОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ

Левада В. С., к. т. н., доцент, Левицкая Т. И., к. т. н., доцент,
Пожуева И. С., к. т. н., доцент, Хижняк В. К., к. ф.-м. н., доцент

Запорожский национальный технический университет,
ул. Жуковского, 64, м. Запорожье, 69063, Украина

tigr_lev@ukr.net

С применением преобразования Фурье обобщенных функций медленного роста, получена матрица фундаментальных решений системы уравнений, описывающих обобщенное плоское напряженное состояние пьезоэлектрической пластины. Элементы матрицы, представленные в замкнутом виде, выражены через элементарные функции.

Ключевые слова: пластина, матрица фундаментальных решений, обобщенные функции, электроупругость, пьезоэлектрическое напряжение, преобразование Фурье.

ПОБУДОВА МАТРИЦІ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ РОЗВ’ЯЗКІВ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ, ЩО ОПИСУЮТЬ УЗАГАЛЬНЕНИЙ ПЛОСКИЙ ЕЛЕКТРОПРУЖНИЙ СТАН П’ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОЇ ПЛАСТИНИ

Левада В. С., к. т. н., доцент, Левицька Т. І., к. т. н., доцент,
Пожуєва І. С., к. т. н., доцент, Хижняк В. К., к. ф.-м. н., доцент

Запорізький національний технічний університет,
вул. Жуковського, 64, м. Запоріжжя, 69063, Україна

tigr_lev@ukr.net

Із застосуванням перетворення Фур’є узагальнених функцій повільного росту, отримана матриця фундаментальних розв’язків системи рівнянь, що описують узагальнений плоский напружений стан п’єзоелектричної пластини. Елементи матриці, представлені в замкнутому вигляді, виражені через елементарні функції.

Ключові слова: пластина, матриця фундаментальних розв’язків, узагальнені функції, електропружність, п’єзоелектрична напруга, перетворення Фур’є.

CONSTRUCTION OF THE MATRIX OF FUNDAMENTAL SOLUTIONS OF THE SYSTEM OF EQUATIONS DESCRIBING THE GENERALIZED PLANE ELECTRICAL ELASTIC STATE OF THE PIEZOELECTRIC PLATE

Levada V. S., Ph.D. of Technical Science, Associate Proffessor,
Levitskaya T. I., Ph.D. of Technical Science, Associate Proffessor,
Pozhueva I. S., Ph.D. of Technical Science, Associate Proffessor,
Khizhnyak V. K., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Proffessor

Zaporizhzhya National Technical University,
Zhukovsky str., 64, Zaporozhye, 69063, Ukraine

tigr_lev@ukr.net

In constructing the matrix of fundamental solutions, the Fourier transform of the generalized slow growth functions is applied for both variables. Solving the obtained system of linear algebraic equations, we arrive at the need to solve an algebraic equation of sixth degree with real coefficients. This equation can have three variants of roots. Assuming that this solution is found, we obtain a solution of the original problem in Fourier images. When finding the inverse transformation with respect to one of the variables, the usual inverse Fourier transform is used. In order to obtain an inverse transformation with respect to another variable, it was necessary to regularize the resulting generalized functions. An exact solution of the problem is obtained. This solution is expressed in a closed form through elementary functions, which makes it possible to use it effectively.

Key words: plate, matrix of fundamental solutions, generalized functions, electroelasticity, piezoelectric stress, Fourier transform.

ВВЕДЕНИЕ

Пьезоэлектрические материалы, благодаря своим физико-механическим свойствам, нашли широкое применение в различных областях науки и техники. В работах [1, 2] изложены основы электроупругости. Рассмотрены методы решения отдельных задач. В плоских задачах электроупругости чаще всего используются методы ТФКП. Знание матрицы фундаментальных решений соответствующих уравнений позволяет свести краевые задачи к ГИУ, с последующим применением МГЭ. Построению этой матрицы с помощью интегрального преобразования Фурье посвящена данная работа.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается бесконечная пьезоэлектрическая пластина со срединной плоскостью XOY, которая является плоскостью упругоэлектрической симметрии. Пластина находится в обобщенном плоском электроупругом состоянии.

Зависимость между компонентами тензора напряжений, тензора деформаций, вектора напряженности электрического поля и вектора электрической индукции выражается следующим равенством:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ D_x \\ D_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} & -b_{11} & -b_{12} \\ c_{12} & c_{22} & c_{26} & -b_{21} & -b_{22} \\ c_{16} & c_{26} & c_{66} & -b_{31} & -b_{32} \\ b_{11} & b_{21} & b_{31} & a_{11} & a_{12} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ E_x \\ E_y \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где (E_x, E_y) – напряженность электрического поля; (D_x, D_y) – вектор электрической индукции; c_{ij} – коэффициенты упругости; b_{ij} – коэффициенты пьезоэлектричности; a_{ij} – коэффициенты диэлектрической проницаемости.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

где φ – потенциал электрического поля; u, v – перемещения в направлениях $0x$ и $0y$.

Приходим к следующей задаче: найти решение матричного уравнения

$$A \cdot G = E \cdot \delta(x) \cdot \delta(y), \tag{2}$$

где

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix};$$

$$A_{11} = c_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2c_{16}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad A_{12} = A_{21} = c_{16}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (c_{12} + c_{66})\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c_{26}\frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$A_{13} = A_{31} = b_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (b_{12} + b_{31})\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + b_{32}\frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad A_{22} = c_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2c_{26}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}; \tag{3}$$

$$A_{23} = A_{32} = b_{31}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (b_{32} + b_{21})\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + b_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad A_{33} = -a_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2a_{12}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - a_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$G(x, y)=\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix}$ – матрица фундаментальных решений; $E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\delta(x)$, $\delta(y)$ – дельта-функции Дирака.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

На первом этапе будем искать решение следующей задачи:

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}\cdot\delta(x)\cdot\delta(y). \quad (4)$$

Это уравнение описывает электроупругое состояние пластины, если в точке (0,0) заданы сосредоточенная объемная сила и сосредоточенный свободный электрический заряд.

