

ориентации кристаллографических осей. *Компрессорное и энергетическое машиностроение*. 2015. № 4. С. 15–19.

7. Воробьев Ю. С., Овчарова Н. Ю., Жондковский Р., Берлизова Т. Ю. Влияние азимутальной ориентации кристаллографических осей на термоупругое состояние лопатки ГТД с вихревой системой охлаждения. *Проблемы прочности*. 2016. № 3. С. 15–24.
8. Vorobiov Iu. S, Dyakonenko K. Yu., Kulishov S. B., Skritskij A. N., Rzakowski R. Vibration characteristics of cooled single-crystal gas turbine blades. *Journal of vibration engineering & technologies*. 2014. Vol. 2, No. 6. P. 537–541.

## REFERENCE

1. Nozhnitskiy, Yu. A. & Golubovskiy, Ye. R. (2009). About прочностной reliability of single-crystal working shoulder-blades of high temperature turbines perspective GTE. Durability of materials and resource of elements of energyequipment, Iss. 296, (pp. 74-82), Saint Petersburg.
2. Shalin, R. Ye., Svetlov, I. L. et al. (1997). Single-crystals of nickeliferous heatproof alloys. Moscow: Mashinostroyeniye.
3. Wolf, D. S. (1981). Stress analysis of a fist turbine vane using 3-dimantional model wich non-linear material behavior subjected to transient temperatures. AIAA Pap. No. 1437, 5 p.
4. Pridorozhnyy, R. P. (2002). Calculation research of the by volume tensely-deformed state of the single-crystal cooled shoulder-blade of turbine. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya*, Iss. 34, pp. 119-123.
5. Pridorozhnyy, R. P. & Sheremet'ev, A. V. (2003). Influence of crystallography orientation on the by volume tensely-deformed state of the single-crystal uncooled shoulder-blade of turbine. *Vestnik dvigatelestroyeniya*, Iss. 1, pp. 47-51.
6. Vorob'yev, Yu. S., Ovcharova, N. Yu., Zhondkovski, R. & Berlizova, T. Yu. (2015). Tensely-deformed state of the cooled single-crystal shoulder-blade of GTE in the temperature field taking into account influence of orientation of crystallography axes. *Kompressornoye i energeticheskoye mashinostroyeniye*, No. 4. pp. 15-19.
7. Vorob'yev, Yu. S., Ovcharova, N. Yu., Zhondkovski, R. & Berlizova, T. Yu. (2016). Influence of azimuthal orientation of crystallography axes on the термоупругое state of shoulder-blade of GTD with the vortical system of cooling. *Problemy prochnosti*, No. 3, pp. 15-24.
8. Vorobiov, Iu. S, Dyakonenko, K. Yu., Kulishov, S. B., Skritskij, A. N. & Rzakowski, R. (2014). Vibration characteristics of cooled single-crystal gas turbine blades. *Journal of vibration engineering & technologies*, Vol. 2, No. 6, pp. 537-541.

УДК 539.3

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННОГО И ОБОЛОЧЕЧНОГО РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ПОЛЗУЧЕСТИ И ПРОЧНОСТИ МНОГОСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРОВ

<sup>1</sup>Галишин А. З., д. т. н., с. н. с., <sup>2</sup>Склепус С. Н., к. ф.-м. н., с. н. с.

<sup>1</sup>*Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины,  
ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина*

<sup>2</sup>*Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины,  
ул. Пожарского, 2/10, Харьков, 61046, Украина*

plast@inmech.kiev.ua, snsklepus@ukr.net

Рассмотрена задача ползучести и прочности полого многослойного цилиндра в рамках пространственной и оболочечной постановок. Решения для двухслойных оболочек с различным соотношением толщин слоев, основанные на гипотезе прямолинейного элемента, сравниваются с пространственными решениями для осесимметрично нагруженных полых цилиндров. Показано, что при уменьшении толщины наружного слоя погрешность оболочечного решения уменьшается, а ползучесть наружного слоя увеличивает время до разрушения.

*Ключевые слова: многослойный цилиндр, ползучесть, критерий прочности, время до разрушения.*

## ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ПРОСТОРОВОГО ТА ОБОЛОНКОВОГО РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ ПОВЗУЧОСТІ ТА МІЦНОСТІ БАГАТОШАРОВИХ ЦИЛІНДРІВ

<sup>1</sup>Галішшин О. З., д. т. н, с. н. с., <sup>2</sup>Склепус С. М., к. ф.-м. н., с. н. с.

