

8. Демидов В. Г., Паймушин В. Н. Метод и пакет прикладных программ для расчета термонапряженного состояния многослойных оболочек сложной геометрии. *Прикл. пробл. прочности и пластичности*. 1987. С. 13–21.
9. Shupikov A. N., Smetankina N. V., Svet Ye. V. Nonstationary heat conduction in complex-shape laminated plates. *Trans. ASME. J. Heat Transfer*. 2007. Vol. 129, No. 3. P. 335–341.

### REFERENCE

1. Carrera, E., Cinefra, M. & Fazzolari, F. A. (2013). Some results on thermal stress of layered plates and shells by using unified formulation. *J. Thermal Stresses*, Vol. 36, No. 6, pp. 589-625.
2. Carrera, E. & Fazzolari, F. A. (2016). *Thermal stress analysis of beams, plates and shells: computational modeling and applications*. London: Academic Press.
3. Khdeir, A. A. (1997). On the thermal response of antisymmetric angle-ply laminated plates. *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 64, No. 1, pp 229-233.
4. Tauchert, T. R. (2001). Publications on thermal stresses. *J. Thermal Stress*, Vol. 24, No. 1, pp. 91-92.
5. Barut, A., Madenci, E. & Tessler, A. (2000). Non-linear analysis of composite panels under non-uniform temperature distribution. *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 37, No. 27, pp. 3681-3713.
6. Oguamanam, D. C. D., Hansen, J. S. & Heppler, G. R. (2004). Nonlinear transient response of thermally loaded laminated panels. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, Vol. 71, No. 1, pp. 49-56.
7. Smetankina, N. V. (2011), *Nonstationary deformation, thermoelasticity and optimization of multilayer plates and cylindrical shells*. Kharkov: Miskdruk.
8. Demidov, V. G. & Payimushin, V. N. (1987). Method and package of applied programs for calculation of a thermal stressed condition of multilayered shells of complex geometry. *Applied problems of strength and plasticity*, pp. 13-21.
9. Shupikov, A. N., Smetankina, N. V. & Svet, Ye. V. (2007). Nonstationary heat conduction in complex-shape laminated plates. *Trans. ASME. J. Heat Transfer*, Vol. 129, No. 3, pp. 335-341.

УДК 539.3

## АНТИПЛОСКА ДЕФОРМАЦІЯ БІМАТЕРІАЛУ З ФІЗИЧНО НЕЛІНІЙНИМ МІЖФАЗНИМ ТОНКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

<sup>1</sup>Сулим Г. Т., <sup>2</sup>Піскозуб Й. З., <sup>2</sup>Піскозуб Л. Г.

<sup>1</sup>Львівський національний університет ім. Івана Франка,  
вул. Університетська, 1, м. Львів, Україна

<sup>2</sup>Українська академія друкарства,  
вул. Підголосько, 19, м. Львів, Україна

sulym@franko.lviv.ua, piskozub@pancha.lviv.ua

Розглянуто задачу поздовжнього зсуву біматеріалу з тонким нелінійно пружно-пластичним включенням на межі поділу матеріалів матриці. Розв'язок сформульованої задачі побудовано методом задачі спряження граничних значень аналітичних функцій із застосуванням методу функцій стрибка. Побудована модель тонкого включення з нелінійними характеристиками. Запропоновано збіжний ітераційний метод розв'язування отриманої системи сингулярних інтегральних рівнянь зі змінними коефіцієнтами для різних варіантів нелінійного деформування. Розвинуто інкрементальну методику розрахунку напружено-деформованого стану тіла при циклічному навантажуванні. Здійснено числові розрахунки для різних значень параметрів нелінійності деформаційних характеристик матеріалу включення.

*Ключові слова:* поздовжній зсув, антипловка деформація, тонке включення, біматеріал, функції стрибка.

## АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ БИМАТЕРИАЛА С ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫМ МЕЖФАЗНЫМ ТОНКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

<sup>1</sup>Сулим Г. Т., <sup>2</sup>Пискозуб И. З., <sup>2</sup>Пискозуб Л. Г.

<sup>1</sup>Львовский национальный университет им. Ивана Франко,  
ул. Университетская, 1, г. Львов, Украина

<sup>2</sup>Украинская академия печати,  
ул. Подголоско, 19, г. Львов, Украина

sulym@franko.lviv.ua, piskozub@pancha.lviv.ua

Рассмотрена задача продольного сдвига биматериала с тонким нелинейно упругопластическим включением на границе раздела материалов матрицы. Решение сформулированной задачи построено методом задачи сопряжения предельных значений аналитических функций с применением метода функций скачка. Построена модель тонкого включения с нелинейными характеристиками. Предложен сходящийся итерационный метод решения системы сингулярных интегральных уравнений с переменными коэффициентами для различных вариантов нелинейного деформирования. Развита инкрементальная методика расчета напряженно-деформированного состояния тела при циклическом нагружении. Осуществлены численные расчеты напряженно-деформированного состояния тела для различных значений параметров нелинейности деформационных характеристик материала включения.

*Ключевые слова:* продольный сдвиг, антиплоская деформация, тонкое включение, биматериал, функции скачка.

