

УДК 519.3

ГЕОМЕТРИЯ КОНОИДА И ФИЗИЧЕСКАЯ НЕАДЕКВАТНОСТЬ СТАНДАРТНЫХ СЕРЕНДИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

¹Хомченко А. Н., ²Литвиненко Е. И., ²Астионенко И. А.

¹Черноморский национальный университет им. П. Могилы,
ул. 68 Десантников, 10, г. Николаев, Украина

²Херсонский национальный технический университет,
Бериславское шоссе, 24, г. Херсон, Украина

¹khan@chdu.edu.ua, ²mmkntu@gmail.com

Рассматривается известный парадокс «гравитационного отталкивания», возникающий в задачах о поузловом распределении равномерной массовой нагрузки на конечном элементе. Показано, что в задаче серендиповой аппроксимации на стандартных элементах решающая роль принадлежит коноидам, которые ассоциируются с промежуточными узлами на сторонах квадратного носителя. Именно коноид (линейчатая поверхность) делает модель стандартного элемента чрезмерно «жесткой». От этого недостатка можно избавиться, заменив поверхность нулевой гауссовой кривизны поверхностью отрицательной кривизны.

Ключевые слова: конечный элемент, серендипова аппроксимация, коноид, гауссова кривизна.

ГЕОМЕТРИЯ КОНОЇДА І ФІЗИЧНА НЕАДЕКВАТНІСТЬ СТАНДАРТНИХ СЕРЕНДИПОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ

¹Хомченко А. Н., ²Литвиненко О. І., ²Астіоненко І. О.

¹Чорноморський національний університет ім. П. Могили,
вул. 68 Десантників, 10, м. Миколаїв, Україна

²Херсонський національний технічний університет,
Бериславське шосе, 24, м. Херсон, Україна

¹khan@chdu.edu.ua, ²mmkntu@gmail.com

Розглядається відомий парадокс «гравітаційного відштовхування», який виникає в задачах про поузловий розподіл рівномірного вагового навантаження на скінченному елементі. Показано, що в задачі серендипової апроксимації на стандартних елементах вирішальна роль належить коноїдам, які асоціюються з проміжними вузлами на сторонах квадратного носія. Саме коноїд (лінійчата поверхня) робить модель стандартного елемента надмірно «жорсткою». Цього недоліку можна позбутися, замінивши поверхню нульової гауссової кривини поверхню від'ємної кривини.

Ключові слова: скінченний елемент, серендипова апроксимація, коноїд, гауссова кривина.

GEOMETRY OF CONOID AND PHYSICAL INADEQUACY OF STANDARD SERENDIPITY ELEMENTS

¹Khomchenko A. N., ²Litvinenko Ye. I., ²Astionenko I. A.

¹Petro Mohyla Black Sea National University,
68 Desantnikov str, 10, Mykolaiv, Ukraine

²Kherson National Technical University,
Berislavskoe shosse, 24, Kherson, Ukraine

¹khan@chdu.edu.ua, ²mmkntu@gmail.com

The well-known paradox of “gravitational repelling” which occurs in the problems on per-node distribution of equal mass load on the finite element is researched. It is shown that in the problem of serendipity approximation on the standard elements the decisive role belongs to conoids, which are associated with transitional nodes on the sides of square carrier. The rise of physical inadequacy in per-node distribution of equal mass load on the finite element has been called by the use of conoid fragments when the approximating surface is forming. The finite elements of the second, third and fourth order have been researched. It is demonstrated that conoids influence grows together with the increase of the finite element order. This is conoid (ruled surface) which makes the model of standard element excessively “hard”. We mean not only mechanical “hardness” such as higher resistance to curve, but also the mathematical “hardness”, as the uniqueness (without alternative) of solving the

mathematical problem. One can get rid of this disadvantage changing the surface of zero Gaussian curvature by the surface of negative curvature. But the Taylor's method of systematic generation of bases as well as the method of inverse matrix result in the same standard functions. The alternative bases built by authors on plain and space serendipity elements implement physically adequate distributions of nodal loads. This result has been received thanks to the use of surfaces of negative Gaussian curvature when building the basis functions.