Систему (4) будем рассматривать в пространстве Ś (обобщенных функций медленного роста), считая оператор $A\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ эллиптическим. Применим к (4) преобразование Фурье:

$$A(-i\lambda, -i\mu)\begin{bmatrix} \bar{\bar{u}}(\lambda,\mu) \\ \bar{\bar{v}}(\lambda,\mu) \\ \bar{\bar{\varphi}}(\lambda,\mu) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где

$$\left(\bar{\bar{u}}(\lambda,\mu), \bar{\bar{v}}(\lambda,\mu), \bar{\bar{\varphi}}(\lambda,\mu)\right)=\left(F\left[u(x,y)\right], F\left[v(x,y)\right], F\left[\varphi(x,y)\right]\right);$$

$$\Delta=\det A(-i\lambda,-i\mu)=N_1\mu^6+N_2\lambda\mu^5+N_3\lambda^2\mu^4+N_4\lambda^3\mu^3+N_5\lambda^4\mu^2+N_6\lambda^5\mu+N_7\lambda^6;$$

$$N_1=c_{66}c_{22}a_{22}+c_{66}b_{22}^2+c_{22}b_{32}^2-c_{26}^2a_{22}-2c_{26}b_{32}b_{22}.$$

Выражения для остальных коэффициентов N_i не приводим из-за громоздкости.

Далее находим определители

$$\Delta_1(\lambda, \mu)=\begin{vmatrix} F_1 & A_{12} & A_{13} \\ F_2 & A_{22} & A_{23} \\ F_3 & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2(\lambda, \mu)=\begin{vmatrix} A_{11} & F_1 & A_{13} \\ A_{21} & F_2 & A_{23} \\ A_{31} & F_3 & A_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3(\lambda, \mu)=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & F_1 \\ A_{21} & A_{22} & F_2 \\ A_{31} & A_{32} & F_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1=M_{11}\mu^4+M_{12}\lambda\mu^3+M_{13}\lambda^2\mu^2+M_{14}\lambda^3\mu+M_{15};$$

$$\Delta_2=M_{21}\mu^4+M_{22}\lambda\mu^3+M_{23}\lambda^2\mu^2+M_{24}\lambda^3\mu+M_{25};$$

$$\Delta_3=M_{31}\mu^4+M_{32}\lambda\mu^3+M_{33}\lambda^2\mu^2+M_{34}\lambda^3\mu+M_{35}, \quad (6)$$

где

$$M_{11}=F_1\left(-c_{22}a_{22}-b_{22}^2\right)+F_2\left(c_{26}a_{22}+b_{32}b_{22}\right)+F_3\left(c_{26}b_{22}-c_{22}b_{32}\right);$$

$$M_{12}=F_1\left(-2c_{26}a_{22}-2c_{22}a_{12}-2b_{21}b_{22}-2b_{32}b_{22}\right)+$$

$$+F_2\left(2c_{26}a_{12}+c_{12}a_{22}+c_{66}a_{22}+b_{12}b_{22}+b_{31}b_{22}+b_{32}b_{21}+b_{32}^2\right)+$$

$$+F_3\left(-c_{26}b_{32}+c_{26}b_{21}+c_{12}b_{22}+c_{66}b_{22}-c_{22}b_{12}-c_{22}b_{31}\right);$$

$$M_{13}=F_1\left(-c_{66}a_{22}-4c_{26}a_{12}-c_{22}a_{11}-2b_{31}b_{22}-2b_{21}b_{32}-2b_{21}b_{32}-b_{21}^2-b_{32}^2\right)+$$
$$+F_2\left(c_{26}a_{11}+2c_{12}a_{12}+2c_{66}a_{12}+c_{16}a_{22}+b_{11}b_{22}+b_{12}b_{21}+b_{12}b_{32}+b_{31}b_{21}+2b_{31}b_{32}\right)+$$
$$+F_3\left(-c_{26}b_{31}+c_{12}b_{32}+c_{12}b_{21}+c_{66}b_{21}+c_{16}b_{22}-2c_{26}b_{12}-c_{22}b_{11}\right);$$
$$M_{14}=F_1\left(-2c_{66}a_{12}-2c_{26}a_{11}-2b_{31}b_{32}-2b_{31}b_{21}\right)+$$
$$+F_2\left(c_{12}a_{11}+c_{66}a_{11}+2c_{16}a_{12}+b_{11}b_{21}+b_{11}b_{32}+b_{12}b_{31}+b_{31}^2\right)+$$
$$+F_3\left(c_{12}b_{31}+c_{16}b_{32}+c_{16}b_{21}-c_{66}b_{12}-2c_{26}b_{11}\right);$$
$$M_{15}=F_1\left(-c_{66}a_{11}-b_{31}^2\right)+F_2\left(c_{16}a_{11}+b_{11}b_{31}\right)+F_3\left(c_{16}b_{31}-c_{66}b_{11}\right);$$
$$M_{21}=F_1\left(c_{26}a_{22}b_{32}b_{22}\right)+F_2\left(-c_{66}a_{22}-b_{32}^2\right)+F_3\left(-c_{66}b_{22}+c_{26}b_{32}\right);$$
$$M_{22}=F_1\left(c_{12}a_{22}+c_{66}a_{22}+2c_{26}a_{12}+b_{31}b_{22}+b_{12}b_{22}+b_{32}^2+b_{32}b_{21}\right)+$$
$$+F_2\left(-2c_{16}a_{22}-2c_{66}a_{12}-2b_{12}b_{32}-2b_{31}b_{32}\right)+F_3\left(-2c_{16}b_{22}-c_{66}b_{21}+c_{12}b_{32}+c_{26}b_{12}+c_{26}b_{31}\right);$$
$$M_{23}=F_1\left(c_{16}a_{22}+2c_{12}a_{12}+2c_{66}a_{12}+c_{26}a_{11}+b_{11}b_{22}+2b_{31}b_{32}+b_{31}b_{21}+b_{12}b_{32}+b_{12}b_{21}\right)+$$
$$+F_2\left(-c_{11}a_{22}-4c_{16}a_{12}-c_{66}a_{11}-b_{12}^2-b_{31}^2-2b_{11}b_{32}-2b_{12}b_{31}\right)+$$
$$+F_3\left(-c_{11}b_{22}-c_{16}b_{32}-2c_{16}b_{21}+c_{12}b_{12}+c_{12}b_{31}+c_{66}b_{12}+c_{26}b_{11}\right);$$
$$M_{24}=F_1\left(2c_{16}a_{12}+c_{12}a_{11}+c_{66}a_{11}+b_{11}b_{32}+b_{11}b_{21}+b_{31}^2+b_{12}b_{31}\right)+$$
$$+F_2\left(-2c_{11}a_{12}-2c_{16}a_{11}-2b_{11}b_{12}-2b_{11}b_{31}\right)+$$
$$+F_3\left(-c_{11}b_{32}-c_{11}b_{21}-c_{16}b_{31}+c_{16}b_{12}+c_{12}b_{11}+c_{66}b_{11}\right);$$
$$M_{25}=F_1\left(c_{16}a_{11}+b_{11}b_{31}\right)+F_2\left(-c_{11}a_{11}-b_{11}^2\right)+F_3\left(-c_{11}b_{31}+c_{16}b_{11}\right);$$
$$M_{31}=F_1\left(c_{26}b_{22}-c_{22}b_{32}\right)+F_2\left(-c_{66}b_{22}+c_{26}b_{32}\right)+F_3\left(c_{66}c_{22}-c_{26}^2\right);$$
$$M_{32}=F_1\left(c_{12}b_{22}+c_{66}b_{22}+c_{26}b_{21}-c_{26}b_{32}-c_{22}b_{31}-c_{22}b_{12}\right)+$$
$$+F_2\left(-c_{66}b_{21}-2c_{16}b_{22}+c_{26}b_{31}+c_{12}b_{32}+c_{26}b_{12}\right)+F_3\left(2c_{16}c_{22}-2c_{12}c_{26}\right);$$
$$M_{33}=F_1\left(c_{16}b_{22}+c_{12}b_{21}+c_{12}b_{32}+c_{66}b_{21}-c_{26}b_{31}-c_{22}b_{11}-2c_{26}b_{12}\right)+$$
$$+F_2\left(-2c_{16}b_{21}-c_{16}b_{32}-c_{11}b_{22}+c_{12}b_{31}+c_{13}b_{12}+c_{66}b_{12}+c_{26}b_{11}\right)+$$
$$+F_3\left(c_{11}c_{22}+2c_{16}c_{26}-2c_{12}c_{66}-c_{12}^2\right);$$
$$M_{34}=F_1\left(c_{16}b_{21}+c_{16}b_{32}+c_{12}b_{31}-2c_{26}b_{11}-c_{66}b_{12}\right)+$$
$$+F_2\left(-c_{11}b_{21}-c_{12}b_{32}-c_{16}b_{31}+c_{16}b_{12}+c_{12}b_{11}+c_{66}b_{11}\right)+F_3\left(2c_{11}c_{26}-2c_{16}c_{12}\right);$$
$$M_{35}=F_1\left(c_{16}b_{31}-c_{66}b_{11}\right)+F_2\left(-c_{11}b_{31}+c_{16}b_{11}\right)+F_3\left(c_{11}c_{66}-c_{16}^2\right). \tag{7}$$

