

6. Nykolyshyn, M. M., Opanasovych, V. V. & Kurotchyn, L. R. (2006). Double-tensile stretch of a piecewise homogeneous isotropic plate with a crack on the straight line of the separation of materials, taking into account the plastic zones near their vertices. *Prykl. problemy mekh. i mat.*, Iss. 4, pp. 101-108.
7. Nykolyshyn, M. M., Opanasovych, V. V., Kurotchyn, L. R. & Slobodyan, M. S. (2012). Double-tensile stretch of a piecewise homogeneous isotropic plate with a straight-line boundary between the materials and a non-cross-sectional crack in it, taking into account the plastic zones at its vertices. *Visnyk L'viv. un-tu. Seriya mekh.-mat.*, Iss. 72, pp. 29-45.
8. Muskhelishvili, N. I. (1966). *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. Moscow: Nauka.
9. Gradshteyn, I. S. & Ryzhik, I. M. (1971). *Tables of integrals, sums, series and products*. Moscow: Nauka.

УДК 393.3

ПРО ПІДХІД ДО ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПЛАСТИНИ З ОТВОРАМИ ТА ПРЯМОЛІНІЙНОЮ НАСКРІЗНОЮ ТРИЩИНОЮ

Опанасович В. К., д. ф.-м. н., професор, Слободян М. С., к. ф.-м. н., доцент,
Ярема Є. Б., аспірант

*Львівський національний університет ім. Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна*

kafmech@franko.lviv.ua, slob@yandex.ru, evhenkozak@mail.ru

У роботі запропоновано підхід до дослідження напружено-деформованого стану пластини з прямолінійною наскрізною тріщиною та двома отворами довільної форми, яка знаходиться під дією однорідного поля зусиль на нескінченності. Використовуючи методи теорії функцій комплексної змінної та комплексні потенціали Колосова-Мухелішвілі, розв'язок задачі зведено до сингулярних інтегральних рівнянь на отворах, а на берегах прямолінійної тріщини крайові умови задовольняються аналітично. Проведено числовий аналіз коефіцієнтів інтенсивності напружень, який подано графічно, при різних значеннях параметрів задачі, коли отвори мають форму круга, еліпса та прямокутника, а в часткових випадках отримано відомі результати.

Ключові слова: пластина, прямолінійна тріщина, криволінійні отвори, комплексні потенціали, коефіцієнти інтенсивності напружень.

О ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИНЫ С ОТВЕРСТИЯМИ И ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ СКВОЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Опанасович В. К., д. ф.-м. н., професор, Слободян Н. С., к. ф.-м. н., доцент,
Ярема Е. Б., аспірант

*Львовский национальный университет им. Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, г. Львов, 79000, Украина*

kafmech@franko.lviv.ua, slob@yandex.ru, evhenkozak@mail.ru

В работе предложен подход к исследованию напряженно-деформированного состояния пластины с прямолинейной сквозной трещиной и двумя отверстиями произвольной формы, которая находится под действием однородного поля усилий на бесконечности. Используя методы теории функций комплексного переменного и комплексные потенциалы Колосова-Мухелішвілі, решение задачи сведено к сингулярным интегральным уравнениям на отверстиях, а на берегах прямолинейной трещины краевые условия удовлетворяются аналитически. Проведен численный анализ коэффициентов интенсивности напряжений, который представлен графически, при различных значениях параметров задачи, когда отверстия имеют форму круга, эллипса и прямоугольника, а в частных случаях получены известные результаты.

Ключевые слова: пластина, прямолинейная трещина, криволинейные отверстия, комплексные потенциалы, коэффициенты интенсивности напряжений.

ABOUT APPROACH TO THE STUDY OF STRESS-STRAIN STATE OF THE PLATE WITH HOLES AND STRAIGHT-THROUGH CRACK

Opanasovich V. K., D. Sc. in Physics and Maths., professor,
Slobodyan M. S., Ph. D. in Physics and Maths., associate professor, Yarema Y. B., postgraduate

*Ivan Franko National University of Lviv,
1, Universytetska St., Lviv, 79000, Ukraine*

kafmech@franko.lviv.ua, slob@yandex.ru, evhenkozak@mail.ru

Plate structural elements are widely used in various industries and technology. From structural considerations they may contain holes of different shapes. In the operation they may turn up cracks that significantly reduce the permissible load, resulting in reduced structural strength.

In this paper we investigate the biaxial tensile plate with two holes of arbitrary shape, and one straight-through crack, which are free from external loads.

In most operations, which deals with the problem of this type of solution was reduced to integral equations on the holes and on the crack. In this paper, using methods of the theory of complex variable and complex potentials Kolosov-Muskhelishvili, $\Phi(z)$ and $\Psi(z)$, which looks like:

$$\Phi(z) = \Gamma + \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi(z) = \Gamma' + \Psi_1(z) + \Psi_2(z),$$

where Γ and Γ' – known constants associated with stress stain at infinity.

