REFERENCES

1. Savruk, M. P. (1981). Two-dimensional problems of elasticity for bodies with cracks. Kiev: Naukova Dumka.
2. Panasyuk, V. V., Savruk, M. P. & Datsishin, A. P. (1976). Distribution of stresses around cracks in plates and shells. Kiev: Naukova Dumka.
3. Savruk, M. P, Osiv, P. N. & Prokopchuk, I. V. (1989). Numerical analysis in plane problems of the crack theory. Kiev: Naukova Dumka.
4. Kyt, G. S. & Krivcun, M. G. (1983). Flat thermoelasticity problem for bodies with cracks. Kiev: Naukova Dumka.
5. Kaloerov, S. A., Avdyushina, Y. V. & Myronenko, A. B. (2013). Stress concentration in multiple isotropic plate. Donetsk: DonNU.
6. Kaminskii, A. A. (1982).Brittle fracture near holes. Kiev: Naukova Dumka.
7. Staschuk, N. G. (1993). Problems of mechanics of elastic bodies with crack-like defect. Kiev: Naukova Dumka.
8. Sulym, G. T. (2007). Fundamentals of the mathematical theory of thermoelastic equilibrium deformed solids with thin inclusions. Lviv: Research and Publishing Center of Shevchenko.
9. Savruk, M. P. (1998).The stress intensity factors in the bodies with cracks: a handbook. Fracture mechanics and strength of materials. Kiev: Naukova Dumka.
10. Murakami, Y. (Eds.). (1990). Handbook of stress intensity factor. Moscow: Mir.
11. Mushelishvili, N. I. (1966). Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Moscow: Nauka.
12. Kosmodamianskiy, A. S. (1975). The plane problem of the theory of elasticity for plates with apertures, notches, projections. Kiev: Vyshcha shkola.

УДК 539.3

ТЕРМОПРУЖНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ШАРУВАТИХ ОБОЛОНОК СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Сметанкіна Н. В., д. т. н., провідний науковий співробітник

Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, вул. Пожарського, 2/10, м. Харків, 61046, Україна

nsmetankina@ukr.net

Запропоновано метод дослідження термонапруженого стану шаруватих незамкнених циліндричних оболонок зі складною формою плану. Метод базується на прийомі розширення заданої системи. Деформування оболонок розглянуто в рамках уточненої теорії оболонок, яка враховує деформації поперечного зсуву та обтиснення вздовж товщини в кожному шарі. Результати розрахунку напружень у шарах порівнюються з даними, одержаними інтегрально-різницевим методом.

Ключові слова: шарувата оболонка, складна форма, температура, термонапружений стан.

ТЕРМОУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ СЛОИСТЫХ ОБОЛОЧЕК СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Сметанкина Н. В., д. т. н., ведущий научный сотрудник

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, ул. Пожарского, 2/10, г. Харьков, 61046, Украина

nsmetankina@ukr.net

Предложен метод исследования термонапряженного состояния многослойных незамкнутых цилиндрических оболочек со сложной формой плана. Метод основан на приеме расширения заданной системы. Деформирование оболочек рассматривается в рамках уточненной теории оболочек, учитывающей деформации поперечного сдвига и обжатие по толщине в каждом слое. Результаты расчета напряжений в слоях сравниваются с данными, полученными интегрально-разностным методом.

Ключевые слова: слоистая оболочка, сложная форма, температура, термонапряженное состояние.

THERMOELASTIC DEFORMATION OF LAMINATED SHELLS OF A COMPLEX SHAPE

Smetankina N. V., D. Sc. in Engineering, Leading Research Associate

A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of NAS of Ukraine, Pozharsky str., 2/10, Kharkiv, 61046, Ukraine

nsmetankina@ukr.net

A topical problem in modern engineering is reliable determination of temperature fields and stresses in structural elements. A review of models and methods of solving heat conduction and thermoelasticity problems has shown that uniform structures are the most investigated ones. If a temperature field changes slowly with time, one can ignore the inertia terms in the equations of motion and the coupling term in the heat conduction equation, and treat the thermoelasticity problem as a quasistatic one.