<sup>1</sup>*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,  
вул. Нестерова, 3, Київ, 03057, Україна*

<sup>2</sup>*Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України,  
вул. Пожарського, 2/10, Харків, 61046, Україна*

plast@inmech.kiev.ua, snsklepus@ukr.net

Розглянуто задачу повзучості та міцності порожнистого багатошарового циліндра в рамках просторової і оболонкової постановок. Розв'язки для двошарових оболонок з різним співвідношенням товщини шарів, що базуються на гіпотезі прямолінійного елемента, порівнюються з просторовими рішеннями для осесиметрично навантажених порожнистих циліндрів. Показано, що при зменшенні товщини зовнішнього шару похибка оболонкового розв'язку зменшується, а повзучість зовнішнього шару збільшує час до руйнування.

*Ключові слова: багатошаровий циліндр, повзучість, критерій міцності, час до руйнування.*

## COMPARATIVE ANALYSIS OF SPATIAL AND SHELL SOLUTIONS FOR CREEP AND STRENGTH PROBLEM OF THE MULTILAYERED CYLINDERS

<sup>1</sup>Galishin A. Z., D. Sc., <sup>2</sup>Sklepus S. N., Ph.D. in Physics and Maths

<sup>1</sup>*S. P. Timoshenko Institute of Mechanics, NAS of Ukraine,  
Nesterov str., 3, Kyiv, 03057, Ukraine*

<sup>2</sup>*A. N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems, NAS of Ukraine,  
Pozgarsky str., 2/10, Kharkov, 61046, Ukraine*

plast@inmech.kiev.ua, snsklepus@ukr.net

In engineering practice we often meet multi-layered structural elements in the form of hollow cylinders operating at high temperatures under creep conditions. The error of the solution obtained in the framework of a theory of shells depends on many factors. They include the shell characteristic ratio, the ratio of the thickness of the layers, type of boundary conditions, loading conditions, the mechanical characteristics of the materials. Simultaneous study of the influence of all these factors is a complex problem. One possible way of studying of the error of solutions obtained in the framework of the shell theories is a comparison of them with the results obtained within of the three-dimensional (3D) formulation. The aims of this paper are: 1) to compare the 3D and shell solutions for two-layered cylinders under internal uniform pressure for various ratios of the thickness of the layers, 2) to investigate the influence of the ratio of the thickness of the layers on the deviation of the shell solution from the 3D solution, 3) to investigate the effect of creep of the outer layer on the long-term strength of the cylinder. The problem creep and strength of hollow two-layered cylinder is considered. The inner layer of the cylinder is made of a heat-resistant alloy based on nickel ЭИ437, outer layer is made of the yttria partially stabilized zirconia (8YSZ). Solutions for two-layered shells of varying ratios of layer thicknesses, based on the hypothesis of rectilinear element, are compared with the spatial solutions for axisymmetrically loaded hollow cylinders. For the solution of a spatial initial boundary value problem the joint application of Ritz, R-functions methods and the Runge-Kutta-Merson method for time integration with automatic time step control has been used. Within the shell formulation the initial boundary value problem is also solved using the Runge-Kutta-Merson method with the combination of the Runge-Kutta method and Godunov's technique of discrete orthogonalization for solving the boundary problem at each time step. A good agreement of the results of the 3D and shell solutions for different ratios of the layer thicknesses for the parameters of the stress-strain state is obtained. It is shown that as the thickness of the outer layer increases, the error of the shell solution increases, and the creep of the outer layer increases the time to failure. A conclusion was also made about the satisfactory accuracy of finding time to failure.

*Key words: multilayered cylinder, creep, strength criterion, time to failure.*

## ВВЕДЕНИЕ

В современной технике находят широкое применение многослойные элементы конструкций, работающие в условиях ползучести. Задачи ползучести слоистых цилиндров и цилиндрических оболочек рассматривались в работах [1-4 и др.]. В инженерных расчетах ползучести таких объектов применяются приближенные методы решения. Зачастую для преодоления возникающих вычислительных трудностей используются те или иные теории оболочек, которые позволяют упростить постановку задачи и понизить размерность исходной краевой задачи. Погрешность решения, полученного в рамках теории оболочек, зависит от многих факторов. Они включают в себя соотношение геометрических размеров оболочки, соотношение толщин слоев, тип граничных условий, вида нагружения, механических характеристик материалов. Анализ применимости классической и уточненных теорий оболочек в задачах упругого деформирования однородных и слоистых оболочек дан в работе [5]. Одним из возможных путей исследования погрешностей теорий оболочек в задачах ползучести цилиндров является сопоставление полученных на их основе решений с результатами решения пространственных задач. Оценке погрешности оболочечных моделей в задачах ползучести и длительной прочности однородных цилиндрических оболочек посвящены лишь единичные работы. Так, например, в [6] для однородного полого цилиндра, нагруженного внутренним давлением, проводится анализ применимости различных оболочечных моделей в исследованиях напряженно-деформированного состояния (НДС), ползучести и повреждаемости. Решения для оболочек различной толщины, основанные на гипотезах прямолинейного элемента либо на гипотезах Кирхгофа-Лява, сопоставляются с решением пространственной задачи для осесимметрично нагруженного цилиндра. Отметим, что в литературе отсутствуют работы, посвященные обоснованию применимости теории оболочек для исследования ползучести и прочности слоистых цилиндров.