## LONGITUDINAL SHEAR OF THE BIMATERIAL WITH PHYSICAL NONLINEAR THIN INTERFACIAL INCLUSION

<sup>1</sup>Sulym G. T., <sup>2</sup>Piskozub J. Z., <sup>2</sup>Piskozub L. G.

<sup>1</sup>Lviv National Ivan Franko University,  
Universytetska Str., 1, L'viv, 79000, Ukraine

<sup>2</sup>Ukrainian Academy of Printing,  
Pidgolosko Str., 19, L'viv, 79020, Ukraine

The problem of longitudinal shear of a bimaterial with thin nonlinearly elastic-plastic inclusion at the interface matrix materials is discussed. Solid is exposed to the combined cyclic loading in the longitudinal direction. It is assumed that the load on each step of loading increases from zero to its maximum monotonically and slowly enough not to consider the effect of inertia. The solution of the formulated problem is constructed by applying the problem linear conjugation of analytic functions and jump functions method. A model of thin inclusion with nonlinear characteristics is constructed. The solution of problem is reduced to a system of singular integral equations with variable coefficients. A convergent iterative method for solving such a system due to the various law of nonlinear deformation is proposed. An incremental technique for calculating the stress-strain state of body under the multistep (including cyclic) loading is developed. The basis of this technique is the idea of consideration at every step of loading previous step stresses and displacements as the residual. Correctness of the obtained solution is justified. Evolution of the plastic zone in the inclusion is considered at different stages of loading. Numerical calculations of the body stress-strain state for various values of the inclusion material nonlinearity parameters are made. Their influence on the mode of deformation of the of matrix under the loading by the shear on the infinity and balanced system of concentrated forces is analyzed.

*Key words:* longitudinal shear, anti-plane deformation, thin inclusion, bi-material, jump functions.

Тонкі включення різноманітної фізичної природи дуже часто зустрічаються як дефекти у матеріалах (тріщини, включення) чи як конструкційні елементи для підкріплення деталей машин та споруд, зокрема і як наповнювачі композиційних матеріалів [1, 2]. Такі тонкі структурні неоднорідності переважно мають складну термомеханічну будову з урахуванням можливої в'язкості, пластичності та інших нелінійних ефектів, урахування яких істотно ускладнює процес розв'язування задач і вимагає використання різноманітних наближених методів навіть для тіл простої геометрії [1, 3].

Спроби врахувати різноманітну нелінійність в антиплоскій задачі для двох стиснених півпросторів із міжфазними дефектами було здійснено різними авторами в працях [4-9], у

т.ч. розглядалися фрикційне проковзування контактуючих тіл [6-8], гранично-елементний підхід [9].

Метою публікації є розвиток методу функцій стрибка та побудова адекватних моделей тонких включень-прошарків, матеріал яких має істотно нелінійні деформаційні властивості за різного навантаження тіла, у тому числі багатокрокового чи циклічного.

Вивчатимемо напружено-деформований стан (НДС) перерізу безмежного ізотропного масиву, що складається з двох півпросторів з пружними сталими  $G_1, G_2$ , площиною  $xOy$ , перпендикулярною до напрямку  $z$  його поздовжнього зсуву. Перпендикулярні до цієї осі плоскі перерізи півпросторів утворюють дві півплощини  $S_k$  ( $k=1,2$ ), а межі поділу між ними відповідає вісь абсцис  $L \sim x$ . На ній уздовж відрізка  $L' = [-a; a]$  знаходиться тонке включення товщиною  $2h$  ( $h \ll a$ ) (рис. 1).

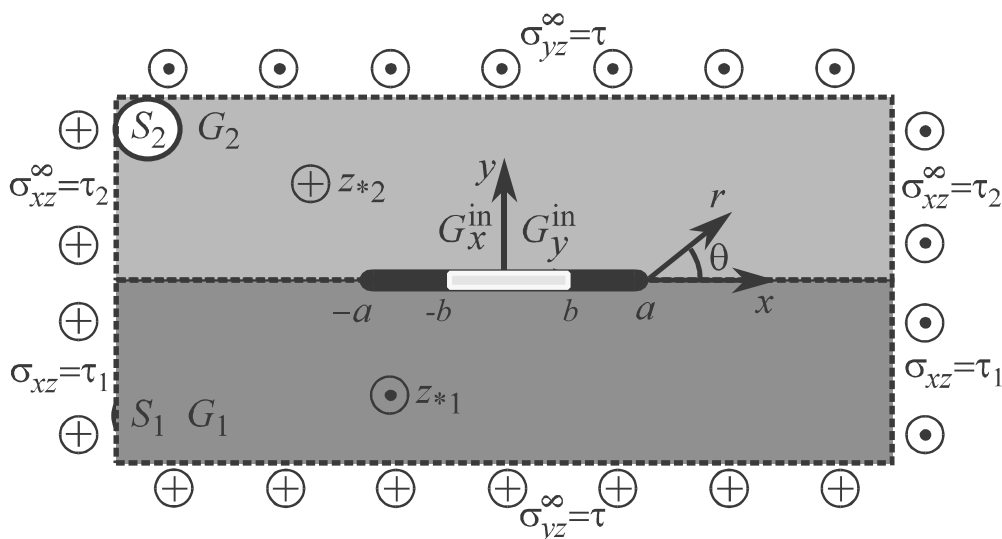


Рис. 1. Силова й геометрична схема задачі

Приймаємо, що матеріал включення ортотропно нелінійний і задовольняє в загальному випадку залежності

$$\frac{\partial w^{in}}{\partial x} = \mathfrak{I}_x^{in}(\sigma_{xz}^{in}), \quad \frac{\partial w^{in}}{\partial y} = \mathfrak{I}_y^{in}(\sigma_{yz}^{in}) \tag{1}$$