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{g(u) du}{u-z}, \quad \Psi_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \left[\frac{\overline{g(u)} d\bar{u}}{u-z} + \frac{\bar{u}g(u) du}{(u-z)^2} \right],$$

$g(u)$ – finding function on the holes L_1 , to determine which obtained on L_1 singular integral equations, functions $\Phi_2(z)$ and $\Psi_2(z)$, responsible for the crack is found on the basis of linear conjugation problems that solved analytically.

Integral equations solved numerical and conducted a numerical analysis of stress intensity factors, which presented graphically for different values of parameters of the problem when the holes are in the shape of a circle, ellipse and rectangle.

Key words: plate, rectilinear crack, curved holes, complex potentials, stress intensity factors.

ВСТУП

Пластинчасті елементи конструкцій широко використовуються в машинобудуванні та інших галузях промисловості. Вони з конструктивних міркувань можуть містити отвори, а в процесі експлуатації в них можуть виникнути тріщини, які різко знижують діапазон допустимого навантаження. Тому важливо знати, як такі дефекти впливають на міцність та довговічність конструкцій. Дослідженням напруженого стану тонкостінних елементів конструкцій, які містять тріщини і отвори, займалось чимало дослідників, що відображено в монографіях [1-8] та довідниках [9, 10]. Переважно в більшості робіт розв'язування задач з такими дефектами зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь як на отворах, так і на тріщинах, розв'язування яких будувалось числово з використанням відповідних квадратурних формул.

В нашій роботі досліджено напружено-деформований стан пластинчастого елемента конструкцій за наявності в ньому двох гладких отворів довільної форми та прямолінійної наскрізної тріщини, які вільні від зовнішнього навантаження, а на нескінченності пластина знаходиться під дією рівномірно розподіленого поля зусиль. Використовуючи методи теорії функцій комплексної змінної та комплексні потенціали, розв'язок задачі зведено до сингулярних інтегральних рівнянь на криволінійних отворах, а на берегах прямолінійної тріщини крайові умови задовольняються аналітично. Проведено числовий аналіз коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) при різних значеннях параметрів задачі для кругових, еліптичних та прямокутних отворів, а в часткових випадках отримано числові результати, які наведено в науковій літературі.

ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Дослідимо напружено-деформований стан пластини з двома криволінійними отворами та прямолінійною наскрізною тріщиною завдовжки $2l$. Тріщина та отвори вільні від зовнішнього навантаження. Крім того, на нескінченності пластини знаходиться під дією рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю p_1 і p_2 , які є взаємно перпендикулярні, причому зусилля p_1 утворює кут α з віссю симетрії тріщини.

Уведемо в дослідження декартову систему координат Oxy з початком координат у центрі тріщини, направивши вісь Ox вздовж неї. З L'_j отвором зв'язуємо локальну систему координат $O_jx'_jy'_j$, ($j=1,2$), з початком координат O_j в середині отвору із координатами c_j і d_j , причому вісь $O_jx'_j$ утворює кут β_j з віссю (див. рис. 1). Лінію, де розміщена тріщина, позначимо через L , а межу отворів – через $L_1 = \tilde{L}'_1 + \tilde{L}'_2$.

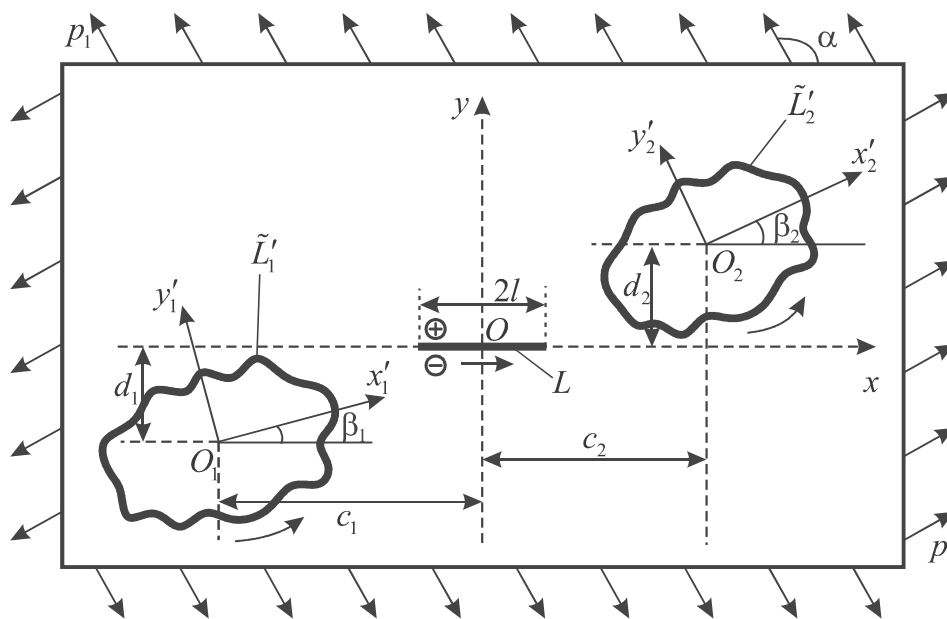


Рис. 1. Схема розміщення отворів, тріщини та навантаження

Згідно з формулюванням задачі, маємо такі крайові умови:

$$\sigma_{yy}^{\pm}(x) - i\sigma_{xy}^{\pm}(x) = 0, \quad x \in L, \tag{20}$$

$$N(t_j) + iT(t_j) = 0, \quad t_j \in \tilde{L}'_j, \quad (j=1,2), \tag{21}$$

де σ_{yy} , σ_{xy} – компоненти тензора напружень у декартовій системі координат Oxy , N і T – відповідно нормальна та дотична компонента зовнішнього навантаження на L_1 , значками «+» та «-» позначено граничне значення відповідної величини при прямуванні точки площини до лінії справа і зліва по відношенню до заданого напрямку, що вказано на рис. 1.

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ

Уведемо в дослідження комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$. Тоді для визначення компонент тензора напружень σ_{yy} і σ_{xy} та нормальної N і дотичної T складової напруження на L_1 будемо мати співвідношення [11]:

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}, \tag{22}$$

$$N + iT = \Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + \frac{dt}{dt} \left[t \overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)} \right], \quad t \in L_1. \quad (23)$$

Надалі криволінійні отвори замінюємо криволінійними тріщинами L'_j того самого обрису, що й отвір з малою відстанню між вершинами.

Комплексні потенціали $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ подамо у вигляді:

$$\Phi(z) = \Gamma + \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi(z) = \Gamma' + \Psi_1(z) + \Psi_2(z), \quad (24)$$

де функції $\Phi_1(z)$ і $\Psi_1(z)$, згідно з [1], подамо так:

$$\Phi_1(z) = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{L'_k} \frac{g_k(u) du}{u-z}, \quad \Psi_1(z) = -\sum_{k=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{L'_k} \left[\frac{\overline{g_k(u) d\bar{u}}}{u-z} + \frac{\bar{u} g_k(u) du}{(u-z)^2} \right], \quad (25)$$

$g_k(u)$ – шукані функції, $z = x + iy$, $i^2 = -1$, функції $\Phi_2(z)$ і $\Psi_2(z)$ – голоморфні поза прямолінійною тріщиною,

$$\Gamma = \frac{1}{4}(p+q), \quad \Gamma' = -\frac{1}{2}(p-q)e^{-2i\alpha},$$

крім того, має місце залежність:

$$\int_{L'_k} g_k(u) du = 0, \quad (26)$$

що визначає собою однозначність переміщень при обході контура криволінійної тріщини.

Уведемо в дослідження функцію:

$$\Omega_2(z) = \overline{\Phi_2(z)} + z \overline{\Phi_2'(z)} + \overline{\Psi_2(z)}, \quad (27)$$

де $\overline{\Phi(z)} = \Phi(\bar{z})$, $\bar{z} = x - iy$.

Урахувавши (5) і (8), залежність (3) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi_2(z) + \Omega_2(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi_2'(z)} + \Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)} + \\ + z \overline{\Phi_1'(z)} + \overline{\Psi_1(z)} + 2\Gamma + \bar{\Gamma}'. \end{aligned} \quad (28)$$

На основі (1) можемо записати:

$$\left(\sigma_{yy}(x) - i\sigma_{xy}(x) \right)^+ - \left(\sigma_{yy}(x) - i\sigma_{xy}(x) \right)^- = 0, \quad x \in L. \quad (29)$$

Якщо врахувати (9), то (10) можемо подати так:

$$\left(\Phi_2(x) - \Omega_2(x) \right)^+ - \left(\Phi_2(x) - \Omega_2(x) \right)^- = 0, \quad x \in L. \quad (30)$$

Розв'язавши задачу лінійного спряження (11) та врахувавши поведінку функцій $\Phi_2(z)$ і $\Psi_2(z)$ при великих $|z|$, одержимо:

$$\Phi_2(z) = \Omega_2(z). \quad (31)$$

З крайової умови (1) отримаємо:

$$\left(\sigma_{yy}(x) - i\sigma_{xy}(x) \right)^+ + \left(\sigma_{yy}(x) - i\sigma_{xy}(x) \right)^- = 0, \quad x \in L. \quad (32)$$

Якщо врахувати (9), (6) і (12), (13), можемо отримати:

$$\Phi_2^+(x) + \Phi_2^-(x) = f(x), \quad x \in L, \tag{33}$$

де

$$f(x) = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \left\{ \overline{g_k(u_k)} \left[\frac{1}{u_k - x} + \frac{x}{(\overline{u_k} - x)^2} - \frac{u_k}{(\overline{u_k} - x)^2} \right] d\overline{u_k} - \right. \\ \left. - g_k(u_k) \left[\frac{1}{u_k - x} + \frac{1}{\overline{u_k} - x} \right] du_k \right\} - 2\Gamma - \overline{\Gamma}'. \tag{34}$$

Розв'язавши задачу лінійного спряження (14) та врахувавши поведінку функції $\Phi_2(z)$ при великих $|z|$, одержимо:

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_L \frac{f(x) X^+(x) dx}{x - z}, \tag{35}$$

де

$$X(z) = \sqrt{z^2 - l^2}. \tag{36}$$

Оскільки мають місце залежності [11]:

$$\int_L \frac{X^+(x) dx}{x - z} = \pi i (X(z) - z), \quad \int_L \frac{X^+(x) dx}{(x - z)^2} = \pi i \left(\frac{z}{X(z)} - 1 \right), \tag{37}$$

то функція $\Phi_2(z)$ (16), урахувавши (18), набуде вигляду:

$$\Phi_2(z) = - \left(\Gamma + \frac{\overline{\Gamma}'}{2} \right) \left(1 - \frac{z}{X(z)} \right) - \sum_{k=1}^2 \frac{1}{4\pi i X(z)} \int_{L_k} \left\{ g_k(u_k) \left[\frac{X(z) - X(u_k)}{u_k - z} + \frac{X(z) - X(\overline{u_k})}{\overline{u_k} - z} \right] du_k - \right. \\ \left. - \overline{g_k(u_k)} \left[\frac{(\overline{u_k} - u_k)}{(\overline{u_k} - z)} \left(\frac{X(z) - X(\overline{u_k})}{\overline{u_k} - z} + \frac{\overline{u_k}}{X(\overline{u_k})} \right) \right] d\overline{u_k} \right\}. \tag{38}$$

Визначивши функцію $\overline{\Psi_2(z)}$ із залежності (8) та врахувавши (5), формулу (4) можна подати так:

$$N + iT = \Phi_1(t_j) + \overline{\Phi_1(t_j)} + \frac{dt_j}{dt_j} \left[t_j \overline{\Phi_1'(t_j)} + \overline{\Psi_1(t_j)} \right] + \Phi_2(t_j) + \frac{dt_j}{dt_j} \Phi_2(t_j) + \\ + \left(1 - \frac{dt_j}{dt_j} \right) \overline{\Phi_2(t_j)} + (t_j - \overline{t_j}) \frac{dt_j}{dt_j} \overline{\Phi_2'(t_j)} + 2\Gamma + \frac{dt_j}{dt_j} \overline{\Gamma}', \quad t_j \in L_1. \tag{39}$$

З крайової умови (2) отримаємо:

$$(N(t_j) - iT(t_j))^+ + (N(t_j) - iT(t_j))^- = 0, \quad t_j \in L'_j. \tag{40}$$

Беручи до уваги (20), (19), (6), з (21) одержимо систему двох сингулярних інтегральних рівнянь для знаходження шуканих функцій $g_1(u_1)$ та $g_2(u_2)$:

$$\sum_{k=1}^2 \int_{L'_k} \left[g_k(u_k) K_{kj}(u_k, t_j) du_k + \overline{g_k}(u_k) M_{kj}(u_k, t_j) d\overline{u}_k \right] = \rho_j(t_j), \quad t_j \in L'_j, \quad (j=1,2), \quad (41)$$

де

$$\rho_j(t_j) = -\Gamma \left[\frac{t_j}{X(t_j)} + \frac{\overline{t}_j}{X(t_j)} - (t_j - \overline{t}_j) \frac{d\overline{t}_j}{dt_j} \frac{l^2}{X(t_j)(\overline{t}_j^2 - l^2)} \right] - \overline{\Gamma}' \left[\frac{d\overline{t}_j}{dt_j} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t_j}{X(t_j)} \right) - \left(1 - \frac{\overline{t}_j}{X(t_j)} \right) \frac{1}{2} \frac{d\overline{t}_j}{dt_j} \right] + \frac{1}{2} \Gamma' \left[\left(1 - \frac{d\overline{t}_j}{dt_j} \right) \left(1 - \frac{\overline{t}_j}{X(t_j)} \right) + (t_j - \overline{t}_j) \frac{d\overline{t}_j}{dt_j} \frac{l^2}{X(t_j)(\overline{t}_j^2 - l^2)} \right], \quad (42)$$

$$K_{kj}(u_k, t_j) = \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{u_k - t_j} + \frac{d\overline{t}_j}{dt_j} \frac{1}{u_k - \overline{t}_j} \right] - \frac{1}{4\pi i} \left\{ \frac{1}{X(t_j)} \left[\frac{X(t_j) - X(u_k)}{u_k - t_j} + \frac{X(t_j) - \overline{X}(u_k)}{u_k - \overline{t}_j} \right] + \frac{1}{X(t_j)} \frac{d\overline{t}_j}{dt_j} \left[\frac{X(t_j) - X(u_k)}{u_k - \overline{t}_j} + \frac{X(t_j) - \overline{X}(u_k)}{u_k - \overline{t}_j} \right] + \frac{1}{X(t_j)} \left\{ \left(1 - \frac{d\overline{t}_j}{dt_j} \right) \frac{u_k - \overline{u}_k}{u_k - \overline{t}_j} \times \left(\frac{X(t_j) - X(u_k)}{u_k - \overline{t}_j} + \frac{u_k}{X(u_k)} \right) - (t_j - \overline{t}_j) \frac{d\overline{t}_j}{dt_j} \left[\frac{\overline{t}_j}{(\overline{t}_j^2 - l^2)} \frac{u_k - \overline{u}_k}{u_k - \overline{t}_j} \left(\frac{X(t_j) - X(u_k)}{u_k - \overline{t}_j} + \frac{u_k}{X(u_k)} \right) - \frac{u_k - \overline{u}_k}{(u_k - \overline{t}_j)^2} \left(\frac{2(X(t_j) - X(u_k))}{u_k - \overline{t}_j} + \frac{\overline{t}_j}{X(t_j)} + \frac{u_k}{X(u_k)} \right) \right] \right\} \right\}, \quad (43)$$