Целями данной работы являются:

- сопоставить результаты решения задачи ползучести и прочности слоистых цилиндров, полученные в рамках пространственной и оболочечной постановок;
- исследовать влияние соотношения толщин слоев на отклонение оболочечного решения от пространственного;
- исследовать влияние ползучести наружного слоя на длительную прочность цилиндра.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассмотрим круговой осесимметрично нагруженный полой двухслойный цилиндр конечной длины в цилиндрической системе координат  $r\varphi z$ . Ось  $z$  совпадает с осью вращения. Пусть цилиндр состоит из изотропных слоев постоянной толщины, которые жестко соединены между собой и деформируются без проскальзывания и отрыва. Полагаем, что цилиндр находится под действием поверхностных сил, деформирование в процессе ползучести происходит изотермически. Деформации цилиндра остаются малыми, а температурными деформациями можно пренебречь. Задачу будем решать в геометрически линейной, квазистатической постановке и в предположении, что в процессе деформирования пластические деформации не возникают.

Определяющие уравнения ползучести материалов слоев запишем в виде [7]

$$\dot{p}_{kl} = \frac{3}{2} A \sigma_i^{n-1} s_{kl}, \quad (k, l = \overline{1, 3}). \quad (1)$$

Здесь  $\dot{p}_{kl}$  – компоненты тензора скоростей деформаций ползучести;  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений;  $s_{kl} = \sigma_{kl} - \delta_{kl} (\sigma_{kk})$  – компоненты девиатора напряжений;  $A, n$  – константы материала. Данный закон справедлив для многих материалов при достаточно высоком уровне температур и напряжений и позволяет исследовать ползучесть в наиболее «чистой»

форме, исключив такие явления, как упрочнение и повреждаемость материала вследствие ползучести.

Здесь и далее точка над символами обозначает полную производную по времени.

Граничные условия на торцах цилиндра  $z = \pm l/2$  задавались в виде:

$$\begin{aligned} \dot{u}_r &= 0, \\ \dot{\sigma}_{zz} &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

На внутренней поверхности  $r = r_{inn}$  цилиндра:

$$\dot{\sigma}_{rr} = -\dot{P}_{inn}, \quad \dot{\sigma}_{rz} = 0,$$

На внешней поверхности  $r = r_{out}$  цилиндра:

$$\dot{\sigma}_{rr} = 0, \quad \dot{\sigma}_{rz}^{(2)} = 0.$$

При решении задачи в рамках пространственной осесимметричной постановки, краевая задача ползучести в момент времени  $t \neq 0$  может быть сведена к вариационной задаче для функционала в форме Лагранжа, определенного в пространстве кинематически возможных скоростей перемещений  $\Lambda = \Lambda(\dot{u}_r, \dot{u}_z)$ , выражение для которого приведено, например, в работах [4, 8]. Здесь  $\dot{u}_r(r, z, t)$ ,  $\dot{u}_z(r, z, t)$  – скорости перемещений вдоль осей  $Or$  и  $Oz$  соответственно. Обращение в нуль первой вариации функционала  $\delta\Lambda = 0$  эквивалентно выполнению линеаризованных уравнений равновесия и статических граничных условий, записанных относительно скоростей перемещений [4, 8].

Основные неизвестные задачи ползучести: перемещения  $u_r$ ,  $u_z$ , напряжения  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$ ,  $\sigma_{rz}$ , полные деформации  $\varepsilon_{rr}$ ,  $\varepsilon_{zz}$ ,  $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ ,  $\gamma_{rz}$  и деформации ползучести  $p_{rr}$ ,  $p_{zz}$ ,  $p_{\varphi\varphi}$ ,  $2p_{rz}$  в произвольной точке цилиндра. Их можно найти из решения задачи Коши по времени для системы обыкновенных дифференциальных уравнений [4, 8]. В начальный момент времени деформации ползучести равны нулю. Начальные условия для остальных неизвестных функций следуют из решения задачи упругого деформирования цилиндра.

Решение задачи Коши осуществляется методом Рунге-Кутты-Мерсона (РКМ) с автоматическим выбором шага по времени. Правые части уравнений, в моменты времени, соответствующие схеме РКМ, определяются из решения вариационной задачи для функционала в форме Лагранжа. Вариационные задачи решаются методом Ритца в сочетании с методом R-функций [9]. При этом приближенное решение краевой задачи представляется в виде формулы – структуры решения, которая точно удовлетворяет всем (общая структура решения) или части (частичная структура решения) граничным условиям и является инвариантной относительно геометрической формы области.