або

$$\sigma_{xz}^{in} = G_x^{in}(\sigma_{xz}^{in}) \frac{\partial w^{in}}{\partial x}, \quad \sigma_{yz}^{in} = G_y^{in}(\sigma_{yz}^{in}) \frac{\partial w^{in}}{\partial y}. \tag{2}$$

Співвідношення (1)-(2) у часткових випадках може мати вигляд, зокрема, моделі деформування Рамберга-Осгуда зі сталими деформування  $M_s, A_s, B_s, s = \{x; y\}$  матеріалу включення (рис. 2)

$$\frac{\partial w^{in}}{\partial x} = A_x \sigma_{xz}^{in} \left( 1 + B_x (\sigma_{xz}^{in})^{M_x} \right), \quad \frac{\partial w^{in}}{\partial y} = A_y \sigma_{yz}^{in} \left( 1 + B_y (\sigma_{yz}^{in})^{M_y} \right), \tag{3}$$

чи звичайної моделі пружно-пластичного деформування зі зміцненням (рис. 3)

$$\frac{\partial w^{in}}{\partial x} = (\sigma_{xz}^{in} - \tau_{pl}) \frac{G_{0x} - G_{1x}}{G_{0x} G_{1x}}, \quad \frac{\partial w^{in}}{\partial y} = (\sigma_{yz}^{in} - \tau_{pl}) \frac{G_{0y} - G_{1y}}{G_{0y} G_{1y}}. \tag{4}$$

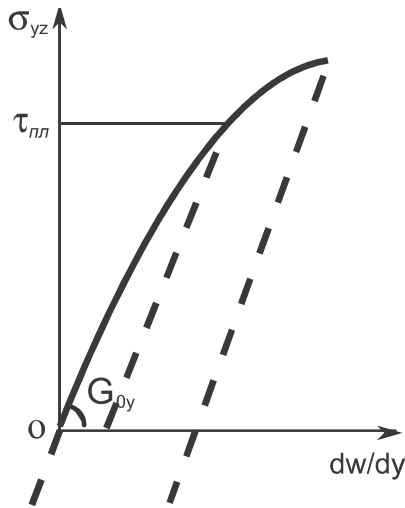


Рис. 2. Схема деформування Рамберга-Осгуда

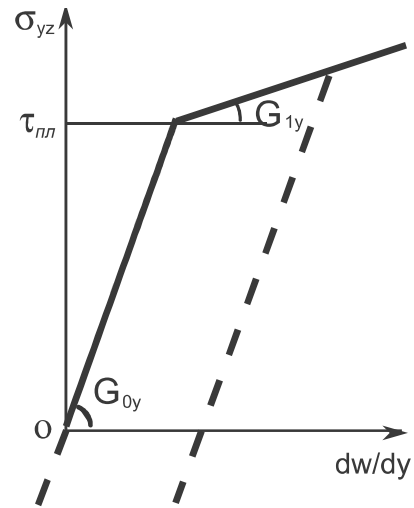
 $G_{1y}$ 

Рис. 3. Діаграма пружно-пластичного деформування з лінійним зміцненням

Припустимо, що величина і напрямок дії зовнішніх силових факторів, що здійснюють поздовжній зсув масиву, змінюються квазістатично. Зовнішнє навантаження визначають монотонно змінні в часових проміжках  $[t_{(p-1)}; t_{(p)}]$  покрокові послідовності силових факторів: рівномірно розподілених на нескінченності напружень  $\sigma_{yz}^{\infty} = \sum_p \tau_{(p)}(t)$ ,  $\sigma_{xz}^{\infty} = \sum_p \tau_{k(p)}(t)$ , зосереджених сил інтенсивності  $Q_k(t) = \sum_p Q_{k(p)}(t)$ , гвинтових дислокацій зі складовою вектора Бюргера  $b_k(t) = \sum_p b_{k(p)}(t)$  в точках  $z_{*k} \in S_k$  ( $k=1,2$ ),  $(p)$  – номер кроку навантажування. Напруження на нескінченності повинні в довільний момент часу задовольняти умові  $\tau_{2(p)}(t)G_1 = \tau_{1(p)}(t)G_2$  для забезпечення прямолінійності межі поділу матеріалів. Застосування під час розв'язування задачі однакового традиційного позначення для осі  $z$  та комплексної змінної  $z = x + iy$  не повинно викликати непорозумінь.