Решение уравнения (5) представляется в виде:

$$\overline{\overline{u}}(\lambda,\mu)=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad \overline{\overline{v}}(\lambda,\mu)=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad \overline{\overline{\varphi}}(\lambda,\mu)=\frac{\Delta_3}{\Delta}. \tag{8}$$

Выполняем обычное обратное преобразование Фурье по μ:

$$\left(\bar{u}(\lambda,y),\bar{v}(\lambda,y),\bar{\varphi}(\lambda,y)\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\bar{\bar{u}}(\lambda,\mu),\bar{\bar{v}}(\lambda,\mu),\bar{\bar{\varphi}}(\lambda,\mu)\right)\cdot e^{i\mu y}d\mu .$$

При этом, если

$$\left(g_1(\lambda,y),g_2(\lambda,y),g_3(\lambda,y)\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\bar{\bar{u}}(\lambda,\mu),\bar{\bar{v}}(\lambda,\mu),\bar{\bar{\varphi}}(\lambda,\mu)\right)\cdot e^{i\mu|y|}d\mu , \tag{9}$$

то

$$\left(\bar{u}(\lambda,y),\bar{v}(\lambda,y),\bar{\varphi}(\lambda,y)\right)=\left(g_1(-\lambda signy,y),g_2(-\lambda signy,y),g_3(-\lambda signy,y)\right).$$

Интеграл $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\bar{\bar{u}}(\lambda,\mu),\bar{\bar{v}}(\lambda,\mu),\bar{\bar{\varphi}}(\lambda,\mu)\right)\cdot e^{i\mu|y|}d\mu$ вычисляется с помощью вычетов.

Уравнение $\Delta=0$ относительно μ может иметь следующие выражения корней:

1. $\mu_{1,2}=\lambda\alpha_1\pm i|\lambda|\beta_1,\quad \mu_{3,4}=\lambda\alpha_2\pm i|\lambda|\beta_2,\quad \mu_{5,6}=\lambda\alpha_3\pm i|\lambda|\beta_3,\quad \lambda\in R,\quad \beta_1,\beta_2,\beta_3>0.$
2. $\mu_{1,2}=\lambda\alpha_1+i|\lambda|\beta_1,\quad \mu_{3,4}=\lambda\alpha_1-i|\lambda|\beta_1,\quad \mu_{5,6}=\lambda\alpha_2\pm i|\lambda|\beta_2,\quad \lambda\in R,\quad \beta_1,\beta_2>0.$
3. $\mu_{1,2,3}=\lambda\alpha+i|\lambda|\beta,\quad \mu_{4,5,6}=\lambda\alpha-i|\lambda|\beta,\quad \lambda\in R,\quad \beta>0.$ (10)