Key words: finite elements, serendipity approximation, conoid, Gaussian curvature.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Стандартные серендиповы элементы (ССЭ) были получены подбором в 1968 г. Эргатудисом, Айронсом и Зенкевичем [1] в связи с задачей об изопараметрическом преобразовании исправленного четырехугольника в квадрат. Как показала практика, полиномиальные базисы стандартной модели вполне справляются с задачей, ради которой они подбирались. С этой точки зрения модель можно считать адекватной. Однако уже через три года Зенкевич в своей книге [2] обратил внимание специалистов на физическую неадекватность ССЭ высших порядков. Речь идет о задаче поузловой локализации равномерной массовой нагрузки (проблема Эргатудиса-Айронса-Зенкевича). К сожалению, ни сам Зенкевич, входящий (по мнению экспертов) в первую пятерку специалистов по МКЭ, ни его ученики и последователи так и не смогли объяснить парадокс «гравитационного отталкивания». В конце концов Зенкевич высказал мнение, что «негативизм» в спектре узловых нагрузок неустраним и посоветовал смириться с этим недостатком ССЭ.

АНАЛИЗ ПРЕДШЕСТВУЮЩИХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В 1982 г. [3] удалось сконструировать на плоских и пространственных серендиповых элементах (СЭ) альтернативные базисы, реализующие физически адекватные спектры узловых нагрузок. Несмотря на то, что «негативизм» был устранен, еще долго никому не удавалось найти обоснованное и содержательное объяснение «парадокса Зенкевича». Оказалось, что устранить недостаток модели легче, чем объяснить причины его возникновения. Сейчас мы готовы обсуждать причины. Первая попытка сделана в [4]. В данной статье мы возвращаемся к этой теме и пытаемся объяснить, как и почему наука восторжествовала над здравым смыслом.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Изучая геометрию серендиповых поверхностей, мы пришли к выводу, что «виновником» возникновения парадоксальных результатов является коноид. Напомним определение: коноид – линейчатая поверхность, все прямолинейные образующие которой параллельны одной и той же плоскости и пересекают одну и ту же прямую (ось коноида). Явление физической неадекватности наблюдается на всех СЭ высших порядков. Элемент первого порядка с четырьмя узлами в вершинах безупречен как математически, так и физически. На рис. 1 показаны ССЭ соответственно второго, третьего и четвертого порядков. В случае необходимости читатель самостоятельно сможет продолжить этот ряд.

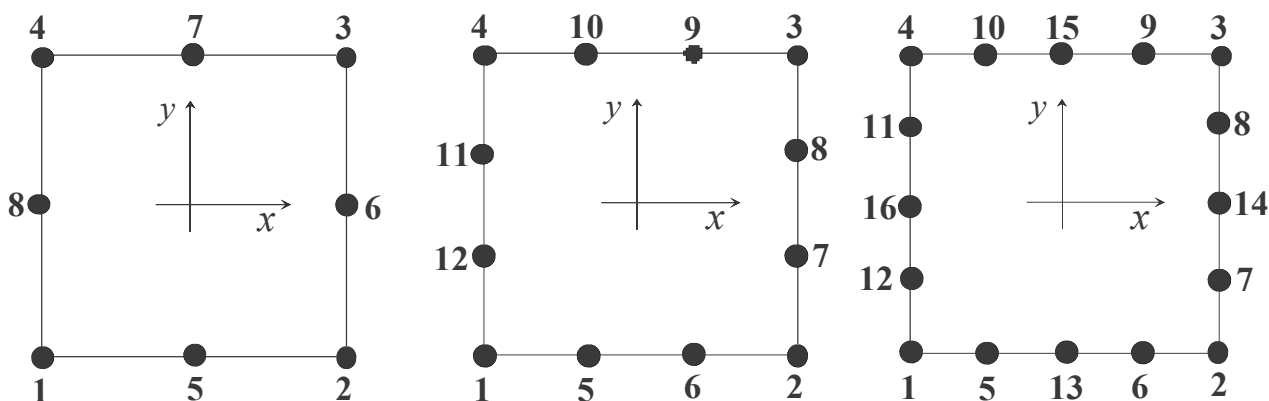


Рис. 1. ССЭ высших порядков: Q_8 – 2-го порядка, Q_{12} – 3-го порядка, Q_{16} – 4-го порядка ($|x| \leq 1, |y| \leq 1$)

