

15. Shashurin, G. V. (2007). Development of model of accumulation of damages for the estimation of прочностной reliability and resource of granule turbine disks of aviation turbo-engines. (Extended abstract of Cand. Thesis). Institute of Machine Science, Moscow, Russia.
16. Shulzhenko, M., Gontarovskiy, P., Garmash, N. & Melezhyk, I. (2013). Computation estimation of the crack development under cyclic loading using dissipated damages parameters. Visnyk Ternopil'skogo nacionalnogo universytetu, No. 3(71), pp. 197-204.
17. Shulzhenko, M. G., Gontarovskiy, P. P., Garmash, N. G. & Melezhyk, I. I. (2017). Evaluation of the crack development at a cyclic loading of plate elements using the parameters of scattered damages of the material. Visnyk NTU "HPI". Seriya Energetichni ta teplotehnichni protsesy i ustatkuvannya, Kharkiv, No. 9(1231), pp. 41-44.
18. Moskvitin, V. V. (1965). Plasticity at variable loadings. Moscow: Izdatelstvo moskovskogo universiteta.
19. Melezhyk, I. I. (2008). Development and application of a technique for a crack resistance estimation calculation of high-temperature power machines elements with cracks. (Extended abstract of Cand. Thesis). A.N. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems NAS of Ukraine, Harkiv, Ukraine.
20. Heyvud, R. B. (1969). Design for fatigue. Moscow: Mashinostroenie.
21. "Detali parovyih stacionarnyih turbin. Raschet na malotsiklovuyu ustalost: RTM 108.021.103-85 (1986) [Details of stationary steam-turbines. Calculation on a low-cycle fatigue]". Ministerstvo energeticheskogo mashinostroeniya, Moscow.

УДК. 539.3

## ТИСК ЖОРСТКОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО КІЛЬЦЕВОГО ШТАМПА НА ПІВПРОСТІР З ПОЧАТКОВИМИ (ЗАЛИШКОВИМИ) НАПРУЖЕННЯМИ

Ярецька Н. О.

*Хмельницький національний університет,  
вул. Інститутська, 11, м. Хмельницький, Україна*

massacran2@ukr.net

У статті в рамках лінеаризованої теорії пружності представлено просторову контактну задачу про тиск жорсткого кільцевого штампа на півпростір з початковими напруженнями без урахування сил тертя. Дослідження представлені в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу. Числовий аналіз представлений у вигляді графіків для потенціалу Бартенева-Хазановича та гармонічного потенціалу.

*Ключові слова: лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, контактна задача, кільцевий штамп, півпростір.*

## ДАВЛЕНИЕ ЖЕСТКОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КОЛЬЦЕВОГО ШТАМПА НА ПОЛУПРОСТРАНСТВО С НАЧАЛЬНЫМИ (ОСТАТОЧНЫМИ) НАПРЯЖЕНИЯМИ

Ярецькая Н. А.

*Хмельницький національний університет,  
ул. Інститутська, 11, г. Хмельницький, Україна*

massacran2@ukr.net

В статье в рамках линейризованной теории упругости представлено пространственную контактную задачу о давлении кольцевого штампа на полупространство с начальными напряжениями без учета сил трения. Исследования представлены в общем виде для теории больших начальных деформаций и двух вариантов теории малых начальных деформаций при произвольной структуре упругого потенциала. Численный анализ представлен в виде графиков для потенциала Бартенева-Хазановича и гармонического потенциала.

*Ключевые слова: линейризованная теория упругости, начальные (остаточные) напряжения, контактная задача, кольцевой штамп, полупространство.*

## PRESSURE OF THE STIFF CYLINDRICAL ANNULAR PUNCH ON SEMISPACED WITH INITIAL (RESIDUAL) STRESSES

Yaretskaya N. A.

*Khmelnytsky National University,  
Institutska str., 11, Khmelnytsky, Ukraine*

massacran2@ukr.net

The article is devoted to the research of problems of contact interaction of prestressed bodies, namely: the pressure of the stiff cylindrical annular punch on semispaced with initial (residual) stresses without friction.