Для первого варианта корней получаем:

$$\begin{gathered}\bar{u}(\lambda,y)=\frac{1}{2|\lambda|N_1}\sum_{k=1}^{3}\frac{e^{-i\lambda y\alpha_k}e^{-|\lambda||y|\beta_k}}{\beta_kT_k}\Big[M_{11}\left(\left(\alpha_k^4-6\alpha_k^2\beta_k^2+\beta_k^4\right)Q_k+4\left(\alpha_k^3\beta_k-\alpha_k\beta_k^3\right)P_k\right)+\\
+M_{12}\left(\left(\alpha_k^3-3\alpha_k\beta_k^2\right)Q_k+\left(3\alpha_k^2\beta_k-\beta_k^3\right)P_k\right)+M_{13}\left(\left(\alpha_k^2-\beta_k^2\right)Q_k+2\alpha_k\beta_kP_k\right)+M_{14}\left(\alpha_kQ_k+\beta_kP_k\right)+M_{15}Q_k\Big]+\\
+\frac{1}{2|\lambda|^2N_1}\sum_{k=1}^{3}\frac{e^{-i\lambda y\alpha_k}e^{-|\lambda||y|\beta_k}(-i\lambda)sign(y)}{\beta_kT_k}\Big[M_{11}\left(\left(-\alpha_k^4+6\alpha_k^2\beta_k^2-\beta_k^4\right)P_k+4\left(\alpha_k^3\beta_k-\alpha_k\beta_k^3\right)Q_k\right)+\\
+M_{12}\left(\left(3\alpha_k\beta_k^2-\alpha_k^3\right)P_k+\left(3\alpha_k^2\beta_k-\beta_k^3\right)Q_k\right)+M_{13}\left(\left(\beta_k^2-\alpha_k^2\right)P_k+2\alpha_k\beta_kQ_k\right)+\\
+M_{14}\left(\beta_kQ_k-\alpha_kP_k\right)-M_{15}P_k\Big],\end{gathered} \tag{11}$$

где

$$\begin{gathered}P\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)=2\left(2\alpha_1^3\beta_1-3\alpha_1^2\alpha_2\beta_1+\alpha_1\alpha_2^2\beta_1-2\alpha_1\beta_1^3+\alpha_1\beta_1\beta_2^2-3\alpha_1^2\alpha_3\beta_1+\right.\\
\left.+4\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1-\alpha_2^2\alpha_3\beta_1+\alpha_3\beta_1^3-\alpha_3\beta_1\beta_2^2+\alpha_1\alpha_3^2\beta_1+\alpha_1\beta_1\beta_3^2-\alpha_2\alpha_3^2\beta_1+\alpha_2\beta_1^2-\alpha_2\beta_1\beta_3^2\right);\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}Q\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)=\alpha_1^4-2\alpha_1^3\alpha_3+\alpha_1^2\alpha_3^2-6\alpha_1^2\beta_1^2+\alpha_1^2\beta_3^2-2\alpha_1^3\alpha_2+4\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3-2\alpha_1\alpha_2\alpha_3^2+\\
+6\alpha_1\alpha_2\beta_1^2-2\alpha_1\alpha_2\beta_3^2+\alpha_1^2\alpha_2^2-2\alpha_1\alpha_2^2\alpha_3+\alpha_2^2\alpha_3^2-\alpha_2^2\beta_1^2+\alpha_2^2\beta_3^2+6\alpha_1\alpha_3\beta_1^2-\alpha_3^2\beta_1^2+\\
+\beta_1^4-\beta_1^2\beta_3^2+\alpha_1^2\beta_2^2-2\alpha_1\alpha_3\beta_2^2+\alpha_3^2\beta_2^2-\beta_1^2\beta_2^2+\beta_2^2\beta_3^2-4\alpha_2\alpha_3\beta_1^2;\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}P_1=P\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3\right);\quad P_2=P\left(\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3,\beta_2,\beta_1,\beta_3\right);\quad P_3=P\left(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_3,\beta_2,\beta_1\right);\\
P_4=P\left(\alpha_2,\alpha_1,\alpha_1,\beta_2,\beta_1,\beta_1\right);\quad Q_1=Q\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3\right);\quad Q_2=Q\left(\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3,\beta_2,\beta_{21},\beta_3\right);\\
Q_3=Q\left(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_3,\beta_2,\beta_1\right);\quad Q_4=Q\left(\alpha_2,\alpha_1,\alpha_1,\beta_2,\beta_1,\beta_1\right);\end{gathered}$$

$$T_k=P_k^2+Q_k^2.$$

Для второго варианта корней:

$$\bar{u}(\lambda, y) = \frac{e^{-i\lambda y\alpha_1} e^{-|\lambda||y|\beta_1}}{4|\lambda|\beta_1^3 HN_1}\left[M_{11}(f_1R + f_2S) + M_{12}(f_3R + f_4S) + M_{13}(f_5R + f_6S) + M_{14}(f_7R + f_8S) + \right.$$

$$\left. + M_{15}(f_9R + f_{10}S)\right] - \frac{e^{-i\lambda y\alpha_1} e^{-|\lambda||y|\beta_1}(-i\lambda)\, sign(y)}{4|\lambda|^2 \beta_1^3 HN_1}\left[M_{11}(-f_1S + f_2R) + M_{12}(-f_3S + f_4R) + \right.$$

$$\left. + M_{13}(-f_5S + f_6R) + M_{14}(-f_7S + f_8R) + M_{15}(-f_9S + f_{10}R)\right] - \frac{e^{-i\lambda y\alpha_1} e^{-|\lambda||y|\beta_1}|y|}{4\beta_1^2 HN_1}\left[M_{11}(f_{11}R + f_{12}S) + \right.$$

$$\left. + M_{12}(f_{13}R + f_{14}S) + M_{13}(f_{15}R + f_{16}S) + M_{14}(f_{17}R + f_{18}S) + M_{15}(f_{19}R + f_{20}S)\right] -$$

$$- \frac{e^{-i\lambda y\alpha_1} e^{-|\lambda||y|\beta_1}(-i\lambda)\, y}{4|\lambda|\beta_1^2 HN_1}\left[M_{11}(-f_{11}S + f_{12}R) + M_{12}(-f_{13}S + f_{14}R) + M_{13}(-f_{15}S + f_{16}R) + \right.$$

$$\left. + M_{14}(-f_{17}S + f_{18}R) + M_{15}(-f_{19}S + f_{20}R)\right] +$$

$$+ \frac{e^{-i\lambda y\alpha_2} e^{-|\lambda||y|\beta_2}}{2|\lambda|\beta_2 T_4}\left[M_{11}\left(\left(\alpha_2^4 - 6\alpha_2^2\beta_2^2 + \beta_2^4\right)Q_4 + 4\left(\alpha_2^3\beta_2 - \alpha_2\beta_2^3\right)P_4\right) + \right.$$

$$+ M_{12}\left(\left(\alpha_2^3 - 3\alpha_2\beta_2^2\right)Q_4 + \left(3\alpha_2^2\beta_2 - \beta_2^3\right)P_4\right) + M_{13}\left(\left(\alpha_2^2 - \beta_2^2\right)Q_4 + 2\alpha_2\beta_2 P_4\right) +$$