$$M_{kj}(u_k, t_j) = -\frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{u_k - t_j} + \frac{d\overline{t}_j}{dt_j} \frac{t_j - u_k}{(\overline{u}_k - \overline{t}_j)^2} \right] + \frac{1}{4\pi i} \left\{ \frac{1}{X(t_j)} \frac{\overline{u}_k - u_k}{u_k - \overline{t}_j} \left(\frac{X(t_j) - \overline{X}(u_k)}{u_k - \overline{t}_j} + \frac{\overline{u}_k}{X(u_k)} \right) + \frac{1}{X(t_j)} \left\{ \frac{d\overline{t}_j}{dt_j} \frac{\overline{u}_k - u_k}{u_k - \overline{t}_j} \left(\frac{\overline{u}_k}{X(u_k)} + \frac{X(t_j) - \overline{X}(u_k)}{u_k - \overline{t}_j} \right) + \left(1 - \frac{d\overline{t}_j}{dt_j} \right) \left(\frac{X(t_j) - \overline{X}(u_k)}{u_k - \overline{t}_j} + \frac{\overline{X}(t_j) - X(u_k)}{u_k - \overline{t}_j} \right) + (t_j - \overline{t}_j) \frac{d\overline{t}_j}{dt_j} \left[\frac{1}{u_k - \overline{t}_j} \left(\frac{X(t_j) - \overline{X}(u_k)}{u_k - \overline{t}_j} + \frac{\overline{t}_j}{X(t_j)} \right) + \frac{1}{u_k - \overline{t}_j} \left(\frac{\overline{t}_j}{X(t_j)} + \frac{X(t_j) - X(u_k)}{u_k - \overline{t}_j} \right) - \frac{\overline{t}_j}{\overline{t}_j^2 - l^2} \left(\frac{X(t_j) - \overline{X}(u_k)}{u_k - \overline{t}_j} + \frac{\overline{X}(t_j) - X(u_k)}{u_k - \overline{t}_j} \right) \right] \right\} \right\}. \quad (44)$$

КІН знайдемо за формулою [9]:

$$k_1^\pm - ik_2^\pm = 2 \lim_{x \rightarrow \pm l} \left[\sqrt{2\pi|x \mp l|} \Phi_2(x) \right]. \quad (45)$$

Узявши до уваги (5), (6), (19), (17), залежність (26) набуде вигляду:

$$k_1^\pm - ik_2^\pm = 2\sqrt{\pi}l \left\{ \left(\Gamma + \frac{\bar{\Gamma}'}{2} \right) \pm \frac{1}{4\pi il} \int_{L'_k} \left\{ 2g_k(u_k) \operatorname{Re} \left[\frac{X(u_k)}{u_k \mp l} \right] du_k - \right. \right. \\ \left. \left. - \overline{g_k(u_k)} \left[\frac{2 \operatorname{Im}(u_k)}{(u_k \mp l)} \left(\frac{\bar{u}_k}{X(u_k)} - \frac{\overline{X(u_k)}}{u_k \mp l} \right) \right] d\bar{u}_k \right\} \right\}. \quad (46)$$

Нехай у системі координат $O_k x'_k y'_k$ рівняння лінії \tilde{L}'_k задається рівнянням $t'_j = x'_j + iy'_j = \omega_j(\theta_j) = \tilde{\omega}_j(e^{i\theta_j})$, $0 < \theta_j \leq 2\pi$, де функція $\tilde{\omega}_j(\xi_j)$ конформно відображає зовнішність одиничного кола на зовнішність контура \tilde{L}'_k у цій системі координат. Тоді рівняння контура \tilde{L}'_k у системі координат Oxy буде мати вигляд:

$$t_j(\theta_j) = z_j + e^{i\beta_j} \omega_j(\theta_j), \quad 0 < \theta_j \leq 2\pi, \quad z_j = c_j + id_j, \quad (47)$$

$$u_k(v_k) = z_k + e^{i\beta_k} \omega_k(v_k), \quad 0 < v_k \leq 2\pi, \quad (48)$$

В інтегральному рівнянні (22) робимо заміни (28) і (29), у результаті отримуємо:

$$\sum_{k=1}^2 \int_0^{2\pi-\delta} \left[\tilde{g}_k(v_k) \tilde{K}_{kj}(v_k, \theta_j) dv_k + \overline{\tilde{g}_k(v_k)} \tilde{M}_{kj}(v_k, \theta_j) dv_k \right] = \tilde{\rho}_j(\theta_j), \quad 0 \leq \theta_j \leq 2\pi - \delta, \quad (49)$$