In general, the research was carried out for the theory of great initial (ultimate) and two variants of the theory of small initial deformations within the framework of linearized theory of elasticity with the elastic potential having arbitrary structure. It is assumed that elastic potentials are two continuously differentiated functions of algebraic invariants of the Green tensor deformation. The research is carried out within the coordinates of the initial deformed state, which are interrelated with the Lagrangian coordinates (natural state). Besides, it is also assumed that the influence of the die causes small disorders of the main elastic deformed state in semispaced.

It is assumed that the semispaced is made of different isotropous, transversely isotropic or composite materials and the stiff annular punch and semispaced interacting on one of the punch's surfaces.

The mode of deformation in semispaced with initial (residual) stress will be defined with the help of harmonic functions as the Henkel integrals. Consequently we got components of potential vector and tensor of deformations in the case of equal roots of this contact problem.

In this article are analyzed the effect of parameters of the field of residual deformations on distributing contact stresses tensions. Two numerical examples of searching components of contact strain under the stiff cylindrical annular punch are considered.

The research investigates the influence of initial stress on the contact interaction of the stiff cylindrical annular punch on semispaced of particular structure potentials.

*Key words: linear elasticity theory, initial (residual) stresses, contact problem, annular punch, semispaced.*

### ВСТУП

Контактні задачі є важливим розділом механіки деформівного твердого тіла і формують теоретичну основу для розрахунків на контактну міцність, жорсткість та зносостійкість рухомих і нерухомих з'єднань.

Прикладні потреби природознавства, сучасної техніки і новітніх технологій, пов'язані із необхідністю прогнозування контактної поведінки різноманітних конструкцій, стимулювали в останні десятиліття розвиток різних математичних моделей і методів контактної механіки тіл з різними властивостями.

Одним з важливих факторів при контактній взаємодії є вплив початкових (залишкових) напружень, які практично завжди присутні в реальних конструкціях і деталях машин, тому розробка ефективних методів розрахунку напружено-деформованого стану з урахуванням початкових деформацій є актуальною і важливою науково-технічною проблемою.

На сьогодні після вивчення проблем, що мають відношення до контактних задач жорстких штампів, які взаємодіють із пружними тілами, отримані результати з широкого кола питань. І вони достатньо відображені у численних публікаціях періодичних видань. Не дивлячись на суттєві досягнення, кількість досліджень з контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями відносно мала. Так детальний огляд задач контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями представлений у роботах [1-3].

Роботи з контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями присвячені взаємодії попередньо напружених тіл із жорсткими та пружними штампами без початкових напружень [1-3]. Причому розглядаються або пружні потенціали конкретної структури, або задача ставиться в загальному вигляді для стисливих (нестисливих) тіл з потенціалом довільної структури на основі лінеаризованої теорії пружності. Існує також ряд інших узагальнюючих публікацій, що повністю або частково пов'язані з тематикою статті [4-7]. У роботі [7]

розглянуто розв'язок контактної задачі про тиск жорсткого кільцевого штампа складної конфігурації на пружний півпростір, у якому є залишкові деформації, зумовлені наявністю потенціалу лише гармонічного типу. Штмп утворено обертанням навколо спільної осі двох гілок парабол, спряжених у вершинах відрізком прямої, перпендикулярної до осі обертання (осі парабол, що обмежують штамп, паралельні до спільної осі обертання).

У нашій роботі з використанням співвідношень лінеаризованої теорії пружності [1, 3] представлено розв'язок осесиметричної просторової контактної задачі про тиск жорсткого кільцевого штампа з плоскою основою на півпростір з початковими (залишковими) напруженнями без урахування сил тертя. Дослідження виконано в загальному вигляді для стисливих і нестисливих тіл для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

Вважаємо, що початковий напружено-деформований стан у півпросторі є однорідним, а пружні потенціали – двічі неперервно-диференційовні функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна [3].

Для дослідження введено лагранжеві координати  $(x_1, x_2, x_3)$ , які в початковому стані збігаються з декартовими координатами  $(y_1, y_2, y_3)$ , що пов'язані з ними співвідношеннями  $y_i = \lambda_i x_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ). Матеріал півпростору вважається ізотропним стисливим або нестисливим. У випадку ортотропного матеріалу приймається, що пружно-еквівалентні напрямки збігаються з напрямками осей координат.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ Й ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

Розрізнятимемо три стани півпростору з початковими напруженнями: природний, коли в ньому відсутні напруження; початковий стан, та збурений стан, усі величини якого складаються з суми відповідних величин початкового стану та збурень. Вважаючи збурення набагато меншими за відповідні величини початкового стану, дослідження проводимо в рамках лінеаризованої теорії пружності [1, 3].