Можно показать, что структура решения, удовлетворяющая кинематическим граничным условиям для скоростей перемещений (2) имеет вид:

$$\dot{u}_{ri} = \omega\Phi_1, \quad \dot{u}_{zi} = z\Phi_2.$$

Здесь  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  – неопределенные компоненты структуры решения [9];  $\omega = \frac{1}{l} \left( \frac{l^2}{4} - z^2 \right) = 0$  – уравнение участка границы, где заданы скорости перемещений.

При численной реализации неопределенные компоненты структуры решения представлялись в виде конечных рядов вида  $\Phi(r, z, t) = \sum_n C_n(t) f_n(r, z)$ , где  $C_n(t)$  – неопределенные

коэффициенты, которые на каждом временном шаге находятся методом Рунге;  $t$  – некоторый фиксированный момент временной дискретизации схемы РКМ или дискретизации по времени для выдачи результатов расчета;  $\{f_n\}$  – система линейно независимых функций. Здесь в качестве  $\{f_n\}$  использовались бикубические сплайны Шенберга. Системы сплайнов строились на регулярной сетке  $K_r \times K_z$ , где  $K_r$ ,  $K_z$  – количество отрезков дискретизации вдоль осей  $O_r$  и  $O_z$ , соответственно.

Постановка задачи в рамках теории оболочек базируется на использовании уточненной модели прямолинейного элемента, учитывающей деформации поперечного сдвига [5]. В произвольный момент времени краевая задача сводится к численному интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{Y}}{dz} = P(z)\vec{Y} + \vec{f}(z); \quad \vec{Y} = \{N_r, N_z, M_z, u_r, u_z, \psi_z\}^T \quad (3)$$

при заданных на торцах  $z = z_0$  и  $z = z_n$  граничных условиях вида

$$B_i \vec{Y} = \vec{b}_i \quad (i = 0, n). \quad (4)$$

В равенствах (3), (4) обозначено:  $\vec{Y}$  – вектор разрешающих функций, состоящий из радиальной  $N_r$  и осевой  $N_z$  составляющих усилий, действующих в сечении  $z = \text{const}$ ;  $M_z$  – осевой изгибающий момент;  $u_r$ ,  $u_z$  – радиальное и осевое составляющие перемещения точки координатной поверхности;  $\psi_z$  – полный угол поворота прямолинейного элемента, состоящий из угла поворота нормали и угла поворота, обусловленного поперечным сдвигом. Величины  $P(z)$  и  $\vec{f}(z)$  означают матрицу системы и вектор свободных членов, а  $B_i$  и  $\vec{b}_i$  – матрицы и векторы граничных условий. Компоненты матрицы  $P(z)$  зависят от жесткостных характеристик оболочки и находятся в результате численного интегрирования по толщине оболочки. Компоненты вектора  $\vec{f}(z)$  кроме этого зависят от деформаций ползучести.

Для рассматриваемой задачи граничные условия в рамках теории оболочек формулировались в виде

$$\text{при } z = 0: \quad N_r = u_z = \psi_z = 0,$$

$$\text{при } z = l/2: \quad N_z = M_z = u_r = 0.$$

Решение краевой задачи (3), (4) осуществлялось методом Рунге-Кутты с дискретной ортогонализацией по С. К. Годунову. Для решения задачи по времени использовался метод РКМ с автоматическим выбором шага.

### ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Проведем сравнение результатов решения задачи ползучести для двухслойного цилиндра, полученных на основе пространственной постановки и в рамках уточненной теории оболочек. Геометрические размеры: длина  $l = 0,1$  м, внутренний радиус цилиндра  $r_{inn} = 0,095$  м, внешний –  $r_{out} = 0,105$  м. Толщины слоев будем варьировать. Внутренний слой цилиндра толщиной  $h_1$  выполнен из жаропрочного сплава на основе никеля ЭИ437, наружный, толщиной  $h_2$  – из диоксида циркония, стабилизированного иттрием (8YSZ). Данный керамический материал часто применяется для термобарьерных покрытий (thermal barrier coating – ТБС). Температура  $T = 800^\circ\text{C}$ . На внутренней поверхности  $r = r_{inn}$  приложено постоянное давление  $P_{inn} = 15$  МПа.

Модуль Юнга и коэффициент Пуассона сплава ЭИ437:  $E_1 = 1,5285 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu_1 = 0,28$  [10]. Предел текучести  $\sigma_T = 340$  МПа. Упругие характеристики материала 8YSZ:  $E_2 = 1,539 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu_2 = 0,27$  [11]. Предел прочности  $\sigma_\sigma = 360$  МПа. Константы ползучести материалов слоев следующие:  $A_1 = 5,15 \cdot 10^{-19}$  МПа $^{-n}$ ч $^{-1}$ ,  $n_1 = 5,23$  (сплав ЭИ437) [7] и  $A_2 = 1,26 \cdot 10^{-12}$  МПа $^{-n}$ ч $^{-1}$ ,  $n_2 = 1,475$  (керамический материал) [11].