де

$$\tilde{K}_{kj}(v_k, \theta_j) = K_{kj}(u_k(v_k), t_j(\theta_j)), \quad \tilde{M}_{kj}(v_k, \theta_j) = M_{kj}(u_k(v_k), t_j(\theta_j)), \\ \tilde{\rho}_j(\theta_j) = \rho_j(t_j(\theta_j)), \quad \tilde{g}_k(v_k) = g_k(u_k(v_k)) \omega'_k(v_k), \quad (50)$$

δ – параметр, який характеризує малу відстань між вершинами тріщин.

Рівняння (31) доповнимо умовою:

$$\int_0^{2\pi-\delta} \tilde{g}_k(v_k) dv_k = 0. \quad (51)$$

Систему інтегральних рівнянь (30), (32) розв'язуємо числово за допомогою методу механічних квадратур [2], зробивши в них відповідні заміни та перейшовши до проміжку інтегрування $[-1, 1]$.

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ТА ВИСНОВКИ

Був проведений числовий аналіз задачі для двовісного розтягу пластини зусиллями p_1 і p_2 , коли $\alpha = \pi/2$, $\beta_j = 0$, ($j = 1, 2$) для еліптичних та прямокутних отворів, коли відображуючі функції $\omega_k(v_k)$, ($k = 1, 2$) для еліптичного отвору мають вигляд [11]:

$$\omega_k(v_k) = R_k(e^{iv_k} + m_k e^{-iv_k}), \quad R_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k), \quad m_k = \frac{a_k - b_k}{a_k + b_k},$$

для прямокутного отвору [12]:

$$\omega_k(v_k) = \tilde{R}_k \left(e^{iv_k} + \sum_{n=1}^9 \frac{\tilde{C}_{2n-1}}{e^{iv_k(2n-1)}} \right), \quad \tilde{C}_{2k} = 0,$$

де a_k і b_k – півосі еліпсів, \tilde{R}_k – дійсне число, \tilde{C}_{2n-1} – відомі сталі, значення яких не наводимо [12]. На рис. 2-4 – штриховим лініям відповідають КІН у лівій вершині тріщини ($x = -l$), а суцільним – у правій її вершині ($x = l$).