Нехай скінченний жорсткий кільцевий штамп з плоскою основою, геометрична вісь симетрії якого збігається з віссю  $z_3$  циліндричної системи координат, що напрямлена в середину півпростору (рис. 1) та втискається у півпростір силою  $P$ , після виникнення там початкового деформованого стану,  $R_1$ ,  $R_2$  – відповідно внутрішній та зовнішній радіуси штампа. Будемо вважати, що зовнішнє навантаження прикладене тільки до вільного торця пружного штампа, під дією якого всі точки торця штампа переміщуються у напрямку осі симетрії  $z_3$  на одну і ту ж саму величину  $\varepsilon$ . Вважатимемо, що поверхні поза ділянкою контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а в зоні контакту переміщення та напруження – неперервні.

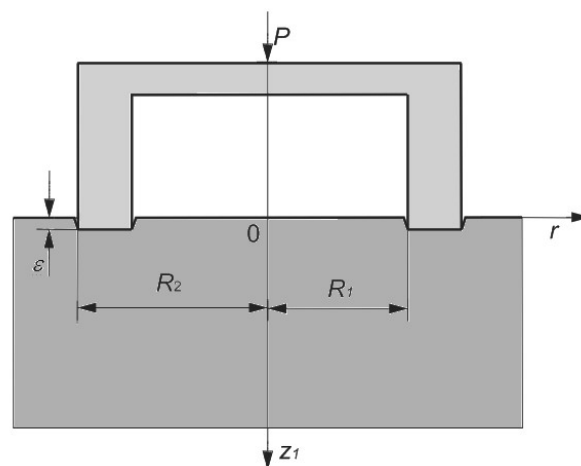


Рис. 1. Тиск жорсткого кільцевого штампа на півпростір з початковими (залишковими) напруженнями

Припустимо, що початковий стан півпростору – однорідний і виконуються співвідношення [1, 3, 5]:

$$y_m = x_m + U_m^0, \quad U_m^0 = \delta_{mi} (\lambda_m - 1) \lambda_i^{-1} y_i \quad (i, m = 1, 2, 3).$$

Тоді основне рівняння в переміщеннях [1, 3, 5] для стисливих тіл має вигляд формул

$$L'_{m\alpha} U_\alpha = 0, \quad L'_{m\alpha} = \omega'_{ij\alpha\beta} \partial^2 / \partial y_i \partial y_\beta \quad (i, m, \alpha, \beta = \overline{1, 3}), \quad (1)$$

а для нестисливих тіл разом із умовою нестисливості:

$$L'_{m\alpha} U_\alpha + q'_{am} \partial p' / \partial y_\alpha = 0, \quad L'_{m\alpha} = \kappa'_{im\alpha\beta} \partial^2 / \partial y_i \partial y_\beta, \quad q'_{ij} \partial U_j / \partial y_i = 0, \quad q'_{ij} = \lambda_i q_{ij} \quad (i, j, m, \alpha, \beta = \overline{1, 3}). \quad (2)$$

Вирази для визначення складових тензора напружень для стисливих і нестисливих тіл запишемо у вигляді:

$$Q'_{ij} = \omega'_{ij\alpha\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\beta}, \quad Q'_{ij} = \kappa'_{ij\alpha\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\beta} + q'_{ij} p, \quad \omega'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \omega_{ij\alpha\beta}, \quad \kappa'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \kappa_{ij\alpha\beta}.$$

При однорідних початкових напруженнях  $S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0$ ;  $S_0^{33} = 0$ ;  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$  розв'язки рівнянь (1), (2) представимо через циліндричні координати  $(r, \theta, y_3)$  у вигляді розв'язків рівняння:

$$(\Delta_1 + \xi_2'^2 \partial^2 / \partial y_3^2)(\Delta_1 + \xi_3'^2 \partial^2 / \partial y_3^2) \tilde{\chi} = 0, \quad (3)$$

де  $\Delta_1 = \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1} \partial / \partial r$ .