A constant-thickness non-closed cylindrical laminated shell is considered. It comprises isotropic layers with constant thickness and various physical and mechanical properties. The number of layers and their layout is arbitrary. In the coordinate surface, it occupies the complex domain limited by a boundary Γ. Convective heat exchange occurs on the shell surfaces. The shell is affected by interlayer heat sources. The nonstationary heat conduction equation and the boundary conditions for the laminated shell are derived from the heat balance variational equation. The temperature fields are determined while solving the nonstationary heat conduction problem for laminated shells when the latter are heated with interlayer film heat sources. The shell behavior is described within the framework of the refined first-order theory. It accounts for lateral shear strain and thickness reduction in each shell layer. The polygonal line hypothesis holds for the pack, and interlayer contact excludes their delamination and mutual slippage. The shell equilibrium equations and the boundary conditions are derived from the Lagrange variational equation.

According to the extension method, the complex-shape shell virtually extends to an auxiliary laminated cylindrical non-closed simply supported shell of rectangular planform shape with the same composition of layers. An auxiliary shell is one whose contour shape and boundary conditions yield a simple analytical solution. In this case, the auxiliary shell is a simply supported non-closed cylindrical laminated with rectangular plan-view shape, allowing to find the problem solution as trigonometric series. To satisfy actual boundary conditions, additional distributed compensating loads, the intensity of which are to be found, are applied to the auxiliary shell over the boundary Γ. Based on the condition of satisfying boundary conditions on the boundary Γ, we form a system of integral equations for determining the intensities of compensating loads. Displacements and loads are expanded in the auxiliary shell domain in trigonometric series for functions satisfying simply supported conditions. The compensating loads are expanded into a series along the boundary Γ. Hence, the system of integral equations is transformed to a system of algebraic equations with respect to the expansion coefficients of the compensating loads.

The method feasibility has tested on five- and seven-layer shells. Results of calculation of stresses in layers are compared with the data obtained by an integral-difference method. The method suggested can be used for designing heating systems and determining temperature stresses in the laminated glazing of different transport vehicles.

Key words: laminated shell, complex shape, temperature, thermal stressed state.

1. ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Шаруваті оболонки є елементами конструкцій у різних галузях сучасної техніки, оскільки вони забезпечують високу міцність, жорсткість, поліпшені звуко- і теплоізоляційні характеристики при малій вазі конструкції під впливом різних силових та температурних полів [1, с. 589; 2, с. 117]. Основні методи розв'язання задач квазистатичної термопружності шаруватих оболонок можна розділити на аналітичні і чисельні. Найбільш поширеним у практиці розрахунків є метод скінченних елементів. Варто зазначити, що чисельні методи не завжди ефективні при розв'язанні задач термопружності шаруватих елементів конструкцій, оскільки потребують розв'язання систем лінійних рівнянь великого порядку. Тому багато дослідників звертаються до розробки аналітичних або чисельно-аналітичних методів розв'язання таких задач.

2. АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

З огляду літературних джерел випливає, що найчастіше розглядається розрахунок шаруватих конструкцій в умовах стаціонарного нагріву під впливом температурних розподілів, які задаються за кусково-лінійним законом вздовж товщини конструкції. У статті [3, с. 230] досліджено згин шарнірно опертих шаруватих пластин несиметричної структури під дією

температури, яка кусково-лінійно розподілена вздовж товщини пластини. Системи рівнянь термопружності теорії першого порядку з урахуванням зсуву та класичної теорії розв'язуються методом скінчених різниць і методом Леві. У працях [4, с. 91] та [5, с. 3710] автори застосували гіпотезу про кусково-лінійний розподіл температури вздовж товщини пакета для дослідження стаціонарних температурних полів у шаруватих композитних оболонках і панелях. У випадку нестаціонарних теплових впливів шаруваті пластини й оболонки також розглядаються при відомому розподілі температурних полів. У статті [6, с. 52] автори дослідили нелінійну реакцію шаруватої симетричної ортогонально армованої циліндричної панелі на імпульсний тепловий потік. Температурний розподіл є сталим вздовж товщини, а за часом він змінюється за показниковим законом.

Варто зазначити, що для розв'язання задач термопружного деформування шаруватих елементів конструкцій під впливом нестаціонарних температурних полів найчастіше застосовуються методи, базовані на дискретизації області або контуру, наприклад, метод скінченних елементів [6, с. 50]. Отже, актуальною задачею є розробка методів дослідження термонапруженого стану шаруватих елементів конструкцій складної форми з урахуванням їх неоднорідної структури, які дозволяють подати розв'язок задачі в аналітичному вигляді.