В центре нашего внимания находятся узлы на сторонах квадрата. Именно с этими узлами ассоциируются коноиды. На стандартных элементах (со стандартными базисами) в задаче серендиповой аппроксимации решающая роль принадлежит коноидам. Причем эта роль возрастает с увеличением порядка СЭ. Так, на СЭ 2-го порядка коноидов 50%, на СЭ 3-го порядка – 67%, на СЭ 4-го порядка – 75%. Кажется, что использование фрагментов коноида при формообразовании аппроксимирующей поверхности на конечном носителе не предвещает нежелательных последствий. Однако это не так. Ниже мы покажем, что коноид делает модель чрезмерно «жесткой». Здесь уместно вспомнить о «жестких» и «мягких» математических моделях (по В. И. Арнольду). Мы имеем в виду не только механическую «жесткость», как повышенную сопротивляемость изгибу, но и математическую «жесткость», как единственность (без альтернативы) решения математической задачи. Когда-то (в начале XX века) Адамар уверял нас, что единственность – это хорошо. Сегодня мы знаем, насколько ошибался выдающийся французский математик. Мы не будем рассказывать о достижениях А. Н. Тихонова и его учеников в теории некорректных задач, а просто покажем конкретные результаты наших исследований «парадокса Зенкевича».

Нам понадобятся базисные полиномы, отвечающие узлам на стороне квадрата. Понятно, что можно ограничиться лишь одной функцией, например, $N_5(x, y)$ на Q8 и Q12, и двумя функциями, например, $N_5(x, y)$ и $N_{13}(x, y)$ на Q16.

В этот перечень мы добавим «угловую» функцию, например, $N_1(x, y)$, чтобы читатель мог проконтролировать свойства базисов. Как известно, финитные базисные функции в МКЭ должны обладать следующими свойствами:

$$N_i(x_k; y_k) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k; \end{cases} \quad \sum_{i=1}^M N_i(x_k; y_k) = 1, \tag{1}$$

где i – номер функции; k – номер узла; M – общее число узлов на границе ССЭ.

Приведем типичные базисные функции для наших моделей (рис. 1).

Для Q8:

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= -\frac{1}{4}(1-x)(1-y)(x+y+1), \\ N_5(x, y) &= \frac{1}{2}(1-x^2)(1-y). \end{aligned} \tag{2}$$

Для Q12:

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= \frac{1}{32}(1-x)(1-y)(-10+9(x^2+y^2)), \\ N_5(x, y) &= \frac{9}{32}(1-x^2)(1-3x)(1-y). \end{aligned} \tag{3}$$

Для Q16:

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= \frac{1}{12}(1-x)(1-y)(2x+2y+1)(2x+2y+3)(-x-y-1), \\ N_5(x, y) &= \frac{2}{3}(1-x^2)(2x-1)x(1-y), \\ N_{13}(x, y) &= \frac{1}{2}(1-x^2)(1-4x^2)(1-y). \end{aligned} \tag{4}$$

Стоит отметить, что в мировой литературе по МКЭ практически отсутствует информация о Q16. Поэтому в (4) приведена авторская версия стандартного базиса.

Нагрузка на узел i со времен Ньютона и Котеса вычисляется как интегральное среднее соответствующей функции $N_i(x, y)$:

$$\gamma_i = \frac{1}{S} \iint_D N_i(x, y) dx dy, \quad (5)$$

где γ_i – нагрузка на узел i ; S – площадь элемента; D – область интегрирования ($|x| \leq 1, |y| \leq 1$).

Вычисления дают следующие результаты:

$$\begin{aligned} \text{для } Q8: \quad \gamma_1 &= -\frac{1}{12}; \quad \gamma_5 = \frac{1}{3}; \\ \text{для } Q12: \quad \gamma_1 &= -\frac{1}{8}; \quad \gamma_5 = \frac{3}{16}; \\ \text{для } Q16: \quad \gamma_1 &= -\frac{31}{180}; \quad \gamma_5 = \frac{32}{180}; \quad \gamma_{13} = \frac{12}{180}. \end{aligned} \quad (6)$$

Понятно, что из суммы (1) вытекает $\sum_{i=1}^M \gamma_i = 1$, однако за сохранение весового баланса пришлось «заплатить» нарушением физической адекватности спектров (6). Заметим, что во всех случаях неугловые узлы перегружены так, что суммарная нагрузка только в этих узлах уже превосходит единицу. Ясно, что в вершинах элемента нагрузки будут отрицательными (феномен «гравитационного отталкивания»).

Нетрудно определить (например, методом параллельных сечений), что поверхности $N_5(x, y)$ и $N_{13}(x, y)$ – классические коноиды (см. определение) с осью $y=1$ ($-1 \leq x \leq 1$), лежащей в плоскости $Z=0$ (в плоскости носителя). Поэтому двойной интеграл дает объем тела, ограниченного коноидом и плоскостью носителя. Формула (5) определяет среднюю аппликуату коноида. На рис. 2 показан коноид $N_5(x, y)$ модели Q8.