Ураховуючи умову існування єдиного розв'язку лінеаризованої теорії пружності для стисливих і нестисливих тіл [3], можливі два варіанти представлення загального розв'язку (3): випадок рівних коренів  $(\xi_2'^2 = \xi_3'^2)$  [3, 5, 7] та випадок нерівних коренів  $(\xi_2'^2 \neq \xi_3'^2)$  [3, 4]. У статті обмежимося випадком рівних коренів рівняння (3).

У системі кругових циліндричних координат  $(r, \theta, z_1)$ , де  $z_1 = v_1^{-1} y_3$ ,  $v_1 = \sqrt{n_1}$ ,  $n_1 = n_2 = \xi_2'^2 = \xi_3'^2$ , такий постановці відповідають граничні умови:

$$U_z = \varepsilon, \quad R_1 < r < R_2, \quad (4)$$

$$Q_{zz} = 0, \quad 0 < r < R_1, \quad R_2 < r < \infty, \quad (5)$$

$$Q_{rz} = 0, \quad 0 < r < \infty, \quad (6)$$

$$U_z = 0, \quad 0 < r < R_1, \quad R_2 < r < \infty, \quad (7)$$

$$Q_{zz} = -\sigma_z^0, \quad R_1 < r < R_2, \quad (8)$$

де  $\sigma_z^0 = \frac{8\varepsilon\omega_3}{\pi\sqrt{1-r^2}}$ , при  $R_1 < r < R_2$  та  $\sigma_z^0 = 0$ , при  $0 < r < R_1$ ,  $R_2 < r < \infty$ ;

$\omega_3 = C_{44} (1 + m_1) l_1 (s - s_0)$ ,  $s_0 = \frac{(1 + m_2)}{(1 + m_1)} l_2$ ,  $s = s_0 \frac{l_2}{l_1}$ . Значення коефіцієнтів  $m_i$ ,  $c_{44}$ ,  $l_i$  залежать від характеру пружного потенціалу і подані в [3].

Умова рівноваги, що встановлює зв'язок між осіданням торця і рівнодіючою навантаження  $P$  має вигляд:

$$P = -2\pi \int_{R_1}^{R_2} r Q_{zz}(0, r) dr. \quad (9)$$

## МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Напружено-деформівний стан у попередньо напруженому півпросторі для рівних коренів, урахувавши (4)-(8) та  $z_1 = 0$ , представимо у вигляді [3, 7]:

$$Q_z = \frac{\omega_3}{R_0} \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta r) d\eta, \quad U_z = -\frac{1}{\omega_2} \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta r) d\eta, \quad U_r = \omega_1 \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_1(\eta r) d\eta, \quad (10)$$

де  $R_0 = R_1/R_2$ ,  $\omega_2 = \frac{\nu_1}{m_1(s_0 - s_1)}$ ,  $s_1 = \frac{m_1 - 1}{m_1}$ ,  $\omega_1 = s_0 - 1$ ,  $J_\nu(x)$  – функція Бесселя дійсного аргументу,  $F(\eta)$  – шукана функція.

Задовольнивши умову (5), матимемо:

$$\frac{\omega_3}{R_0} \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta r) d\eta = 0, \quad 0 < r < R_1, \quad R_2 < r < \infty. \quad (11)$$

Введемо неперервну невідому функцію  $f(r)$ ,  $R_1 < r < R_2$ , що визначатиме розподіл контактних напружень під жорстким штампом. Та продовжимо (11) на проміжок  $0 < r < \infty$  [7]:

$$\frac{\omega_3}{R_0} \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta r) d\eta = f(r) (\delta(r - R_1) - \delta(r - R_2)), \quad 0 < r < \infty, \quad (12)$$

де  $\delta(r)$  – функція Хевісайда.

Ураховуючи неперервність функції  $f(r)$ , а також  $f(r) = 0$  при  $r = R_1$  та  $r = R_2$ , представимо її у вигляді:

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m J_0\left(\frac{\mu_m}{R_0} r\right), \quad (13)$$

де  $f_m$  – невідомі коефіцієнти,  $\mu_m$  – розв'язки рівняння  $J_1(\mu_k) = 0$ .