$$\left. + M_{14}(\alpha_2 Q_4 + \beta_2 P_4) + M_{15} Q_4\right] +$$

$$+ \frac{e^{-i\lambda y\alpha_2} e^{-|\lambda||y|\beta_2}(-i\lambda)\, sign(y)}{2|\lambda|^2 \beta_2 T_4 N_1}\left[M_{11}\left(\left(-\alpha_2^4 + 6\alpha_2^2\beta_2^2 - \beta_2^4\right)P_4 + 4\left(\alpha_2^3\beta_2 - \alpha_2\beta_2^3\right)Q_4\right) + \right.$$

$$+ M_{12}\left(\left(3\alpha_2\beta_2^2 - \alpha_2^3\right)P_4 + \left(3\alpha_2^2\beta_2 - \beta_2^3\right)Q_4\right) + M_{13}\left(\left(\beta_2^2 - \alpha_2^2\right)P_4 + 2\alpha_2\beta_2 Q_4\right) +$$

$$\left. + M_{14}(-\alpha_2 P_4 + \beta_2 Q_4) - M_{15} P_4\right]. \qquad (12)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$R = \alpha_1^4 + 6\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^4 + \beta_1^4 + \beta_2^4 - 4\alpha_1^3\alpha_2 - 6\alpha_1^2\beta_1^2 + 2\alpha_1^2\beta_2^2 - 4\alpha_1\alpha_2^3 + 12\alpha_1\alpha_2\beta_1^2 - 4\alpha_1\alpha_2\beta_2^2 -$$

$$- 6\alpha_2^2\beta_1^2 + 2\alpha_2^2\beta_2^2 - 2\beta_1^2\beta_2^2;$$

$$S = 4\left(\alpha_1^3\beta_1 - 3\alpha_1^2\alpha_2\beta_1 + 3\alpha_1\alpha_2^2\beta_1 - \alpha_2^3\beta_1 - \alpha_1\beta_1^3 + \alpha_2\beta_1^3 + \alpha_1\beta_1\beta_2^2 - \alpha_2\beta_1\beta_2^2\right);$$

$$H = R^2 + S^2;$$

$$f_1 = 5\alpha_1^4\beta_1^2 + 5\alpha_1^2\beta_1^4 + 4\alpha_1^3\alpha_2\beta_1^2 - 14\alpha_1\alpha_2\beta_1^4 - 6\alpha_1^2\alpha_2^2\beta_1^2 + 3\alpha_2^2\beta_1^4 - \beta_1^6 - 6\alpha_1^2\beta_1^2\beta_2^2 + 3\beta_1^4\beta_2^2 -$$

$$- \alpha_1^6 + 2\alpha_1^5\alpha_2 - \alpha_1^4\alpha_2^2 - \alpha_1^4\beta_2^2;$$

$$f_2 = -4\alpha_1^5\beta_1 + 4\alpha_1^4\alpha_2\beta_1 + 16\alpha_1^2\alpha_2\beta_1^3 - 8\alpha_1\alpha_2^2\beta_1^3 +$$

$$+ 4\alpha_1\beta_1^4 + 4\alpha_1^3\beta_2^3 - 8\alpha_1\beta_1^3\beta_2^2 - 4\alpha_2\beta_1^5 - 4\alpha_1^3\beta_1\beta_2^2;$$

$$f_3 = 6\alpha_1^3\beta_1^2 - 3\alpha_1\alpha_2^2\beta_1^2 - \alpha_1\beta_1^4 - 3\alpha_1\beta_1^2\beta_2^2 - 2\alpha_2\beta_1^4 - \alpha_1^5 + 2\alpha_1^4\alpha_2 - \alpha_1^3\alpha_2^2 - \alpha_1^3\beta_2^2;$$

$$f_4 = -4\alpha_1^4\beta_1 + 4\alpha_1^2\beta_1^3 + 4\alpha_1^3\alpha_2\beta_1 + 4\alpha_1\alpha_2\beta_1^3 - 2\alpha_2^2\beta_1^3 - 2\beta_1^3\beta_2^2;$$

$$f_5 = 6\alpha_1^2\beta_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2\beta_1^2 - \alpha_2^2\beta_1^2 - \beta_1^4 - \beta_1^2\beta_2^2 - \alpha_1^4 + 2\alpha_1^3\alpha_2 - \alpha_1^2\alpha_2^2 - \alpha_1^2\beta_2^2;$$

$$f_6 = -4\alpha_1^3\beta_1 + 4\alpha_1^2\alpha_2\beta_1 + 4\alpha_1\beta_1^3; \quad f_7 = 5\alpha_1\beta_1^2 - 2\alpha_2\beta_1^2 - \alpha_1^3 + 2\alpha_1^2\alpha_2 - \alpha_1\alpha_2^2 - \alpha_1\beta_2^2;$$

$$f_8=-4\alpha_1^2\beta_1+4\alpha_1\alpha_2\beta_1+2\beta_1^3;\quad f_9=-\alpha_1^2+2\alpha_1\alpha_2-\alpha_2^2+3\beta_1^2-\beta_2^2;\quad f_{10}=-4\alpha_1\beta_1+4\alpha_2\beta_1;$$

$$f_{11}=-\alpha_1^6+15\alpha_1^4\beta_1^2-15\alpha_1^2\beta_1^4+2\alpha_1^5\alpha_2-20\alpha_1^3\alpha_2\beta_1^2+10\alpha_1\alpha_2\beta_1^4-\alpha_1^4\alpha_2^2+$$
$$+6\alpha_1^2\alpha_2^2\beta_1^2-\alpha_2^2\beta_1^4+\beta_1^6-\alpha_1^4\beta_2^2+6\alpha_1^2\beta_1^2\beta_2^2-\beta_1^4\beta_2^2;$$

$$f_{12}=-6\alpha_1^5\beta_1^2+20\alpha_1^3\beta_1^3+10\alpha_1^4\alpha_2\beta_1-20\alpha_1^2\alpha_2\beta_1^3-4\alpha_1^3\alpha_2^2\beta_1+4\alpha_1\alpha_2^2\beta_1^3-6\alpha_1\beta_1^5-4\alpha_1^3\beta_1\beta_2^2+$$
$$+4\alpha_1\beta_1^2\beta_2^2+2\alpha_2\beta_1^5;$$