Критерием определения критического времени, или времени до разрушения  $t_*$  и окончания процесса расчета было выполнение в какой-либо точке пространственной дискретизации критерия наибольших нормальных напряжений [12]:

$$\max \{|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|\} = \sigma_*, \tag{5}$$

где  $\sigma_*$  – предельное напряжение. В качестве  $\sigma_*$  могут быть выбраны, например: предел пропорциональности  $\sigma_{np}$ , предел текучести  $\sigma_T$  или предел прочности  $\sigma_\sigma$ .

Отношение толщины наружного слоя цилиндра к общей толщине  $\eta = h_2/h$  варьировалось в пределах от 1/50 до 1/4 (табл. 1).

В результате расчетов установлено, что процесс ползучести во внутреннем слое идет с большей скоростью, чем во внешнем слое. Со временем происходит перераспределение напряжений – во внутреннем слое происходит релаксация максимальных напряжений, что приводит к увеличению абсолютных значений напряжений в наружном слое и, в конечном итоге – к выполнению критерия (5) на наружной поверхности в центре цилиндра:

$$\max \{|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|\} = \sigma_{\phi\phi} = \sigma_\sigma.$$

В таблице 1 приведены значения времени до разрушения  $t_*$ , полученные по пространственной модели ( $t_*^{3D}$ ) и на основе оболочечной модели ( $t_*^{SH}$ ) в случае, когда учитывается ползучесть в обоих слоях. Там же приведены значения относительных отклонений  $\Delta = Abs(t_*^{3D} - t_*^{SH}) / t_*^{3D} \cdot 100\%$  оболочечного решения от пространственного. Из таблицы видно, что с ростом параметра  $\eta$  указанное отклонение увеличивается.

Таблица 1

$\eta$	1/50	1/10	1/5	1/4
$t_*^{3D}$ , ч	11083	14920	28155	46750
$t_*^{SH}$ , ч	11750	17040	34080	61550
$\Delta$ , %	6,0	14,2	21,0	31,7

Также были выполнены расчеты в предположении, что материал наружного слоя деформируется упруго, при отсутствии деформаций ползучести. Соответствующие времена до разрушения и относительные отклонения представлены в таблице 2.

Таблица 2

$\eta$	1/50	1/10	1/5	1/4
$t_*^{3D}$ , ч	10634	14120	25015	37500
$t_*^{SH}$ , ч	11270	16000	29440	45550
$\Delta$ , %	6,0	13,3	17,7	21,5

Из представленных результатов можно сделать вывод о том, что ползучесть наружного слоя увеличивает время до разрушения. Также видно, что при увеличении толщины наружного слоя погрешность оболочечного решения возрастает.

Некоторые результаты расчетов для  $\eta = 1/4$ , когда деформации ползучести развиваются в двух слоях, показаны на рис. 1-8. Кривые, соответствующие пространственному решению, помечены маркерами.

На рис. 1 изображены графики изменения вдоль оси цилиндра прогиба  $w = u_r(R_0, z, t)$  (радиального перемещения срединной поверхности  $r = R_0$ ) в начальный момент времени  $t = 0$  и в момент  $t = t_*$ . На рис. 2 показано изменение прогиба во времени в центре цилиндра.

На рис. 3 представлены графики изменения вдоль оси цилиндра напряжений  $\sigma_{\varphi\varphi}$  на внутренней поверхности цилиндра, а на рис. 4 – на наружной поверхности. Изменение во времени деформаций ползучести  $p_{\varphi\varphi}$  и напряжений  $\sigma_{\varphi\varphi}$  на внутренней и внешней поверхностях в центре цилиндра показано на рис. 5-8.