Наявність тонкого включення в масиві моделюється стрибком компонент векторів напружень і переміщень на  $L'$  [1]:

$$\begin{aligned} [\sigma_{yz}]_{h(p)} &\cong \sigma_{yz}^- - \sigma_{yz}^+ = f_{3(p)}(x, t), \\ \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{h(p)} &\cong \frac{\partial w^-}{\partial x} - \frac{\partial w^+}{\partial x} = \left[ \frac{\sigma_{xz}}{G} \right]_{h(p)} \cong \frac{\sigma_{xz}^-}{G_1} - \frac{\sigma_{xz}^+}{G_2} = f_{6(p)}(x, t), \quad x \in L'; \\ f_{3(p)}(x, t) &= f_{6(p)}(x, t) = 0, \quad \text{якщо } x \notin L', \end{aligned} \quad (5)$$

де  $(p)$  – номер кроку навантажування;  $t$  – деякий момент часу. Тут і далі позначено:  $[\varphi]_h = \varphi(x, -h) - \varphi(x, +h)$ ,  $\langle \varphi \rangle_h = \varphi(x, -h) + \varphi(x, +h)$ ; індекси «+» та «-» відповідають граничним значенням функцій на верхньому і нижньому краях лінії  $L$ .

Контакт між півпросторами уздовж лінії  $L'' = L \setminus L'$  та між масивом і берегами включення уздовж  $L'$  вважаємо ідеальним

$$w^{in}(x, \pm h) = w_k(x, \pm h), \quad \sigma_{yz}^{in}(x, \pm h) = \sigma_{yzk}(x, \pm h) \quad x \in L'. \quad (6)$$

Математична модель тонкого включення подається у вигляді умов взаємодії [1, 3], які еквівалентні до умов неідеального контакту між прилеглими до включення поверхнями матриці. В основі пропонованої методики моделювання тонкого об'єкту лежить принцип

об'ємного інтегрування визначальних співвідношень, що описують фізико-механічний стан матеріалу включення, з наступним урахуванням малості одного з лінійних розмірів включення:

$$\begin{cases} G_x^{in}(\sigma_{xz}^{in}) \left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle_h(x, t) - 2\sigma_{xz}^{in}(-a) - \frac{1}{h} \int_{-a}^x [\sigma_{yz}]_h(\xi, t) d\xi = 0, \\ G_y^{in}(\sigma_{yz}^{in}) [w]_h(x, t) + h \langle \sigma_{yz} \rangle_h(x, t) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Використання методики [1, 7, 8] дозволяє отримати залежності, згідно з якими компоненти тензора напружень і похідні вектора переміщень на лінії  $L$  необмеженої площини  $S$ , а також всередині неї дорівнюють

$$\begin{aligned} \sigma_{yz(1)}^\pm(x, t) &= \mp p_k f_{3(1)}(x, t) - C g_{6(1)}(x, t) + \sigma_{yz(1)}^{0\pm}(x, t), \\ \sigma_{xz(1)}^\pm(x, t) &= \mp C f_{6(1)}(x, t) + p_k g_{3(1)}(x, t) + \sigma_{xz(1)}^{0\pm}(x, t), \\ g_{r(p)}(z, t) &\equiv \frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{f_{r(p)}(x, t) dx}{x - z}, \quad p_k = \frac{G_k}{G_1 + G_2}, \quad C = G_{3-k} p_k, \\ \sigma_{yz(1)}^0(z, t) + i \sigma_{xz(1)}^0(z, t) &= \sigma_{yz(1)}^0(z, t) + i \sigma_{xz(1)}^0(z, t) + i p_k g_{3(1)}^n(z, t) - C g_{6(1)}^n(z, t) \\ &\quad (z \in S_k; \quad r = 3, 6; \quad k = 1, 2). \end{aligned} \quad (8)$$

Величини, відзначені індексом «0» зверху, відповідають НДС масиву без включень за відповідного зовнішнього навантаження (однорідний розв'язок). Тут і далі для кожного кроку навантажування використані позначення [8]:

$$\begin{aligned} \sigma_{yz(p)}^0(z, t) + i \sigma_{xz(p)}^0(z, t) &= \tau_{(p)}(t) + i \left\{ \tau_{k(p)}(t) + D_{k(p)}(z, t) + \right. \\ &\quad \left. + (p_k - p_j) \bar{D}_{k(p)}(z, t) + 2 p_k D_{j(p)}(z, t) \right\}, \\ D_{k(p)}(z, t) &= - \frac{Q_{k(p)}(t) + i G_k b_{k(p)}(t)}{2\pi(z - z_{*k})} \quad (z \in S_k, \quad k = 1, 2; \quad j = 3 - k). \end{aligned} \quad (9)$$