3. НЕВИРІШЕНІ ПРОБЛЕМИ ТА ЦІЛІ СТАТТІ

З аналізу публікацій, які присвячені термопружному деформуванню шаруватих елементів конструкцій, можна зробити висновок, що кожний зі згаданих методів дослідження має свої переваги і недоліки, що обмежують область застосування. Крім того, часто деформування шаруватих оболонок розглядається в рамках класичної теорії оболонок, хоча оболонка може складатися з шарів, фізико-механічні характеристики яких суттєво різняться. Тому розробка нових методів і удосконалення існуючих методів розрахунку оболонок залишаються актуальними задачами. У цій роботі пропонується метод розв'язання задачі термопружності шаруватих незамкнених циліндричних оболонок зі складною формою плану. Метод базований на методі розширення заданої складної області до канонічної, що дозволяє одержати розв'язок вихідної задачі в аналітичному вигляді.

4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається багатошарова циліндрична оболонка, складена з I ізотропних шарів сталої товщини h_i, яка займає на зовнішній поверхні першого шару (координатній поверхні) область Ω, що обмежена контуром Γ. На оболонку діють температурні та силові навантаження $\mathbf{P} = \left\{ p_j \left(x, y \right) \right\}$ $(j = \overline{1, 3I + 3})$. Координата x змінюється вздовж твірної, координата y – вздовж напрямної оболонки. Додатний напрям осі Oz збігається з напрямом зовнішньої нормалі до координатної поверхні.

Поведінка оболонки описується в рамках уточненої теорії першого порядку, що враховує деформації поперечного зсуву та обтиснення нормального елемента в кожному шарі. Передбачається, що контакт між шарами виключає їх розшарування та взаємне проковзування. Переміщення точки i-го шару мають вигляд:

$$u_k^i = u_k + \sum_{j=1}^{i-1} h_j u_{3+I(k-1)+j} + \left(z - \delta_{i-1} \right) u_{3+I(k-1)+i}, \quad k = 1,2,3, \quad i = \overline{1, I}, \tag{1}$$

де $u_k = u_k \left(x, y \right)$, $k = 1,2,3$ – переміщення точки координатної поверхні в напрямі координатних осей, $u_{3+I(k-1)+i} = u_{3+I(k-1)+i} \left(x, y \right)$, $k = 1,2$ – кути повороту нормального елемента відносно координатних осей в i-му шарі, $u_{3+2I+i} = u_{3+2I+i} \left(x, y \right)$ – обтиснення нормального елемента в межах i-го шару, $\delta_i = \sum_{j=1}^{i} h_j$, $\delta_{i-1} \le z \le \delta_i$, $i = \overline{1, I}$.

Деформації шарів визначаються відповідно до формул Коші, а напруження і деформації в шарах зв'язані законом Гука. Інтегральні характеристики тензора напружень в i-му шарі визначаються за формулами:

$$\hat{N}_x^i = N_x^i - N_{1T}^i, \quad \hat{N}_y^i = N_y^i - N_{2T}^i, \quad \hat{N}_z^i = N_z^i - N_{1T}^i, \quad \hat{M}_x^i = M_x^i - M_{1T}^i, \quad \hat{M}_y^i = M_y^i - M_{2T}^i,$$

$$\hat{Q}_x^i = Q_x^i, \; \hat{Q}_y^i = Q_y^i, \quad \hat{M}_{xz}^i = M_{xz}^i, \quad \hat{M}_{yz}^i = M_{yz}^i, \quad i = \overline{1,I},$$

де

$$\begin{bmatrix} N_x^i & N_{xy}^i \\ M_x^i & M_{xy}^i \end{bmatrix} = \int\limits_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \begin{Bmatrix} 1 \\ z-\delta_{i-1} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x^i & \tau_{xy}^i \end{bmatrix} \left(1+\frac{z}{R}\right) dz, \quad \begin{bmatrix} N_y^i & N_{yx}^i \\ M_y^i & M_{yx}^i \end{bmatrix} = \int\limits_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \begin{Bmatrix} 1 \\ z-\delta_{i-1} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_y^i & \tau_{xy}^i \end{bmatrix} dz,$$