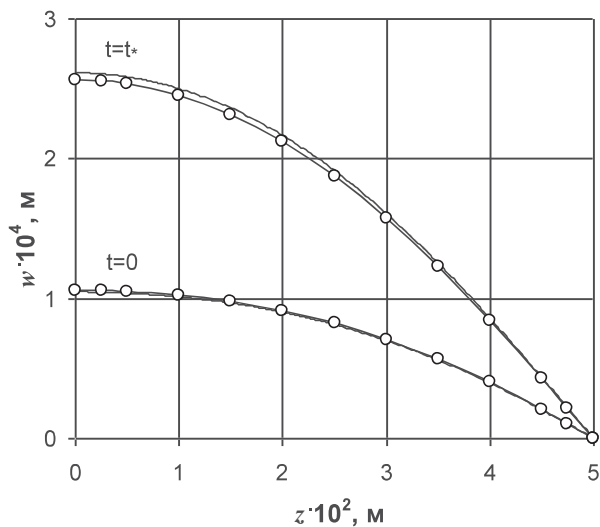


Рис. 1. Изменение прогиба вдоль оси  $z$

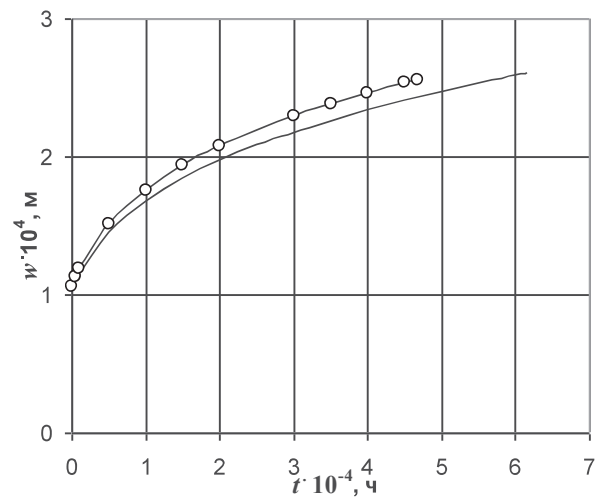


Рис. 2. Изменение прогиба во времени в центре цилиндра

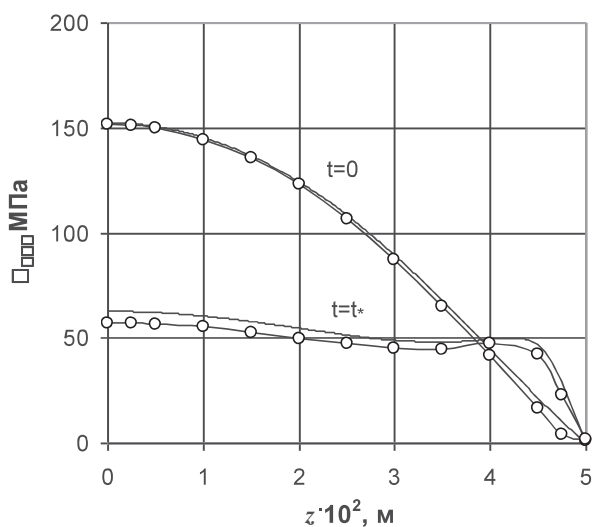


Рис. 3. Окружные напряжения на внутренней поверхности

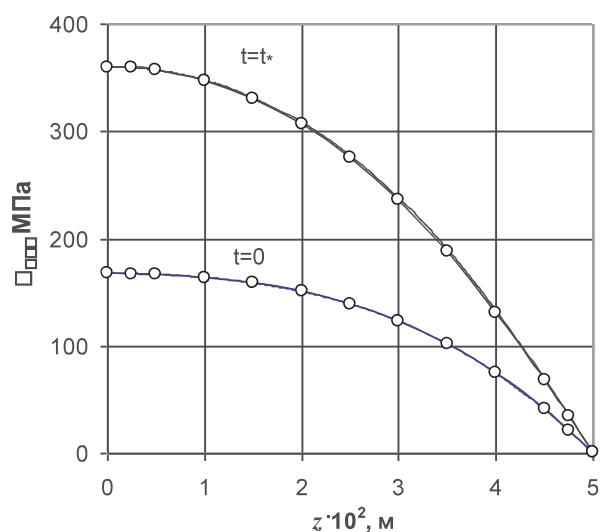


Рис. 4. Окружные напряжения на внешней поверхности

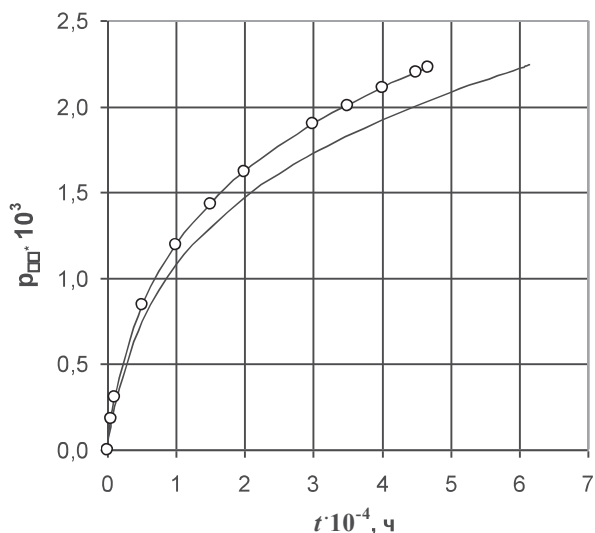


Рис. 5. Деформации ползучести  $p_{\phi\phi}$  на внутренней поверхности в центре цилиндра