Використовуючи (8), (9) та крайові умови (5), (6) отримаємо з моделі (7) систему сингулярних інтегральних рівнянь (СІР)

$$\begin{cases} (p_2 - p_1) f_{6(1)}(x, t) + 2 p g_{3(1)}(x, t) - \frac{1}{h G_x^{in}(\sigma_{xz}^{in})} \int_{-a}^x f_{3(1)}(\xi, t) d\xi = F_{3(1)}(x, \tau, t), \\ (p_2 - p_1) f_{3(1)}(x, t) + 2 C g_{6(1)}(x, t) - \frac{G_y^{in}(\sigma_{yz}^{in})}{h} \int_{-a}^x f_{6(1)}(\xi, t) d\xi = F_{6(1)}(x, \tau, t), \end{cases} \quad (10)$$

$$F_{3(1)}(x, \tau, t) = \frac{2}{G_x^{in}(\sigma_{xz}^{in})} \sigma_{xz}^{0k}(-a) - (\sigma_{xz2}^0(x, t)/G_2 + \sigma_{xz1}^0(x, t)/G_1),$$

$$F_{6(1)}(x, \tau, t) = \langle \sigma_{yz}^0 \rangle(x, t) - G_y^{in}(\sigma_{yz}^{in}) \left( \frac{\sigma_{yz2}^0(x, t)}{G_2} + \frac{\sigma_{yz1}^0(x, t)}{G_1} \right) - \frac{G_y^{in}(\sigma_{yz}^{in})}{h} [w^0](-a)$$

з додатковими умовами силового балансу та однозначності переміщень при обході навколо тонкого дефекту

$$\int_{-a}^a f_{3(1)}(\xi, t) d\xi = 2h(\sigma_{xz}^{in}(a) - \sigma_{xz}^{in}(-a)), \quad \int_{-a}^a f_{6(1)}(\xi, t) d\xi = [w](a) - [w](-a). \quad (11)$$

До розв'язування (10)-(11) використовується методика [1] з урахуванням того, що характеристична частина ССІР не залежить від нелінійних коефіцієнтів. У результаті застосування згаданої методики ССІР зводиться на кожному кроці навантажування до системи лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) на невідомі коефіцієнти розвинення функцій стрибка  $f_{k(1)}(x, t)$  в ряди за поліномами Чебишова.

Залежність  $G_{x(1)}^{in}(\sigma_{xz}^{in}, t)$ ,  $G_{y(1)}^{in}(\sigma_{yz}^{in}, t)$  від поточного НДС масиву породжує істотні труднощі при розрахунку внаслідок його змінності вздовж  $L$ . Введемо позначення:  $\gamma_{xm}^j = G_{x(1)}^{in}(\sigma_{xz}^{in}(x_m))$ ,  $\gamma_{ym}^j = G_{y(1)}^{in}(\sigma_{yz}^{in}(x_m))$  – величини змінних модулів зсуву в точках колокації  $x_m$  ( $m = \overline{1, n}$ ),  $j$  – номер наближення. Далі пропонується відповідна стратегія розв'язування:

- 1) на початковому кроці значення  $\gamma_{xm}^0 = G_{xm(1)}^{in}(0, 0)$ ,  $\gamma_{ym}^0 = G_{ym(1)}^{in}(0, 0)$  вибираються рівними  $G_{0x}^{in}$ ,  $G_{0y}^{in}$ , що відповідають стартовому моменту процесу навантажування при відсутності будь-яких залишкових НДС. Ці значення однакові у всіх точках колокації  $x_m$  ( $m = \overline{1, n}$ );
- 2) починаємо навантажування з деякого значення  $\tau$  чи  $Q_k$  згідно з вибраною схемою;
- 3) розв'язуємо СЛАР. Підставимо отримані розв'язки у співвідношення (10), а потім у (8), обчислюючи НДС в кожній з точок колокації;
- 4) обчислюємо з використанням (2) за заданою схемою деформування відповідне наближення модуля зсуву в кожній точці колокації

$$\gamma_{xm}^j = G_{xm(1)}^{in}(\sigma_{xz}^{in}(x_m, \gamma_{xm}^{j-1})), \quad \gamma_{ym}^j = G_{ym(1)}^{in}(\sigma_{yz}^{in}(x_m, \gamma_{ym}^j)); \quad (12)$$

- 5) перевіряємо, чи виконується в кожній точці колокації задана точність. Якщо «ні», то мінімізуємо відхилення розрахункового модуля пружності від заданого в (2), повторюючи схему розрахунку від пункту 3) з новими значеннями модулів у кожній точці колокації (12), відповідними для даного НДС.

Досліджено, що такий ітераційний процес є збіжним. Отримані на першому (початковому) кроці в момент часу його завершення  $t_{(1)}$  значення НДС масиву матимуть на другому кроці (навантаженні чи розвантаженні) мати зміст залишкових. Тому застосуємо для отримання розв'язку методика [8].