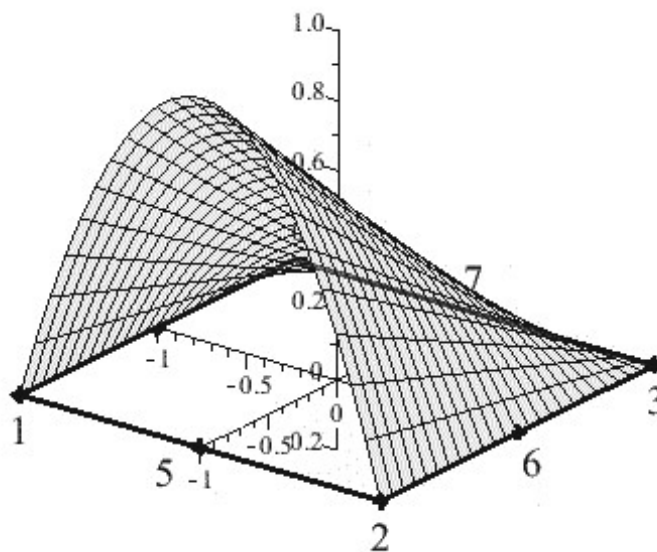


Рис. 2. Коноид $N_5(x, y)$ модели Q8

Читатель уже догадался, как уменьшить среднюю аппликату поверхности $N_5(x, y)$. Нужно просто заменить прямолинейную образующую вогнутой образующей. Именно так мы поступаем при создании альтернативных моделей СЭ. Непонятно почему, но именно коноид был изначально заложен в определение базисных функций, отвечающих узлам на сторонах квадрата. Вот цитата из [5], где описано построение $N_5(x, y)$ для Q8: «...взяв соответствующий многочлен Лагранжа второй степени по одному направлению и умножив его на линейную функцию по другому направлению, непосредственно найдем базисные функции для узлов в серединах сторон». Слово «линейную» подчеркнуто нами потому, что мы считаем это ограничение необоснованным. Именно линейность коноида вызывает противоестественные перегрузки в указанных узлах и, как следствие, отрицательные «нагрузки» в вершинах КЭ. А далее угловая функция, например, $N_1(x, y)$ для Q8, представляется в виде линейной комбинации соответствующей билинейной функции и построенных N_5 и N_8 :

$$N_1(x, y) = \frac{1}{4}(1-x)(1-y) - \frac{1}{4}(1-x^2)(1-y) - \frac{1}{4}(1-y^2)(1-x),$$

что приводит к первой формуле в (2).

Так устроены все плоские и пространственные ССЭ. Предложивший этот подход Р. Тейлор (1972), назвал его методом систематического генерирования базисов ССЭ. Известный специалист по МКЭ Р. Галлагер справедливо считает метод Тейлора элегантным [6], хотя он, как и метод обратной матрицы, приводит к тем же функциям Эргатудиса-Айронса-Зенкевича (иллюзия единственности). В математическом моделировании это не редкость. Очень трудно предвидеть, когда и каким образом модель «отомстит» за идеализацию (Мандельштам).

ВЫВОДЫ

Коноид с его нулевой гауссовой кривизной – идеализация, более реалистичной оказывается поверхность отрицательной гауссовой кривизны. Так устроены альтернативные модели СЭ. Заинтересованные специалисты развивают это направление уже более 30 лет [3, 7, 8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ergatoudis I., Irons B. M., Zienkiewicz O. C. Curved isoparametric «quadrilateral» elements for finite element analysis. *Intern. J. Solids Struct.* 1968. 4. P. 31–42.
2. Zienkiewicz O. C. The finite element method in engineering science. London: McGraw – Hill, 1971. 517 p.
3. Хомченко А. Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ. Ивано-Франк. ин-т нефти и газа. Ивано-Франковск, 1982. 9 с. Деп. в ВИНТИ 18.03.82, № 1213.
4. Хомченко А. Н., Литвиненко Е. И., Астионенко И. А. Стандартные серендиповы многочлены и линейчатые поверхности. *Міжвуз. зб. «Комп'ютерно-інтегровані технології»: Освіта, наука, виробництво.* 2011. Вип. 6. С. 266–269.
5. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. Москва: Мир, 1986. 318 с.
6. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. Москва: Мир, 1984. 428 с.
7. Астионенко И. А., Литвиненко Е. И., Хомченко А. Н. Конструирование многопараметрических полиномов на бикубическом элементе серендипова семейства. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика.* 2009. Вып. 16, № 5(60). С. 15–31.
8. Астионенко И. А., Литвиненко Е. И., Хомченко А. Н. Обратные задачи серендиповых аппроксимаций. *Вестник Херсонского национального технического университета.* 2009. Вып. 2 (35). С. 36–42.