$$\begin{bmatrix} N_z^i & Q_x^i \end{bmatrix} = \int\limits_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \begin{bmatrix} \sigma_z^i & \tau_{xz}^i \end{bmatrix} \left(1+\frac{z}{R}\right) dz, \quad Q_y^i = \int\limits_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \tau_{yz}^i dz,$$

$$M_{xz}^i = \int\limits_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \tau_{xz}^i \left(z-\delta_{i-1}\right)\left(1+\frac{z}{R}\right) dz, \quad M_{yz}^i = \int\limits_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \tau_{yz}^i \left(z-\delta_{i-1}\right) dz,$$

$$N_{1T}^i = \frac{E_i \alpha_T^i}{1-\nu_i} \int\limits_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} T_i \left(1+\frac{z}{R}\right) dz, \quad N_{2T}^i = \frac{E_i \alpha_T^i}{1-\nu_i} \int\limits_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} T_i dz,$$

$$M_{1T}^i = \frac{E_i \alpha_T^i}{1-\nu_i} \int\limits_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} T_i \left(z-\delta_{i-1}\right)\left(1+\frac{z}{R}\right) dz, \quad M_{2T}^i = \frac{E_i \alpha_T^i}{1-\nu_i} \int\limits_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} T_i \left(z-\delta_{i-1}\right) dz, \quad i = \overline{1,I},$$

E_i – модуль Юнга матеріалу i-го шару; ν_i – коефіцієнт Пуассона; α_T^i – коефіцієнт лінійного температурного розширення матеріалу i-го шару; $T_i = T_i(x,y,z)$ – функція приросту температури відносно температури ненапруженого стану; R – радіус оболонки.

З варіаційного принципу Лагранжа [1, с. 81] одержуємо рівняння термопружної рівноваги шаруватої оболонки

$$[\Lambda]\mathbf{U} = \mathbf{P}_T - \mathbf{P}, \quad (x,y) \in \Omega, \tag{2}$$

та граничні умови на контурі Г

$$\left[\mathbf{B}^\Gamma\right]\mathbf{U} = \mathbf{P}^\Gamma, \quad (x,y) \in \Gamma. \tag{3}$$

У рівняннях (2) та (3) матриці $[\Lambda]$ і $\left[\mathbf{B}^\Gamma\right]$ – квадратні симетричні матриці розміру $3I+3$; $\mathbf{U}$ – вектор переміщень, $\mathbf{U} = \{u_i\}$, $i = \overline{1,3I+3}$;

$$\mathbf{P}_T = \left\{ C_{1T,x}^I, C_{2T,y}^I, -\frac{C_{2T}^I}{R}, D_{1T,x}^i, D_{2T,y}^i, -C_{1T}^i - \frac{D_{2T}^i}{R} \right\};$$

$$\mathbf{P}^\Gamma = \left\{ C_{1T}^I l_x^2 + C_{2T}^I l_y^2, \left(C_{1T}^I - C_{2T}^I\right) l_x l_y, 0, D_{1T}^i l_x^2 + D_{2T}^i l_y^2, \left(D_{1T}^i - D_{2T}^i\right) l_x l_y, 0 \right\},$$

$$C_{1T}^I = \sum_{i=1}^{I} N_{1T}^i, \quad C_{2T}^I = \sum_{i=1}^{I} N_{2T}^i, \quad D_{1T}^i = h_i \sum_{j=i}^{I-1} N_{1T}^{j+1} + M_{1T}^i, \quad D_{2T}^i = h_i \sum_{j=i}^{I-1} N_{2T}^{j+1} + M_{2T}^i, \quad i = \overline{1,I},$$

l_x та l_y – напрямні косинуси нормалі до контуру Г.

5. МЕТОД РОЗВЯ'ЗАННЯ

Розв'язання крайової задачі (2), (3) здійснюється методом розширення заданої системи [7, с. 149], який ураховує геометрію області на аналітичному рівні. Відповідно до запропонованого методу, вихідна оболонка розширюється до допоміжної шарнірно опертої оболонки з прямокутною формою плану, для якої можливо одержати розв'язок задачі у вигляді розвинень у тригонометричні ряди. Допоміжна оболонка має таку ж композицію шарів і в межах області Ω навантажена так само, як і задана оболонка.