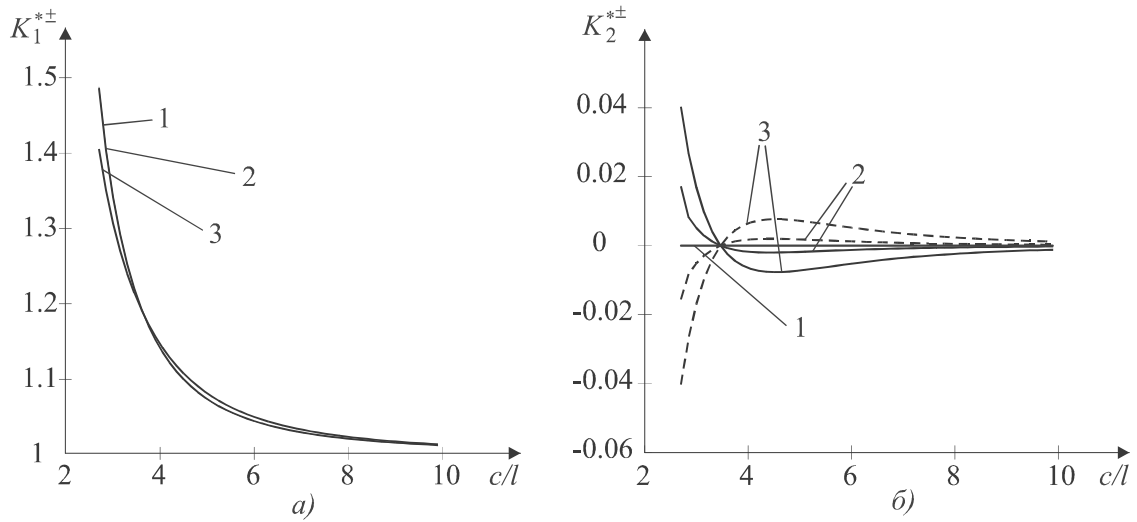


Рис. 2. Зведені коефіцієнти інтенсивності напружень по відношенню до c/l

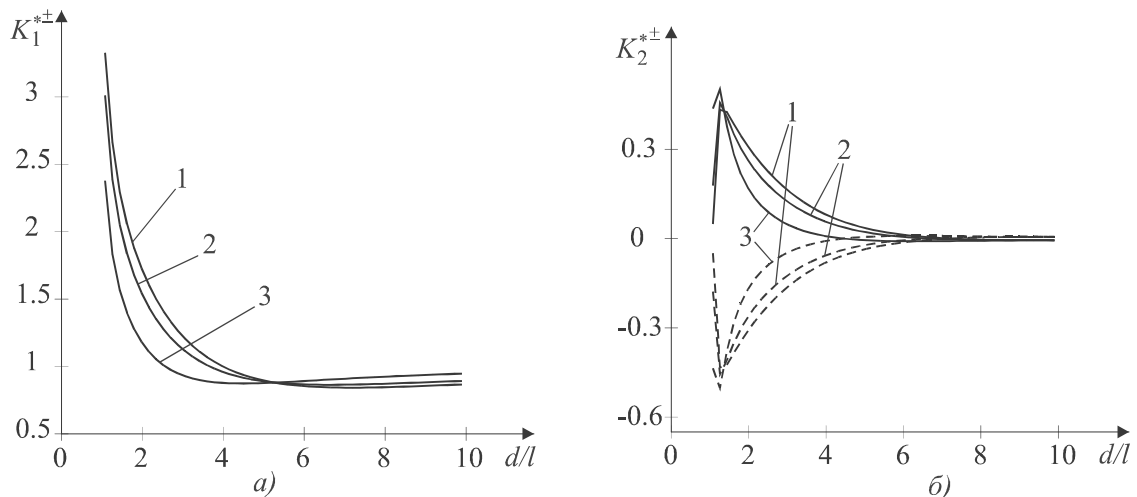


Рис. 3. Зведені коефіцієнти інтенсивності напружень по відношенню до $d/l = d_1/l = d_2/l$

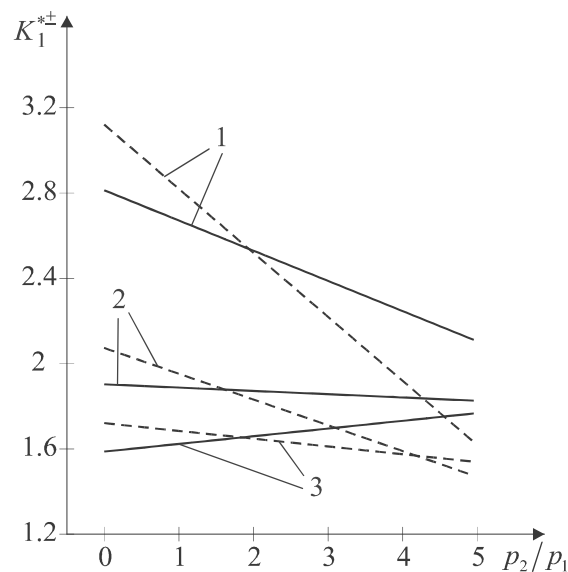


Рис. 4. Зведені коефіцієнти інтенсивності напружень по відношенню до p_2/p_1

На рис. 2 для двох еліптичних отворів з тріщиною зображено зведені коефіцієнти інтенсивності напружень (ЗКІН) $K_j^{*\pm} = k_j^{*\pm} / (p_1 \sqrt{\pi l})$ від відносної відстані $c/l = -c_1/l = c_2/l$ між центрами отворів та центром тріщини, причому $a_1/l = a_2/l = 1$, $b_1/l = b_2/l = 2$, $p_2/p_1 = 0$, і піввісь a_j паралельна до тріщини. Крива 1 побудована для $d_1/l = d_2/l = 0$, крива 2 – для $d_1/l = d_2/l = 0.2$, крива 3 – для $d_1/l = d_2/l = 1$.

З цього рисунка можна побачити, що при наближенні отворів до тріщини зведені коефіцієнти інтенсивності напружень зростають, а при віддаленні вони прямують до значення зведених коефіцієнтів інтенсивності напружень для ізольованої тріщини. У часткових випадках числові результати збігаються з результатами із монографією [5], отриманими іншим підходом.

На рис. 3 подано графічну залежності ЗКІН $K_j^{*\pm}$ при взаємодії двох прямокутних отворів зі сторонами $2a_1 = 2a_2 = 4$, $2b_1 = 2b_2 = 2$ із тріщиною, від відносної відстані d/l , $c_2/l = -c_1/l = 3.1$, коли більші сторони прямокутних отворів паралельні до тріщини. Окрім того, крива 1 побудована для $p_2/p_1 = 0$, крива 2 – для $p_2/p_1 = 1$, крива 3 – для $p_2/p_1 = 3$. Із цього рисунка бачимо, що ЗКІН суттєво залежать від величини d/l , чим вона більша, тим швидше значення КІН прямують до відповідних значень для ізольованої тріщини, при цьому вони майже не залежать від відношення розтягуючих зусиль на нескінченності. При зростанні зусилля p_2 ЗКІН зменшуються.