Застосувавши формулу обернення інтегрального перетворення Ханкеля до (13), одержимо

$$F(\eta) = \frac{R_0}{\omega_3} \sum_{m=1}^{\infty} f_m \int_{R_1}^{R_2} r J_0\left(\frac{\mu_m}{R_0} r\right) J_0(\eta r) dr, \quad 0 < r < \infty. \quad (14)$$

З другої формули (10), (14) та (4) отримаємо

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_m \int_0^\infty \frac{T_m(\eta)}{\eta} J_0(\eta r) d\eta = -\frac{\varepsilon \omega_3 \omega_2}{R_0}, \quad (15)$$

де

$$T_m(\eta) = R_1^{-1} (a_m^1 J_0(R_1 \eta) - a_m^2 J_1(R_1 \eta) \eta - a_m^3 J_0(R_2 \eta) + a_m^4 J_1(R_2 \eta) \eta) (\eta^2 - \mu_m^2 R_0^{-2})^{-1},$$

$$a_m^1 = R_1 R_2 \mu_m J_1(R_2 \mu_m), \quad a_m^2 = R_1^2 J_0(R_2 \mu_m), \quad a_m^3 = R_2^2 \mu_m J_1(R_2 R_1^{-1} \mu_m), \quad a_m^4 = R_1 R_2 \mu_m J_0(R_2 R_1^{-1} \mu_m).$$

Проінтегруємо (15) по  $r J_0\left(\frac{\mu_m}{R_0} r\right)$  від  $R_1$  до  $R_2$ :

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_m \int_0^{\infty} \frac{T_m(\eta)}{\eta} T_k(\eta) d\eta = -\frac{\varepsilon \omega_3 \omega_2}{R_0} S_k \quad (k = \overline{1, m}), \tag{16}$$

де  $S_k = -\mu_k^{-1} R_0 (R_1 J_1(\mu_k R_2) - R_2 J_1(\mu_k R_2^2 R_1^{-1}))$ .

Після визначення  $f_m$  із системи (16), можна обчислити напружено-деформівний стан у пружному півпросторі за формулами (10), (12)-(14). А зв'язок (9) між осіданням торця і рівнодіючою навантаження  $P$  матиме вигляд

$$P = -4\omega_3 \omega_2 \varepsilon R_0.$$

### ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ

У роботі проведено чисельне розв'язання системи (16) методом редукції для гармонічного потенціалу та потенціалу Бартенєва-Хазановича при таких значеннях параметрів:  $k = m = 16$ ;  $\nu = 0.5$ ;  $R_1 = 1$ ;  $R_2 = 2$ ;  $\lambda_1 = 0.7; 0.8; 0.9; 1; 1.1; 1.2; 1.3$ ;  $E = 3.92$ ,  $0 < \rho < R_0$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$ . Алгоритм реалізований у вигляді програми в пакеті Maple.

На рис. 2, 3 представлені розподіли контактних напружень в зоні контакту  $-\frac{2\pi}{P} Q_{zz}$ , де значенням  $\lambda_1$  відповідають лінії, починаючи знизу доверху. Пунктирні лінії описують випадок без початкових напружень ( $\lambda_1 = 1$ ), суцільні – з початковими (залишковими) напруженнями.