Щоб забезпечити виконання заданих граничних умов на контурі Γ і тотожність напружено-деформованого стану допоміжної оболонки в області Ω стану вихідної оболонки, до допоміжної оболонки прикладаються додаткові компенсуючі навантаження $\mathbf{Q}^{\text{comp}} = \left\{ q_j^{\text{comp}}(x,y) \right\} \ \left(j = \overline{1,3I+3} \right)$, які неперервно розподілені вздовж контуру Ω. У рівняння термопружної рівноваги оболонки (2) компенсуючі навантаження входять у вигляді криволінійних розподілів

$$p_j^{\text{comp}}(x,y) = \sum_{k=1}^{3I+3} \oint_{\Gamma} L_{jk} q_k^{\text{comp}}(s)\, \delta(x - x_\Gamma, y - y_\Gamma)\, ds, \quad j,k = \overline{1,3I+3}. \tag{4}$$

Тут $\delta(x - x_\Gamma, y - y_\Gamma)$ – двовимірна δ-функція Дірака; s – поточна довжина дуги.

Граничні умови (3) з урахуванням (4) призводять до системи інтегральних рівнянь, з якої визначаються невідомі інтенсивності компенсуючих навантажень:

$$\left[\mathbf{B}^{\Gamma} \right] \mathbf{U} \left[\mathbf{Q}^{\text{comp}}(x,y) \right] = \mathbf{P}^{\Gamma}, \quad (x,y) \in \Gamma. \tag{5}$$

Щоб перетворити інтегральні рівняння на їх алгебраїчний аналог, функції переміщень, заданих і компенсуючих навантажень розвиваються в тригонометричні ряди за функціями, що задовольняють граничні умови оболонки з прямокутною формою плану:

$$u_j(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{jmn} C_{jmn}(x,y), \quad p_j(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} p_{jmn} C_{jmn}(x,y),$$

$$p_j^T(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} p_{jmn}^T C_{jmn}(x,y), \quad p_j^{\text{comp}}(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} p_{jmn}^{\text{comp}} C_{jmn}(x,y),$$

$$C_{1mn} = \cos\alpha_m x \sin\beta_n y, \quad C_{2mn} = \sin\alpha_m x \cos\beta_n y, \quad C_{3mn} = \sin\alpha_m x \sin\beta_n y,$$

$$C_{3+i\,mn} = C_{1mn}, \quad C_{3+I+i\,mn} = C_{2mn}, \quad C_{3+2I+i\,mn} = C_{3mn}, \quad \alpha_m = m\pi/A, \quad \beta_n = n\pi/B,$$

$$j = \overline{1,3I+3}, \quad i = \overline{1,I},$$

де A – довжина твірної допоміжної оболонки; B – довжина напрямної оболонки.

Функції компенсуючих навантажень розвиваються в ряд уздовж контуру Γ:

$$q_j^{\text{comp}}(s) = \sum_{\alpha=1,2}\sum_{\mu=0}^{\infty} q_{j\alpha\mu} b_{\alpha\mu}(s), \quad j = \overline{1,3I+3}, \tag{6}$$

$$b_{1\mu} = \sin\left[\mu\gamma(s)\right], \quad b_{2\mu} = \cos\left[\mu\gamma(s)\right], \quad \gamma(s) = 2\pi \int_0^s d\tilde{s} \Big/ \oint_{\Gamma} d\tilde{s}, \quad 0 \le \gamma(s) \le 2\pi, \quad \mu = \overline{0,\mu^*}.$$

Граничні функції, що входять у вихідні граничні умови (3), також розвиваються в ряд уздовж Γ. У результаті система (5) перетворюється на систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо коефіцієнтів розвинення компенсуючих навантажень у ряд уздовж контуру Γ. Порядок

одержаної системи залежить від числа шарів в оболонці і кількості членів ряду в розвиненні (6). Після обчислення компенсуючих навантажень розв'язок задачі набуває вигляду:

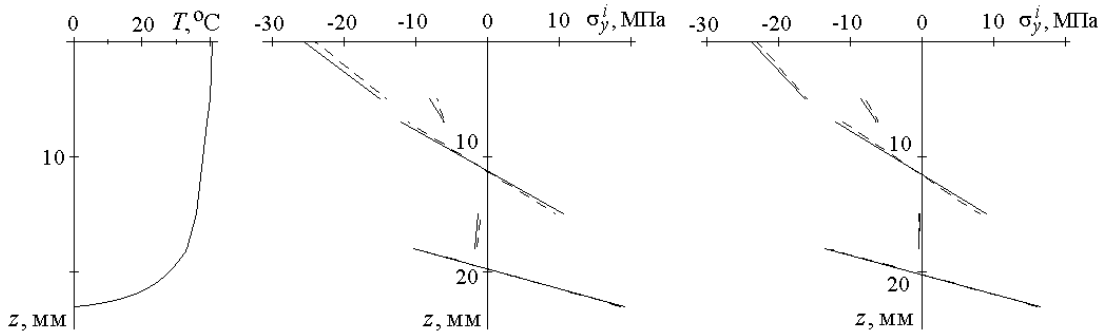
$$u_j(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{AB}\sum_{k=1}^{3I+3}\pi_{jk}^{mn}\sum_{l=1}^{3I+3}\sum_{\alpha=1,2}\sum_{\mu=0}^{\infty}q_{l\alpha\mu}\theta_{kl\alpha\mu}^{mn}+\varepsilon_{jmn}\right)C_{jmn}(x,y),\ j=\overline{1,3I+3}.$$

Потім визначаються переміщення (1), деформації і напруження в шарах вихідної оболонки.

6. ЧИСЕЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Для підтвердження достовірності чисельних результатів проведено порівняння значень напружень для п'ятишарової незамкненої циліндричної оболонки під впливом змінного вздовж товщини об'ємного теплового поля з даними, наведеними в роботі [8, с. 19]. Контур оболонки жорстко закріплений, а його форма задається рівняннями кривих Ламе: $x(\varphi)=\alpha\cos^{2/c}(\varphi)$, $y(\varphi)=\beta\sin^{2/c}(\varphi)$. Оболонка має такі геометричні і механічні параметри: $2\alpha=0{,}555$ м, $2\beta=0{,}42$ м, $c=10$; $R=0{,}69$ м; $h_1=h_5=5$ мм, $h_2=2$ мм, $h_3=8$ мм, $h_4=3$ мм; $E_i=6{,}3\cdot10^4$ МПа, $i=1,3,5$, $E_2=1{,}6\cdot10^3$ МПа, $E_4=10$ МПа; $\nu_i=0{,}22$, $i=1,3,5$, $\nu_2=\nu_4=0{,}4$; $\alpha_T^i=8{,}8\cdot10^{-6}$ °C^{-1}, $i=1,3,5$, $\alpha_T^2=7\cdot10^{-5}$ °C^{-1}, $\alpha_T^4=2\cdot10^{-4}$ °C^{-1}.

На рис. 1 показано розподіл температури та напруження вздовж товщини оболонки. Розподіл температури T у межах кожного шару апроксимується квадратичною параболою (рис. 1, а). На рис. 1, б показано змінення напруження σ_y^i у точці з координатами $x_0=0$, $y_0=0$, на рис. 1, в – у точці з координатами $x_0=\alpha/2$, $y_0=0$. Штриховими лініями на рис. 1 показані розподіли напруження, які одержані інтегрально-різницевим методом у статті [8, с. 20]. Добре узгодження розподілів напружень підтверджує достовірність результатів розрахунку, які одержані за допомогою запропонованого методу.



а) б) в)

Рис. 1. Розподіл температури та напруження вздовж товщини оболонки

Ефективність розробленого методу підтверджено на прикладі розв'язання задачі термопружності семишарової вільно опертої циліндричної оболонки, розрахункова схема якої наведена на рис. 2. Оболонка знаходиться під впливом плівкового джерела тепла, яке розміщене між першим і другим шарами оболонки. Розташування джерела тепла на поверхні шарів показано штриховою лінією. Його питома потужність 0,84 Вт/см^2. Поле температурних навантажень одержано в результаті розв'язання нестаціонарної задачі теплопровідності оболонки [9, с. 336]. Геометричні та механічні параметри оболонки мають такі значення: $R=1{,}34$ м, $l_1=0{,}7$ м, $l_2=0{,}54$ м, $l_3=0{,}61$ м, $l_4=0{,}55$ м, $R_1=0{,}05$ м, $R_2=0{,}03$ м, $R_3=0{,}04$ м, $R_4=0{,}045$ м; $h_1=5$ мм, $h_2=3$ мм, $h_3=h_5=h_7=10$ мм, $h_4=h_6=2$ мм; $E_i=6{,}8\cdot10^4$ МПа, $i=1,3,5{,}7$, $E_i=2{,}2\cdot10^2$ МПа, $i=2,4,6$; $\nu_i=0{,}22$, $i=1,3,5{,}7$, $\nu_i=0{,}38$, $i=2,4{,}6$; $\alpha_T^i=9\cdot10^{-6}$ °C^{-1}, $i=1,3,5{,}7$, $\alpha_T^i=8{,}3\cdot10^{-5}$ °C^{-1}, $i=2,4,6$.