Вважаємо, що постановка задачі на другому кроці відрізняється від постановки задачі на попередньому кроці лише наявністю вже заданих стрибків переміщень та напружень, спричинених попереднім кроком навантажування. Тоді подання загального поля напружень має вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}(z, t) + i\sigma_{xz}(z, t) = & \sigma_{yz(1)}(z, t_{(1)}) + i\sigma_{xz(1)}(z, t_{(1)}) + \sigma_{yz(2)}^0(z, t) + \\ & + i\sigma_{xz(2)}^0(z, t) + ip_k g_{3(2)}(z, t) - Cg_{6(2)}(z, t) \quad (z \in S_k; \quad k = 1, 2; \quad j = 3 - k). \end{aligned} \quad (13)$$

Переміщення та напруження повинні задовольняти крайові умови (6) на  $L'$ . Тоді з урахуванням (13) можна сформулювати таку локальну задачу для другого кроку:

$$\begin{aligned} \sigma_{yz(2)}(z, t) + i\sigma_{xz(2)}(z, t) = & \{ \sigma_{yz}(z, t) + i\sigma_{xz}(z, t) \} - \\ & - \{ \sigma_{yz(1)}(z, t_{(1)}) + i\sigma_{xz(1)}(z, t_{(1)}) \} \quad (z \in S_k; \quad k = 1, 2; \quad j = 3 - k) \end{aligned} \quad (14)$$

з крайовими умовами (6), які перепишемо у вигляді

$$w_{(1)}^{in}(x, \pm h) + w_{(2)}^{in}(x, \pm h) = w_{k(1)}(x, \pm h) + w_{k(2)}(x, \pm h), \quad x \in L',$$

$$\sigma_{yz(1)}^{in}(x, \pm h) + \sigma_{yz(2)}^{in}(x, \pm h) = \sigma_{yzk(1)}(x, \pm h) + \sigma_{yzk(2)}(x, \pm h),$$

або

$$w_{(2)}^{in}(x, \pm h) = \{w_{k(1)}(x, \pm h) - w_{(1)}^{in}(x, \pm h)\} + w_{k(2)}(x, \pm h), \quad x \in L' \tag{15}$$

$$\sigma_{yz(2)}^{in}(x, \pm h) = \{\sigma_{yzk(1)}(x, \pm h) - \sigma_{yz(1)}^{in}(x, \pm h)\} + \sigma_{yzk(2)}(x, \pm h).$$

Вирази у фігурних дужках дорівнюють нулю в силу (8) на першому кроці і, отже, умови (15) отримують ідентичний до (6) вигляд

$$w_{(2)}^{in}(x, \pm h) = w_{k(2)}(x, \pm h), \quad \sigma_{yz(2)}^{in}(x, \pm h) = \sigma_{yzk(2)}(x, \pm h) \quad x \in L'. \tag{16}$$

Оскільки вигляд (14), (16) такий самий, як вигляд (6), (8), то ССІР для визначення локальних (щодо досягнутого у момент часу  $t_{(1)}$  НДС) стрибків переміщень та напружень  $f_{3(2)}$ ,  $f_{6(2)}$  від локального (для цього кроку) навантаження

$$\tau_{(2)}(t) = \tau(t) - \tau_{(1)}(t), \quad \tau_{k(2)}(t) = \tau_k(t) - \tau_{k(1)}(t),$$

$$Q_{k(2)}(t) = Q_k(t) - Q_{k(1)}(t_{(1)}) \quad (k=1,2; \quad t > t_{(1)}) \tag{17}$$

матиме аналогічний до (10), (11) вигляд.

Залежність  $G_{x(2)}^{in}(\sigma_{xz}^{in}, t)$ ,  $G_{y(2)}^{in}(\sigma_{yz}^{in}, t)$  від поточного локального НДС на цьому кроці вже не може бути обчислена так, як на першому кроці, бо вимагає врахування повного НДС. Тому пропонується відповідний алгоритм їх визначення:

- 1) на наступному кроці як початкові вибираються значення  $G_{x(1)}^{in}(\sigma_{xz}^{in}, t_{(1)})$ ,  $G_{y(1)}^{in}(\sigma_{yz}^{in}, t_{(1)})$ , що відповідають завершальному моменту процесу навантажування на попередньому кроці;
- 2) продовжуємо зовнішнє навантажування як локальне, згідно з (17), за обраною схемою навантажування;
- 3) розв'язуємо СЛАР. Підставляємо отримані розв'язки у співвідношення (12), а потім у (8), обчислюючи локальне НДС у кожній з точок колокації;
- 4) обчислюємо згідно з (14) повний НДС, вважаючи значення НДС з попереднього кроку залишковим;
- 5) обчислюємо, з використанням (1), (2), (12), наступне наближення модуля зсуву у кожній точці колокації;
- 6) перевіряємо, чи виконується в кожній точці колокації задана точність. Якщо «так», то процес розрахунку на цьому кроці завершено і можна переходити до наступного кроку навантаження, вибравши відповідні для кожної точки колокації значення  $G_{x(2)}^{in}(\sigma_{xz}^{in}, t_{(2)})$ ,  $G_{y(2)}^{in}(\sigma_{yz}^{in}, t_{(2)})$  (на пункт 1). Якщо «ні», то мінімізуємо відхилення розрахункового модуля пружності від заданого в (1), повторюючи схему розрахунку від пункту 3) з новими значеннями модулів у кожній точці колокації (12), відповідними для даного НДС. Такий інкрементальний процес можна продовжити на довільну кількість кроків.