REFERENCES

1. Ergatoudis, I., Irons, B. M. & Zienkiewicz, O. C. (1968). Curved isoparametric «quadrilateral» elements for finite element analysis. *Intern. J. Solids Struct.*, 4, pp. 31-42.
2. Zienkiewicz, O. C. (1971). The finite element method in engineering science. London: McGraw – Hill.

3. Homchenko, A. N. (1982). Some Probabilistic Aspects of FEM. Ivano-Frank. in-t nefti i gaza. Ivano-Frankovsk. 9 p. Dep. v VINITI 18.03.82, №1213.
4. Homchenko, A. N., Litvinenko, E. I. & Astionenko, I. A. (2011). Standard Serendip polynomials and ruled surfaces. Mizhvuz. zb. "Komp'juterno-integrovani tehnologii": Osvita, nauka, virobnictvo, Iss. 6, pp. 266-269.
5. Zenkevich, O. & Morgan, K. (1986). Finite Elements and Approximation. Moscow: Mir.
6. Gallager, R. (1984). Finite element method. Basics. Moscow: Mir.
7. Astionenko, I. A., Litvinenko, E. I. & Homchenko, A. N. (2009). The construction of multiparameter polynomials on the bicubic element of the Serendip family. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Fizika, Iss. 16, No. 5(60), pp. 15-31.
8. Astionenko, I. A., Litvinenko, E. I. & Homchenko, A. N. (2009). Inverse problems of Serendip approximations. Vestnik Hersonskogo nacional'nogo tehničeskogo universiteta, Iss. 2(35), pp. 36-42.

УДК 539.375

ВЗАЄМОДІЯ КОЛІНЕАРНИХ ТРІЩИН У СФЕРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ З ГНУЧКИМ ПОКРИТТЯМ

Шацький І. П., д. ф.-м. н., Маковійчук М. В., к. ф.-м. н., Щербій А. Б.

*Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Микитинецька, 3, м. Івано-Франківськ, 76002, Україна*

ipshatsky@gmail.com

Досліджено задачу про розтяг сферичної оболонки, що підкріплена гнучким покриттям та містить дві меридіональні тріщини. Покриття моделюється шарніром, що з'єднує береги розрізів в одній з лицьових поверхонь оболонки. Методом сингулярних інтегральних рівнянь визначено напружений стан поблизу вершин тріщин та розподіл шарнірної реакції в покритті. Граничний стан композиції проаналізовано з урахуванням критеріїв крихкого руйнування оболонки та обмеженої міцності покриття. Досліджено вплив параметрів кривини серединної поверхні оболонки та взаємного розташування дефектів на величину руйнівного навантаження.

Ключові слова: сферична оболонка, гнучке покриття, колінеарні тріщини, гранична рівновага.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОЛЛИНЕАРНЫХ ТРЕЩИН В СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С ГИБКИМ ПОКРЫТИЕМ

Шацкий И. П., д. ф.-м. н., Маковийчук Н. В., к. ф.-м. н., Щербий А. Б.

*Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Микитинецька, 3, м. Івано-Франківськ, 76002, Україна*

ipshatsky@gmail.com

Исследована задача о растяжении усиленной покрытием сферической оболочки с двумя меридиональными трещинами. Гибкое покрытие моделируется шарниром, соединяющим берега разрезов в одной из лицевых поверхностей оболочки. Методом сингулярных интегральных уравнений определены напряженное состояние вблизи вершин трещин и распределение шарнирной реакции в покрытии. Предельное равновесие композиции проанализировано с учетом критериев хрупкого разрушения оболочки и ограниченной прочности покрытия. Исследовано влияние параметров кривизны срединной поверхности оболочки и взаимного расположения дефектов на величину разрушающей нагрузки.

Ключевые слова: сферическая оболочка, гибкое покрытие, коллинеарные трещины, предельное равновесие.