$$f_{13}=-\alpha_1^5+10\alpha_1^3\beta_1^2+2\alpha_1^4\alpha_2-12\alpha_1^2\alpha_2\beta_1^2-\alpha_1^3\alpha_2^2+$$
$$+3\alpha_1\alpha_2^2\beta_1^2-5\alpha_1\beta_1^4-\alpha_1^3\beta_2^2+3\alpha_1\beta_1^2\beta_2^2+2\alpha_2\beta_1^4;$$

$$f_{14}=-5\alpha_1^4\beta_1+\alpha_1^2\beta_1^3+8\alpha_1^3\alpha_2\beta_1-8\alpha_1\alpha_2\beta_1^3-$$
$$-3\alpha_1^2\alpha_2^2\beta_1+\alpha_2^2\beta_1^3+9\alpha_1^2\beta_1^3-\beta_1^5-3\alpha_1^2\beta_1\beta_2^2+\beta_1^3\beta_2^2;$$

$$f_{15}=-\alpha_1^4+6\alpha_1^2\beta_1^2+2\alpha_1^3\alpha_2-6\alpha_1\alpha_2\beta_1^2-\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_2^2\beta_1^2-\beta_1^4-\alpha_1^2\beta_2^2+\beta_1^2\beta_2^2;$$

$$f_{16}=-4\alpha_1^3\beta_1+6\alpha_1^2\alpha_2\beta_1-2\alpha_1\alpha_2^2\beta_1+4\alpha_1\beta_1^3-2\alpha_1\beta_1\beta_2^2-2\alpha_2^2\beta_1^3;$$

$$f_{17}=-\alpha_1^3+2\alpha_1^2\alpha_2-\alpha_1\alpha_2^2+3\alpha_1\beta_1^2-\alpha_1\beta_2^2-2\alpha_2\beta_1^2;$$

$$f_{18}=-\alpha_1^2\beta_1+2\alpha_1\alpha_2\beta_1-\alpha_2^2\beta_1+\beta_1^3-\beta_1\beta_2^2+2\alpha_1\beta_1^2-2\alpha_2\beta_1^2;$$

$$f_{19}=-\alpha_1^2+2\alpha_1\alpha_2-\alpha_2^2+\beta_1^2-\beta_2^2;\quad f_{20}=2\left(-\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_1\right).$$

Для третьего варианта корней получаем:

$$\bar{u}(\lambda,y)=\frac{e^{-i\lambda y\alpha}e^{-|\lambda||y|\beta}|y|}{16\beta^4N_1}\Big[M_{11}\left(30\alpha^2\beta^2-9\beta^4-\alpha^4\right)+$$
$$+M_{12}\left(15\alpha\beta^2-\alpha^3\right)+M_{13}\left(5\beta^2-\alpha^2\right)+M_{14}\alpha-M_{15}\Big]+$$
$$+\frac{e^{-i\lambda y\alpha}e^{-|\lambda||y|\beta}y(-i\lambda)}{16|\lambda|\beta^3N_1}\Big[M_{11}\left(-12\alpha^3+28\alpha\beta^2\right)+M_{12}\left(-9\alpha^2+7\beta^2\right)+6M_{13}\alpha-3M_{14}\Big]+$$
$$+\frac{e^{-i\lambda y\alpha}e^{-|\lambda||y|\beta}|\lambda|y^2}{16\beta^3N_1}\Big[M_{11}\left(\alpha^4-6\alpha^2\beta^2+\beta^4\right)+M_{12}\left(\alpha^3-3\alpha\beta^2\right)+M_{13}\left(\alpha^2-\beta^2\right)+M_{14}\alpha+M_{15}\Big]+$$
$$+\frac{e^{-i\lambda y\alpha}e^{-|\lambda||y|\beta}y|y|(-i\lambda)}{16\beta^2N_1}\Big[M_{11}\left(4\alpha^3-4\alpha\beta^2\right)+M_{12}\left(3\alpha^2-\beta^2\right)+2M_{13}\alpha+M_{14}\Big]+$$
$$+\frac{e^{-i\lambda y\alpha}e^{-|\lambda||y|\beta}}{16|\lambda|\beta^5N_1}\Big[M_{11}\left(37\alpha^2\beta^2-3\beta^4-3\alpha^4\right)+$$
$$+M_{12}\left(21\alpha\beta^2-3\alpha^3\right)+M_{13}\left(7\beta^2-3\alpha^2\right)-3M_{14}\alpha-3M_{15}\Big]+$$
$$+\frac{e^{-i\lambda y\alpha}e^{-|\lambda||y|\beta}(-i\lambda)\,sign(y)}{8|\lambda|^2\beta^4N_1}\Big[M_{11}12\left(\alpha\beta^2-\alpha^3\right)+3M_{12}\left(\beta^2-3\alpha^2\right)-6M_{13}\alpha-3M_{14}\Big].\tag{13}$$

Для нахождения $u(x,y)$ используем результаты [3]:

$$F^{-1}\left[\frac{e^{-a|\lambda|}}{|\lambda|}\right]_{(x)}=-\frac{1}{\pi}\ln\sqrt{a^2+x^2};\quad F^{-1}\left[\frac{e^{-a|\lambda|}}{|\lambda|^2}\right]=-\frac{1}{\pi}a\ln\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a}{\pi}-\frac{x}{\pi}arctg\frac{x}{a};$$

$$F^{-1}\left[-i\lambda\frac{e^{-a|\lambda|}}{|\lambda|^2}\right]=-\frac{1}{\pi}arctg\frac{x}{a};\quad F^{-1}\left[-i\lambda\frac{e^{-a|\lambda|}}{|\lambda|}\right]=-\frac{x}{\pi\left(a^2+x^2\right)};$$

$$F^{-1}\left[e^{-a|\lambda|}\right]=\frac{a}{\pi\left(a^2+x^2\right)};\quad F^{-1}\left[e^{-a|\lambda|}|\lambda|\right]=\frac{a^2-x^2}{\pi\left(a^2+x^2\right)^2};$$

$$F^{-1}\left[-i\lambda e^{-a|\lambda|}\right]=-\frac{2ax}{\pi\left(a^2+x^2\right)^2}. \tag{14}$$

Используя (14), получаем:

– первый вариант корней

$$u(x,y)=-\frac{1}{4\pi N_1}\sum_{i=1}^{3}\frac{\ln\left(y^2\beta_i^2+\left(x+\alpha_i y\right)^2\right)}{\beta_i T_i}\Big[M_{11}\left(\left(\alpha_1^4-6\alpha_i^2\beta_i^2+\beta_i^4\right)Q_i+\right.$$
$$\left.+4\left(\alpha_i^3\beta_i-\alpha_i\beta_i^3\right)P_i\right)+M_{12}\left(\left(\alpha_i^3-3\alpha_i\beta_i^2\right)Q_i+\left(3\alpha_i^2\beta_i-\beta_i^3\right)P_i\right)+$$
$$+M_{13}\left(\left(\alpha_i^2-\beta_i^2\right)Q_i+2\alpha_i\beta_iP_i\right)+M_{14}\left(\alpha_iQ_i+\beta_iP_i\right)+M_{15}Q_i\Big]-$$
$$-\frac{1}{2\pi N_1}\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\beta_iT_i}arctg\frac{x+\alpha iy}{\beta iy}\Big[M_{11}\left(\left(-\alpha_i^4+6\alpha_i^2\beta_i^2-\beta_i^4\right)P_i+4\left(\alpha_i^3\beta_i-\alpha_i\beta_i^3\right)Q_i\right)+$$
$$+M_{12}\left(\left(3\alpha_i\beta_i-\alpha_i^3\right)P_i+\left(3\alpha_i^2\beta_i-\beta_i^3\right)Q_i\right)+M_{13}\left(\left(3\beta_i^2-\alpha_i^2\right)P_i+2\alpha_i\beta_iQ_i\right)+$$
$$+M_{14}\left(-\alpha_iP_i+\beta_iQ_i\right)-M_{15}P_i\Big]; \tag{15}$$

– второй вариант корней

$$u(x,y)=-\frac{\ln\left(y^2\beta_2^2+\left(x+\alpha_2y\right)^2\right)}{4\pi N_1\beta_2T_4}\Big[M_{11}\left(\left(\alpha_2^4-6\alpha_2^2\beta_2^2+\beta_2^4\right)Q_4+4\left(\alpha_2^3\beta_2-\alpha_2\beta_2^3\right)P_4\right)+$$
$$+M_{12}\left(\left(\alpha_2^3-3\alpha_2\beta_2^2\right)Q_4+\left(3\alpha_2^2\beta_2-\beta_2^3\right)P_4\right)+M_{13}\left(\left(\alpha_2^3-\beta_2^2\right)Q_4+\right.$$
$$\left.+2\alpha_2\beta_2P_4\right)+M_{14}\left(\alpha_2Q_4+\beta_2P_4\right)+M_{15}Q_4\Big]-$$
$$-\frac{1}{2\pi N_1\beta_2T_4}arctg\frac{x+\alpha_2y}{\beta_2y}\Big[M_{11}\left(\left(-\alpha_2^4+6\alpha_2^2\beta_2^2-\beta_2^4\right)P_4+4\left(\alpha_2^3\beta_2-\alpha_2\beta_2^3\right)Q_4\right)+$$
$$+M_{12}\left(\left(3\alpha_2\beta_2^2-\alpha_2^3\right)P_4+\left(3\alpha_2^2\beta_2-\beta_2^3\right)Q_4\right)+M_{13}\left(\left(\beta_2^2-\alpha_2^2\right)P_4+2\alpha_2\beta_2Q_4\right)+$$
$$+M_{14}\left(-\alpha_2P_4+\beta_2Q_4\right)-M_{15}P_4\Big]+$$
$$+\frac{\ln\left(y^2\beta_1^2+\left(x+\alpha_1y\right)^2\right)}{8\pi N_1\beta_1^3H}\Big[M_{11}\left(f_1R+f_2S\right)+M_{12}\left(f_3R+f_4S\right)+M_{13}\left(f_5R+f_6S\right)+$$
$$+M_{14}\left(f_7R+f_8S\right)+M_{15}\left(f_9R+f_{10}S\right)\Big]+$$
$$+\frac{1}{4\pi N_1\beta_1^3H}arctg\frac{x+\alpha_1y}{\beta_1y}\Big[M_{11}\left(-f_1S+f_2R\right)+M_{12}\left(-f_3S+f_4R\right)+M_{13}\left(-f_5S+f_6R\right)+$$

$$+M_{14}\left(-f_7S+f_8R\right)+M_{15}\left(-f_9S+f_{10}R\right)\Big]-$$

$$-\frac{y^2}{4\pi N_1\beta_1 H\left(\beta_1^2y^2+(x+\alpha_1y)^2\right)}\Big[M_{11}\left(f_{11}R+f_{12}S\right)+M_{12}\left(f_{13}R+f_{14}S\right)+M_{13}\left(f_{15}R+f_{16}S\right)+$$

$$+M_{14}\left(f_{17}R+f_{18}S\right)+M_{15}\left(f_{19}R+f_{20}S\right)\Big]+\frac{y\left(x+\alpha_1y\right)}{4\pi N_1\beta_1^2 H\left(\beta_1^2y^2+\left(x+\alpha_1y\right)^2\right)}\Big[M_{11}\left(-f_{11}S+f_{12}R\right)+$$

$$+M_{12}\left(-f_{13}S+f_{14}R\right)+M_{13}\left(-f_{15}S+f_{16}R\right)+M_{14}\left(-f_{17}S+f_{18}R\right)+M_{15}\left(-f_{19}S+f_{20}R\right)\Big]; \quad (16)$$