Детальніший аналіз розв'язку задачі зробимо для часткового випадку рівності пружних характеристик півпросторів ( $G_1 = G_2 = G$ ), схеми навантаження зосередженими силами інтенсивністю  $\tilde{Q} = Q/aG$  ( $Q_2 = -Q_1 = Q$ ,  $z_2 = -z_1 = id$ ) у симетричному циклі і

деформаційних характеристик включення  $\tilde{G}_{0y} = G_{0y} / \tau_{pl}$ , що відповідають моделі пружно-пластичного деформування зі зміцненням (4). На рисунку 4 показана залежність розміру зони пластичності  $\tilde{b} = b/a$  на від інтенсивності прикладених сил  $\tilde{Q}$  та віддаленості точок їх прикладання  $\tilde{d} = d/a$ . Рис. 5 ілюструє гістерезисну поведінку деформацій у симетричному циклі навантаження.

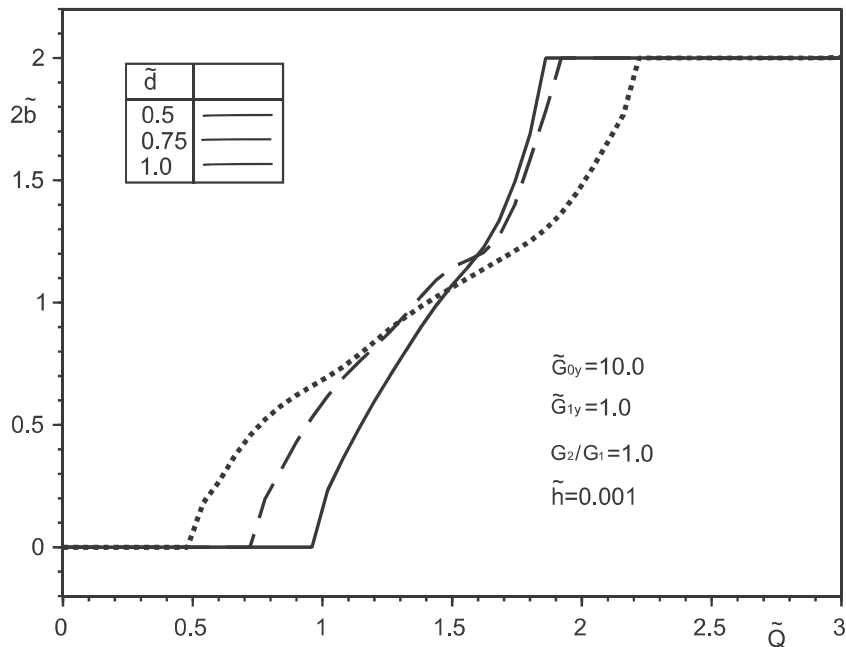


Рис. 4. Вплив параметрів навантаження на розмір зони пластичності

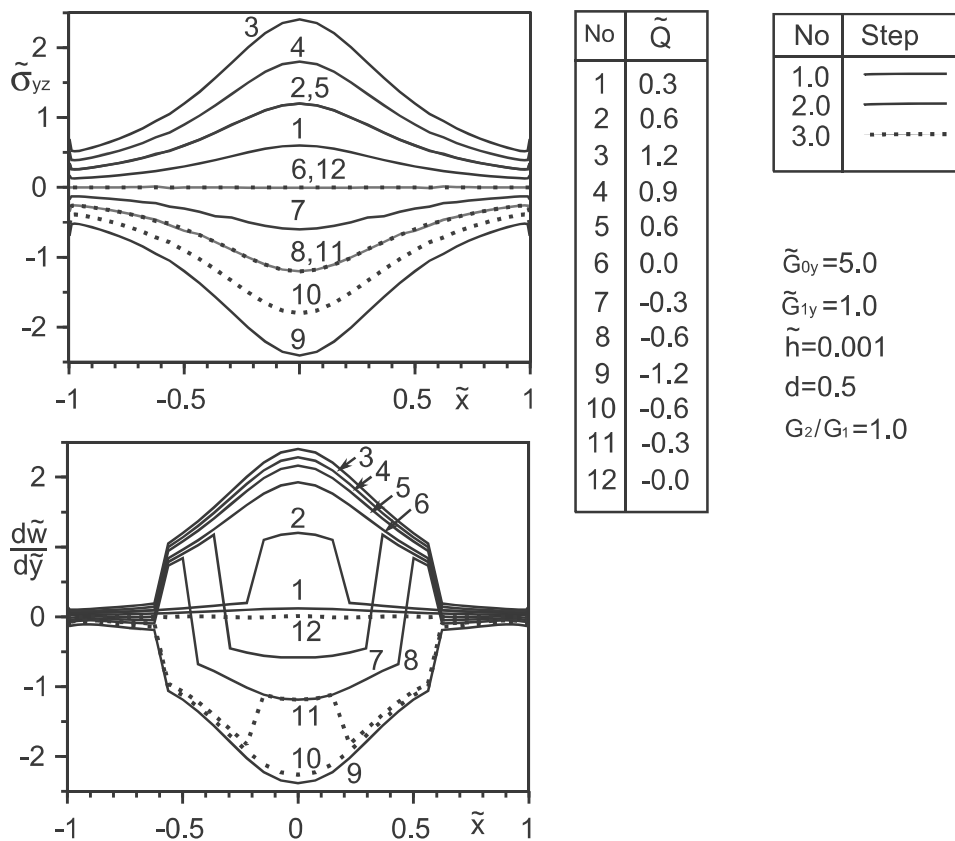


Рис. 5. Гістерезисна поведінка НДС включення при циклічному навантаженні



Отже, побудовано модель тонкого включення з істотно нелінійними механічними властивостями. З її використанням, методом задачі спряження граничних значень аналітичних функцій та методу функцій стрибка, побудована ССІР із змінними коефіцієнтами, для розв'язування якої запропоновано збіжний ітераційний числово-аналітичний метод. Для випадків багатокрокового процесу навантажування розвинуто інкрементальну методику розрахунку НДС у тілі.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Монографія. Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. 716 с.
2. Архипенко К. М., Кривий О. Ф. Міжфазна балка при різних типах контактної взаємодії з неоднорідною анізотропною площиною. *Машинознавство*. 2008. № 3(129). С. 16–21.
3. Сулим Г. Т., Піскозуб Й. З. Умови контактної взаємодії (огляд). *Мат. методи і фіз.-мех. поля*. 2004. 47, № 3. С. 110–125.
4. Rice J. R., Rosengren G. F. Plane strain deformation near a crack tip in power law hardening material. *J. of the Mechanics and Physic of Solids*. 1968. V. 16. P. 1–12.
5. Кундрат М. М., Сулим Г. Т. Зони передруйнування в композиції з пружним високомодульним включенням при симетричному та антисиметричному навантаженнях. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*. Львів. 2003. С. 322–324.
6. Мартыняк Р. М., Криштафович А. А. Фрикционный контакт двух упругих полуплоскостей с локальными поверхностными выемками. *Трение и износ*. 2000. 21, № 4. С. 350–360.
7. Піскозуб Л. Г. Поздовжній зсув зосередженою силою біматеріалу з міжфазною тріщиною з урахуванням тертя. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2014. Вип. 20. С. 160–172.