За результатами розрахунку отримані розподіли головних напружень у момент часу, коли вони досягають своїх найбільших значень. На рис. 3 показано розподіл напружень σ_1 в області розташування джерела тепла на поверхні $z = \delta_1$, яка містить це джерело. Значення напружень наведені в мегапаскалях.

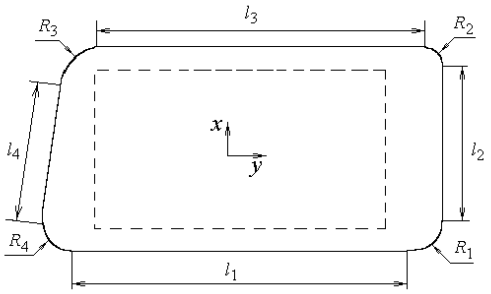


Рис. 2. Розрахункова схема оболонки

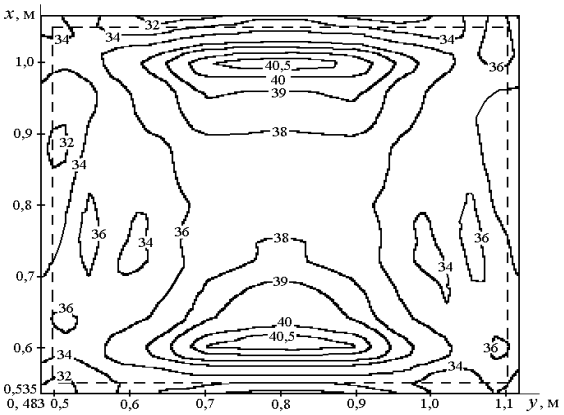


Рис. 3. Розподіл напружень на поверхні $z = \delta_1$

У кутах і вздовж межі області джерела тепла спостерігається концентрація температурних напружень. Встановлено, що напруження не перевищили своїх допустимих значень.

7. ВИСНОВКИ ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ Й НАПРЯМКИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Розроблено метод розрахунку термонапруженого стану шаруватих циліндричних оболонок складною формою плану під впливом плівкових джерел тепла, який дозволяє подати розв'язок задачі у вигляді тригонометричного ряду та досліджувати оболонки з різними граничними умовами та довільним розташуванням шарів.

Можливості методу проілюстровані на прикладі розрахунку деформацій п’ятишарової та семишарової вільно опертих оболонок. Добре узгодження результатів розрахунку температурних напружень за різними методами підтвердило достовірність результатів, одержаних за допомогою запропонованого методу. Встановлено ефект концентрації напружень у кутах і вздовж межі області джерела тепла.

Метод можна застосувати для подальшого аналізу температурних напружень у багатошаровому осклінні сучасних літальних апаратів при впливі плівкових джерел тепла, які є складовою частиною систем обігріву.

ЛІТЕРАТУРА

1. Carrera E., Cinefra M., Fazzolari F. A. Some results on thermal stress of layered plates and shells by using unified formulation. *J. Thermal Stresses*. 2013. Vol. 36, No. 6. P. 589–625.

2. Carrera E., Fazzolari F. A. Thermal stress analysis of beams, plates and shells: computational modeling and applications. London: Academic Press, 2016. 440 p.

3. Khdeir A. A. On the thermal response of antisymmetric angle-ply laminated plates. *Trans. ASME J. Appl. Mech*. 1997. Vol. 64, No. 1. P. 229–233.

4. Tauchert T. R. Publications on thermal stresses. *J. Thermal Stress*. 2001. Vol. 24, No. 1. P. 91–92.

5. Barut A, Madenci E., Tessler A. Non-linear analysis of composite panels under non-uniform temperature distribution. *Int. J. Solids and Structures*. 2000. Vol. 37, No. 27. P. 3681–3713.