На рис. 4 зображено ЗКІН $K_1^{*\pm}$ від відносної величини p_2/p_1 , за взаємодії тріщини із квадратним отвором (зі стороною $2a_1 = 2b_1 = 2$) та круговим отвором із радіусом $R_2/l = 1$ при $d_1/l = d_2/l = 0$. Крива 1 побудована для $c_2/l = -c_1/l = 2.1$, крива 2 – для $c_2/l = -c_1/l = 2.3$, крива 3 – для $c_2/l = -c_1/l = 2.5$. ЗКІН $K_2^{*\pm} = 0$. Частковий аналіз показав, що при збільшенні відстані між центрами отворів та центром тріщини – ЗКІН наближаються до одиниці. Окрім того, бачимо, що КІН у вершині, яка ближча до квадратного отвору, більші, ніж в іншій вершині, яка ближча до кругового, коли маємо односторонній розтяг $p_2 = 0$, а при $p_2 > 2p_1$ маємо протилежну ситуацію.

ЛІТЕРАТУРА

1. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 324 с.
2. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 444 с.
3. Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. Киев: Наук думка, 1989. 248 с.
4. Кит Г. С., Кривцун М. Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1983. 277 с.
5. Калоеров С. А., Авдюшина Е. В., Мироненко А. Б. Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинках. Донецк: ДонНУ, 2013. 440 с.
6. Каминский А. А. Хрупкое разрушение вблизи отверстий. Киев: Наук. думка, 1982. 160 с.
7. Сташук Н. Г. Задачи механики упругих тел с трещиноподобными дефектами. Киев: Наук. думка, 1993. 359 с.
8. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. 716 с.
9. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами: справочное пособие. Т. 2. Механика разрушения и прочность материалов. Киев: Наук думка, 1998. 620 с.
10. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. Мураками Ю. (ред.). Москва: Мир, 1990. Т. 1. 429 с., Т. 2. 566 с.
11. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва: Наука, 1966. 708 с.
12. Космодамианский А. С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами, выступами. Киев: Вища школа, 1975. 228 с.

REFERENCES

1. Savruk, M. P. (1981). Two-dimensional problems of elasticity for bodies with cracks. Kiev: Naukova Dumka.
2. Panasyuk, V. V., Savruk, M. P. & Datsishin, A. P. (1976). Distribution of stresses around cracks in plates and shells. Kiev: Naukova Dumka.
3. Savruk, M. P., Osiv, P. N. & Prokopchuk, I. V. (1989). Numerical analysis in plane problems of the crack theory. Kiev: Naukova Dumka.
4. Kyt, G. S. & Krivcun, M. G. (1983). Flat thermoelasticity problem for bodies with cracks. Kiev: Naukova Dumka.
5. Kaloerov, S. A., Avdyushina, Y. V. & Myronenko, A. B. (2013). Stress concentration in multiple isotropic plate. Donetsk: DonNU.
6. Kaminskii, A. A. (1982). Brittle fracture near holes. Kiev: Naukova Dumka.
7. Staschuk, N. G. (1993). Problems of mechanics of elastic bodies with crack-like defect. Kiev: Naukova Dumka.
8. Sulym, G. T. (2007). Fundamentals of the mathematical theory of thermoelastic equilibrium deformed solids with thin inclusions. Lviv: Research and Publishing Center of Shevchenko.
9. Savruk, M. P. (1998). The stress intensity factors in the bodies with cracks: a handbook. Fracture mechanics and strength of materials. Kiev: Naukova Dumka.
10. Murakami, Y. (Eds.). (1990). Handbook of stress intensity factor. Moscow: Mir.
11. Mushelishvili, N. I. (1966). Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Moscow: Nauka.
12. Kosmodamianskiy, A. S. (1975). The plane problem of the theory of elasticity for plates with apertures, notches, projections. Kiev: Vyshcha shkola.

УДК 539.3

ТЕРМОПРУЖНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ШАРУВАТИХ ОБОЛОНОК СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Сметанкіна Н. В., д. т. н., провідний науковий співробітник

*Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України,
вул. Пожарського, 2/10, м. Харків, 61046, Україна*

nsmetankina@ukr.net

Запропоновано метод дослідження термонапруженого стану шаруватих незамкнених циліндричних оболонок зі складною формою плану. Метод базується на прийомі розширення заданої системи. Деформування оболонок розглянуто в рамках уточненої теорії оболонок, яка враховує деформації поперечного зсуву та обтиснення вздовж товщини в кожному шарі. Результати розрахунку напружень у шарах порівнюються з даними, одержаними інтегрально-різницею методом.

Ключові слова: шарувата оболонка, складна форма, температура, термонапружений стан.

ТЕРМОУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ СЛОИСТЫХ ОБОЛОЧЕК СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Сметанкина Н. В., д. т. н., ведущий научный сотрудник

*Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины,
ул. Пожарского, 2/10, г. Харьков, 61046, Украина*

nsmetankina@ukr.net

Предложен метод исследования термонапряженного состояния многослойных незамкнутых цилиндрических оболочек со сложной формой плана. Метод основан на приеме расширения заданной системы. Деформирование оболочек рассматривается в рамках уточненной теории оболочек, учитывающей деформации поперечного сдвига и обжатие по толщине в каждом слое. Результаты расчета напряжений в слоях сравниваются с данными, полученными интегрально-разностным методом.

Ключевые слова: слоистая оболочка, сложная форма, температура, термонапряженное состояние.