8. Heorhiy Sulym, Lyubov Piskozub, Yosyf Piskozub, Iaroslav Pasternak Antiplane Deformation of a Bimaterial Containing an Interfacial Crack with the Account of Friction. 2. Repeating and Cyclic Loading. *ACTA Mechanica et Automatica*. 2015. Vol. 9, No. 3. P. 178–185.
9. Пастернак Я. М., Сулим Г. Т., Пастернак Р. М. Поздовжній зсув тіла з тонкими стрічковими накладками та пружними включеннями змінної жорсткості при їхньому ідеальному та неідеальному контактах. *Механіка і фізика руйнування будівельних конструкцій: збірник наукових праць*. Вип. 9. Львів: Каменяр, 2012. С. 98–113.

### REFERENCES

1. Sulym, H. T. (2007). Bases of mathematical theory of thermo-elastic equilibrium of solids containing thin inclusions. L'viv: Research and Publishing center of NTSh.
2. Arhipenko, K. M. & Kriviy, O. F. (2008). Interphase beam at different types of contact interaction of heterogeneous anisotropic plane. *Mashynoznavstvo*, No. 3(129), pp. 16-21 (in Ukrainian).
3. Sulym, H. T. & Piskozub, J. Z. (2004). Contact conditions (a survey). *Mat. metody i fiz.-meh. polya* (Journal of Mathematical Science), 47, No. 3, pp. 110-125 (in Ukrainian).
4. Rice, J. R. & Rosengren, G. F. (1968). Plane strain deformation near a crack tip in power law hardening material. *J. of the Mechanics and Physic of Solids*, Vol. 16, pp. 1-12.
5. Kundrat, M. M. & Sulym, H. T. (2003). Prefracture zone in the composition of high-modulus elastic inclusion in the symmetric and antisymmetric load. *Matematychni problemy mehaniky neodnorodnyh struktur*, Lviv, pp. 322-324 (in Ukrainian).
6. Martyniak, R. & Kryshatfovych, A. (2000). Friction contact of two elastic half-planes with local recesses in boundary. *J. Friction and Wear*, 21, No. 4, pp. 6-15.
7. Piskozub, L. G. (2014). Longitudinal shear by concentrated force of bi -material with taking into account friction in the interfacial crack, *Physic-Mathematical Modeling and Informational Technologies*, 20, pp. 160-172 (in Ukrainian).
8. Heorhiy Sulym, Lyubov Piskozub, Yosyf Piskozub & Iaroslav Pasternak (2015). Antiplane Deformation of a Bimaterial Containing an Interfacial Crack with the Account of Friction. 2. Repeating and Cyclic Loading. *ACTA Mechanica et Automatica*, Vol. 9, No. 3, pp. 178-185.
9. Pasternak, I. M., Sulym, G. T. & Pasternak, R. M. (2012). Longitudinal shear of the body with thin straps and elastic inclusions of variable stiffness at their ideal and nonideal contacts. *Mechanika i fizyka ruynuvannia budivelnych konstrukciy*, Lviv, Kameniari, 9, pp. 98-113 (in Ukrainian).