– третий вариант корней

$$u\left(x,y\right)=\frac{y^2}{16\pi N_1\beta^3\left(\beta^2y^2+\left(x+\alpha y\right)^2\right)}\Big[M_{11}\left(30\alpha^2\beta^2-\right.$$

$$\left.-9\beta^4-\alpha^4\right)+M_{12}\left(15\alpha\beta^2-\alpha^3\right)+M_{13}\left(5\beta^2-\alpha^2\right)-M_{14}\alpha-M_{15}\Big]-$$

$$-\frac{y\left(x+\alpha y\right)}{16\pi N_1\beta^3\left(\beta^2y^2+\left(x+\alpha y\right)^2\right)}\Big[M_{11}\left(-12\alpha^3+28\alpha\beta^2\right)+M_{12}\left(-9\alpha^2+7\beta^2\right)-6M_{13}\alpha-3M_{14}\Big]+$$

$$+\frac{y^2\left(\beta^2y^2-\left(x+\alpha y\right)^2\right)}{16\pi N_1\beta^3\left(\beta^2y^2+\left(x+\alpha y\right)^2\right)^2}\Big[M_{11}\left(\alpha^4-6\alpha^2\beta^2+\beta^4\right)+$$

$$+M_{12}\left(\alpha^3-3\alpha\beta^2\right)+M_{13}\left(\alpha^2-\beta^2\right)+M_{14}\alpha+M_{15}\Big]-$$

$$-\frac{y^3\left(x+\alpha y\right)}{8\pi N_1\beta\left(\beta^2y^2+\left(x+\alpha y\right)^2\right)^2}\Big[M_{11}\left(4\alpha^3-4\alpha\beta^2\right)+M_{12}\left(3\alpha^2-\beta^2\right)+2M_{13}\alpha+M_{14}\Big]-$$

$$-\frac{\ln\left(y^2\beta^2+\left(x+\alpha y\right)^2\right)}{32\pi N_1\beta^5}\Big[M_{11}\left(37\alpha^2\beta^2-3\beta^4-3\alpha^4\right)+$$

$$+M_{12}\left(21\alpha\beta^2-3\alpha^3\right)+2M_{13}\left(7\beta^2-3\alpha^2\right)-3M_{14}\alpha-3M_{15}\Big]-$$

$$-\frac{1}{8\pi N_1\beta^4}arctg\frac{x+\alpha y}{\beta y}\Big[M_{11}12\left(\alpha\beta^2-\alpha^3\right)+3M_{12}\left(\beta^2-3\alpha^2\right)-6M_{13}\alpha-3M_{14}\Big]. \quad (17)$$

Выражение для $v\left(x,y\right)$ получается из (15-17) заменой M_{11}, M_{12}, M_{14}, M_{15} на M_{21}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, M_{25}, соответственно. А выражение $\varphi\left(x,y\right)$ получается из (15-17) заменой M_{11}, M_{12}, M_{14}, M_{15} на M_{31}, M_{32}, M_{33}, M_{34}, M_{35}, соответственно.

Теперь можно получить решение (2):

$$G_{11}=u\left(x,y\right)\Big|_{F_1=1,F_2=0,F_3=0},\quad G_{21}=v\left(x,y\right)\Big|_{F_1=1,F_2=0,F_3=0},\quad G_{31}=\varphi\left(x,y\right)\Big|_{F_1=1,F_2=0,F_3=0},$$

$$G_{12}=u\left(x,y\right)\Big|_{F_1=0,F_2=1,F_3=0},\quad G_{22}=v\left(x,y\right)\Big|_{F_1=0,F_2=1,F_3=0},\quad G_{32}=\varphi\left(x,y\right)\Big|_{F_1=0,F_2=1,F_3=0},$$

$$G_{31}=u\left(x,y\right)\Big|_{F_1=0,F_2=0,F_3=1},\quad G_{32}=v\left(x,y\right)\Big|_{F_1=0,F_2=0,F_3=1},\quad G_{33}=\varphi\left(x,y\right)\Big|_{F_1=0,F_2=0,F_3=1}.$$

При этом $G_{12}=G_{21}$, $G_{13}=G_{31}$, $G_{23}=G_{32}$.

ВЫВОДЫ

При нахождении матрицы фундаментальных решений было применено преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста по обеим переменным. В процессе исследования возникла необходимость решения алгебраического уравнения шестой степени с действительными коэффициентами. Это уравнение может иметь три варианта корней. Предполагая, что его решение найдено, было получено решение исходной задачи в изображениях Фурье. При нахождении обратного преобразования по одной из переменных применялось обычное обратное преобразование Фурье. Для получения обратного преобразования по другой переменной потребовалась регуляризация полученных обобщенных функций. Получено точное решение поставленной задачи. Это решение выражено в замкнутом виде через элементарные функции, что позволяет эффективно его использовать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Механика связанных полей в элементах конструкций: Электроупругость. Киев: Наук. думка, 1989. 280 с.
2. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. Москва: Наука, 1988. 472 с.
3. Левада В. С. К применению преобразования Фурье для построения фундаментального решения эллиптического дифференциального оператора. Запорожье, 1987. Деп. в Укр. НИИНТИ, № 706. Ук-87.

REFERENCES

1. Grinchenko, V. T., Ulitko, A. F. & Shulga, N. A. (1989). Mechanics of coupled fields in structural elements: Electroelasticity. Kiev: Naukova dumka.
2. Parton, V. Z. & Kudryavtsev, B. A. (1988). Electromagnetoelasticity of piezoelectric and electrically conductive bodies. Moskow: Nauka.
3. Levada, V. S. (1987). To the application of the Fourier transform for constructing a fundamental solution of an elliptic differential operator. Manuscript. Zaporozhye. Dep. in the NIINTI, no. 706, Uk-87.

УДК 519.71

ПРОГРАММНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ОТДЕЛЬНОГО КЛАССА СЛОЖНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ. НЕПРЕРЫВНЫЙ СЛУЧАЙ

Леонтьева В. В., к. ф.-м. н., доцент, Кондратьева Н. А., к. ф.-м. н., доцент

Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина

vleonteva15@gmail.com, n-kondr@mail.ru

В работе осуществляется анализ и определение программных управлений движением отдельного класса сложных динамических систем, поведение которых описывается разомкнутыми непрерывными математическими моделями с ограничениями, обеспечивающими получение неотрицательных решений на бесконечном интервале времени. Для исследуемых систем решена обратная задача динамики и получены программные управления движением систем, определяющие желаемые состояния объекта. По результатам исследования проведен вычислительный эксперимент, результаты которого соответствуют результатам проведенных в работе теоретических исследований.

Ключевые слова: программное управление, позитивная динамическая система балансового типа, позитивные переменные, разомкнутая непрерывная динамическая модель, векторно-матричное дифференциальное уравнение, продуктивность матрицы, асимптотическая устойчивость решений.

ПРОГРАМНЕ КЕРУВАННЯ РУХОМ ОКРЕМОГО КЛАСУ СКЛАДНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ. НЕПЕРЕРВНИЙ ВИПАДОК

Леонтьєва В. В., к. ф.-м. н., доцент, Кондрат'єва Н. О., к. ф.-м. н., доцент