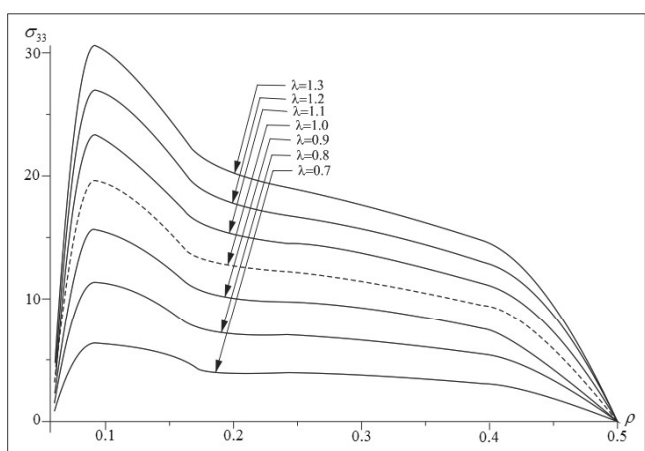


Рис. 2. Гармонічний потенціал

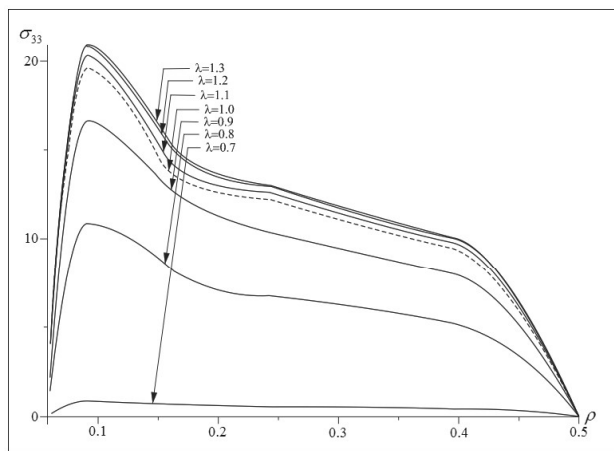


Рис. 3. Потенціал Бартенєва-Хазановича

### ВИСНОВКИ

На основі чисельного аналізу можна побачити, що максимальні за модулем значення контактних напружень досягаються в точках дещо ближчих до внутрішньої межі контакту.

Як і в [7], можна побачити, що навіть при сталому зовнішньому навантаженні зміна пружного потенціалу призводить до зміни характеру розподілу контактних напружень під штампом. Вплив початкових напружень на напружено-деформівний стан пружного півпростору, в який втискається жорсткий кільцевий штамп, полягає в тому, що: початкові напруження в півпросторі призводять у випадку стиснення до зменшення напружень, а у випадку розтягнення – до їх збільшення. Достовірність отриманих результатів підтверджує їх узгодження з результатами інших авторів [7].

## ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Рудницький В. Б. Контактное взаимодействие упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. *Развитие идей Л.А. Галина в механике*. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 480 с.
2. Babich S. Yu., Guz A. N., Rudnitsky V. B. Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches. *Int. Appl. Mech.* 2004. 40, № 7. P. 744–765.
3. Гузь А. Н., Рудницький В. Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. Хмельницький: вид. ПП Мельник, 2006. 710 с.
4. Gao X.-L., Mao J. C. L. Solution of the Contact Problem of a Rigid Conical Frustum Indenting a Transversely Isotropic Elastic Half-Space. *Appl. Mech.* 2014. 81(4). P. 107–119.
5. Yaretskaya N. A. Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses. *International Applied Mechanics*. July 2014. Vol. 50, Issue 4. P. 378–388.
6. Nataliya Iaretska, Vyacheslav Rudnitsky. Research of contact interaction of prestressed stamps, layer and foundation without friction. *Вісник Тернопільського національного технічного університету. Науковий журнал*. 2016. № 3(83). С. 28–37.
7. Шелестовський Б., Габрусєва І. Контактна взаємодія кільцевого штампа із попередньо напруженим півпростором. *Вісник ТДТУ*. 2009. Том 14, № 3. С. 48–53.

## REFERENCE

1. Guz', A. N., Babich, S. Ju. & Rudnickij, V. B. (2013). Contact interaction of elastic bodies with initial (residual) stresses. *Razvitie idej L.A. Galina v mehanike. M.–Izhevsk, Institut komp'juternyh issledovanij* (in Russian).
2. Babich, S. Yu. (2004). Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches. *Int. Appl. Mech*, Vol. 40, No. 7, pp. 744-765.
3. Guz', A. N. & Rudnickij, V. B. (2006). Fundamentals of the theory of the contact interaction of elastic bodies with initial (residual) stresses. *Hmel'nic'kij: vyd. PP Mel'nik*.
4. Gao, X.-L. & Mao, J. C. L. (2014). Solution of the Contact Problem of a Rigid Conical Frustum Indenting a Transversely Isotropic Elastic Half-Space. *Appl. Mech.*, Vol. 81, No. 4, pp. 107-119.
5. Yaretskaya, N. A. (2014). Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses. *International Applied Mechanics*, Vol. 50, No. 4, pp. 378-388.
6. Iaretska, N. A. & Rudnitsky, V. B. (2016). Research of contact interaction of prestressed stamps, layer and foundation without friction. *Visnyk Ternopil's'koho nacional'noho texnichnoho universytetu. Naukovyj zhurnal*, Vol. 83. No. 3, pp. 28-37.
7. Shelestovs'kyj, B. & Habrusyeva, I. (2009). Kontaktna vzayemodiya kil'cevoho shtampa iz poperedn'o napruzhenym pivprostorum. *Visnyk TDTU*, Vol. 14, No. 3, pp. 48-53.