6. Oguamanam D. C. D., Hansen J. S., Heppler G. R. Nonlinear transient response of thermally loaded laminated panels. *Trans. ASME. J. Appl. Mech*. 2004. Vol. 71, No. 1. P. 49–56.

7. Сметанкина Н. В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек. Харьков: Міськдрук, 2011. 376 с.

8. Демидов В. Г., Паймушин В. Н. Метод и пакет прикладных программ для расчета термонапряженного состояния многослойных оболочек сложной геометри. *Прикл. пробл. прочности и пластичности*. 1987. С. 13–21.

9. Shupikov A. N., Smetankina N. V., Svet Ye. V. Nonstationary heat conduction in complex-shape laminated plates. *Trans. ASME. J. Heat Transfer*. 2007. Vol. 129, No. 3. P. 335–341.

REFERENCE

1. Carrera, E., Cinefra, M. & Fazzolari, F. A. (2013). Some results on thermal stress of layered plates and shells by using unified formulation. J. Thermal Stresses, Vol. 36, No. 6, pp. 589-625.

2. Carrera, E. & Fazzolari, F. A. (2016). Thermal stress analysis of beams, plates and shells: computational modeling and applications. London: Academic Press.

3. Khdeir, A. A. (1997). On the thermal response of antisymmetric angle-ply laminated plates. Trans. ASME J. Appl. Mech., Vol. 64, No. 1, pp 229-233.

4. Tauchert, T. R. (2001). Publications on thermal stresses. J. Thermal Stress, Vol. 24, No. 1, pp. 91-92.

5. Barut, A., Madenci, E. & Tessler, A. (2000). Non-linear analysis of composite panels under non-uniform temperature distribution. Int. J. Solids and Structures, Vol. 37, No. 27, pp. 3681-3713.

6. Oguamanam, D. C. D., Hansen, J. S. & Heppler, G. R. (2004). Nonlinear transient response of thermally loaded laminated panels. Trans. ASME. J. Appl. Mech., Vol. 71, No. 1, pp. 49-56.

7. Smetankina, N. V. (2011), Nonstationary deformation, thermoelasticity and optimization of multilayer plates and cylindrical shells. Kharkov: Miskdruk.

8. Demidov, V. G. & Payimushin, V. N. (1987). Method and package of applied programs for calculation of a thermal stressed condition of multilayered shells of complex geometry. Applied problems of strength and plasticity, pp. 13-21.

9. Shupikov, A. N., Smetankina, N. V. & Svet, Ye. V. (2007). Nonstationary heat conduction in complex-shape laminated plates. Trans. ASME. J. Heat Transfer, Vol. 129, No. 3, pp. 335-341.

УДК 539.3

АНТИПЛОСКА ДЕФОРМАЦІЯ БІМАТЕРІАЛУ З ФІЗИЧНО НЕЛІНІЙНИМ МІЖФАЗНИМ ТОНКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

[1]Сулим Г. Т., [2]Піскозуб Й. З., [2]Піскозуб Л. Г.

[1]*Львівський національний університет ім. Івана Франка, вул. Університетська, 1, м. Львів, Україна*

[2]*Українська академія друкарства, вул. Підголоско, 19, м. Львів, Україна*

sulym@franko.lviv.ua, piskozub@pancha.lviv.ua

Розглянуто задачу поздовжнього зсуву біматеріалу з тонким нелінійно пружно-пластичним включенням на межі поділу матеріалів матриці. Розв'язок сформульованої задачі побудовано методом задачі спряження граничних значень аналітичних функцій із застосуванням методу функцій стрибка. Побудована модель тонкого включення з нелінійними характеристиками. Запропоновано збіжний ітераційний метод розв'язування отриманої системи сингулярних інтегральних рівнянь зі змінними коефіцієнтами для різних варіантів нелінійного деформування. Розвинуто інкрементальну методику розрахунку напружено-деформованого стану тіла при циклічному навантажуванні. Здійснено числові розрахунки для різних значень параметрів нелінійності деформаційних характеристик матеріалу включення.

Ключові слова: поздовжній зсув, антиплоска деформація, тонке включення, біматеріал, функції стрибка.