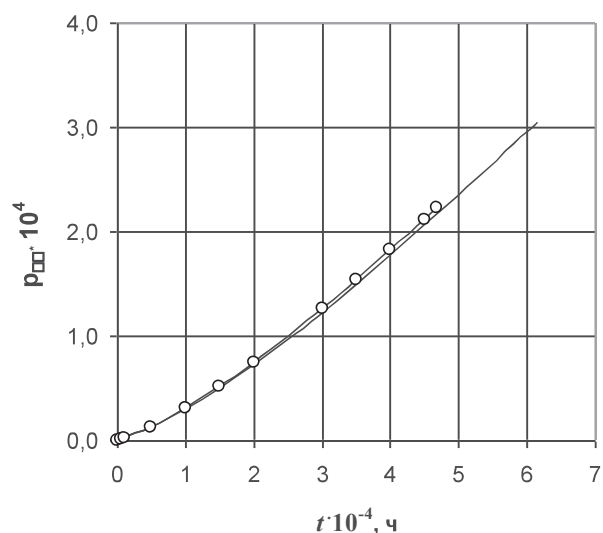


Рис. 6. Деформации ползучести  $p_{\phi\phi}$  на внешней поверхности в центре цилиндра

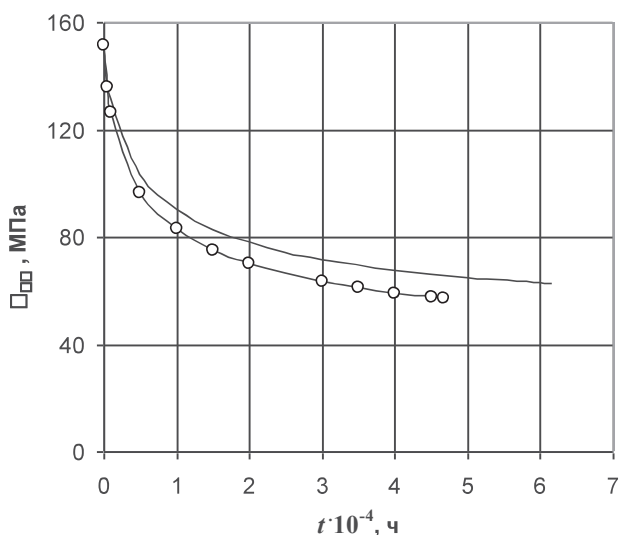


Рис. 7. Окружные напряжения  $\sigma_{\phi\phi}$  на внутренней поверхности в центре цилиндра

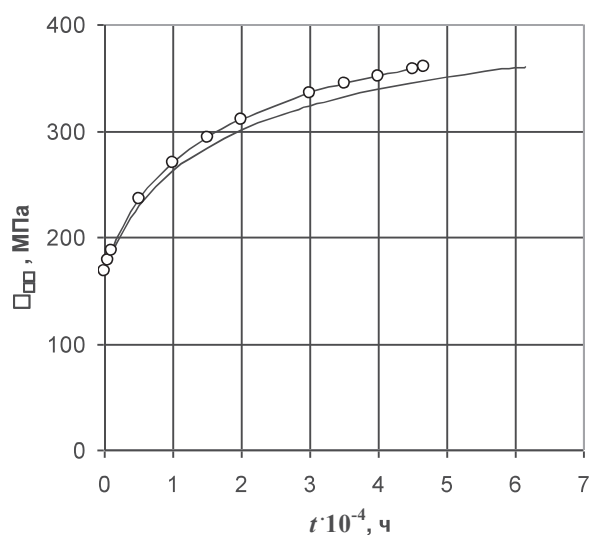


Рис. 8. Окружные напряжения  $\sigma_{\phi\phi}$  на внешней поверхности в центре цилиндра

Из представленных результатов видно, что в начальный момент времени пространственное и оболочечное решения для перемещений, напряжений и деформаций практически совпадают. Далее, при решении задачи ползучести, с ростом времени, отклонение увеличивается, но не превышает 15%, что свидетельствуют о достаточно хорошей точности оболочечного решения. Также, учитывая естественный разброс экспериментальных данных, на основе которых определяются константы ползучести в определяющих соотношениях, можно сделать вывод об удовлетворительной точности нахождения времени до разрушения.

### ВЫВОДЫ

Решена задача ползучести и прочности двухслойного цилиндра в рамках пространственной и оболочечной моделей. Исследования проводились при условиях, что внутренний слой работает в условиях ползучести, а наружный деформируется упруго, а также с учетом ползучести в обоих слоях. Получено хорошее согласование результатов пространственного и оболочечного решений для различных соотношений толщин слоев для параметров НДС. Показано, что при увеличении толщины наружного слоя погрешность оболочечного решения возрастает, а ползучесть наружного слоя увеличивает время до разрушения.



## ЛІТЕРАТУРА

1. Galishin A. Z. Axisymmetric thermoviscoelastoplastic state of thin laminated shells made of a damageable material. *Int. Appl. Mech.* 2008. Vol. 44, No. 4. P. 431–441.
2. Shevchenko Yu. N., Galishin A. Z. Determination of the axially symmetric geometrically nonlinear thermoviscoelastoplastic state of thin layered shells with regard for the damageability of the material. *Journal of Mathematical Sciences.* 2009. Vol. 162, No. 2. P. 216–230.
3. Shevchenko Yu. N., Galishin A. Z., Babeshko M. E. Thermoviscoelastoplastic deformation of compound shells of revolution made of a damageable material. *Int. Appl. Mech.* 2015. Vol. 51, No. 6. P. 607—613.
4. Sklepus S. M. Solution of the Axisymmetric Problem of Creep and Damage for a Piecewise Homogeneous Body with an Arbitrary Shape of a Meridional Section. *Journal of Mathematical Sciences.* 2015. Vol. 205, No. 5. P. 644–658.
5. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости. Киев: Наук. думка, 1981. 544 с. (Методы расчета оболочек: В 5 т.; Т. 4).
6. Галишин А. З., Склепус С. Н. Применение оболочечных моделей к расчету ползучести и повреждаемости полых цилиндров. *Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету.* 2015. Вип. 1(26). С. 60–70.
7. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. Москва: Наука, 1966. 752 с.
8. Золочевский А. А., Склепус А. Н., Склепус С. Н. Нелинейная механика деформируемого твердого тела. Харьков: «Бізнес Інвестор Групп», 2011. 720 с.
9. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982. 552 с.
10. Шевченко Ю. Н., Бабешко М. Е., Терехов Р. Г. Термовязкоупруго-пластические процессы сложного деформирования элементов конструкций. Киев: Наук. думка, 1992. 329 с.
11. Zolochovsky A., Galishin A., Sklepus S., Parkhomenko L., Gnitko V., Kühhorn A., Kober M., Leyens C. Benchmark creep tests for thermal barrier coating. *Вісник НТУ «ХПИ». Серія: Машинознавство і САПР.* 2013. № 23(996). С. 159–177.
12. Качанов Л. М. Основы механики разрушения. Москва: Наука, 1974. 312 с.

## REFERENCES

1. Galishin, A. Z. (2008). Axisymmetric thermoviscoelastoplastic state of thin laminated shells made of a damageable material. *Int. Appl. Mech.*, Vol. 44, No. 4, pp. 431-441.
2. Shevchenko, Yu. N. & Galishin, A. Z. (2009). Determination of the axially symmetric geometrically nonlinear thermoviscoelastoplastic state of thin layered shells with regard for the damageability of the material. *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 162, No. 2, pp. 216-230.
3. Shevchenko, Yu. N., Galishin, A. Z. & Babeshko, M. E. (2015). Thermoviscoelastoplastic deformation of compound shells of revolution made of a damageable material. *Int. Appl. Mech.*, Vol. 51, No. 6, pp. 607-613.
4. Sklepus, S. M. (2015). Solution of the Axisymmetric Problem of Creep and Damage for a Piecewise Homogeneous Body with an Arbitrary Shape of a Meridional Section. *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 205, No. 5, pp. 644-658.
5. Grigorenko, Ya. M. & Vasilenko, A. T. (1981). Theory of shells of variable inflexibility. Kiev: Nauk. Dumka, (Metody rasheta obolochek: in 5 vol.; vol.4).
6. Galishin, A. Z. & Sklepus, S. N. (2015). Application of shell models to calculation of creep and damageability of hollow cylinders. *Zbirnik Dniprodzherzinskogo technichnogo un-tu*, Iss. 1(26), pp. 60-70.
7. Rabotnov, Yu. N. (1969). Creep Problems in Structural Members. Moscow: Nauka.
8. Zolochovsky, A. A., Sklepus, A. N. & Sklepus, S. N. (2011). Nonlinear mechanics of deformable solids. Kharkov: Biznes Investor Grup.
9. Rvachev, V. L. (1982). Theory of R-functions and some applications. Kiew: Nauk. dumka.
10. Shevchenko, Yu. N., Babeshko, M. E. & Terehov, R. G. (1992). Thermo-viscoelastic-plastic processes of complex deformation of structural elements. Kiev: Nauk. dumka.
11. Zolochovsky, A., Galishin, A., Sklepus, S., Parkhomenko, L., Gnitko, V., Kühhorn, A., Kober, M. & Leyens, C. (2013). Benchmark creep tests for thermal barrier coating. *Visnik NTU “KHPI”*, No. 23, pp. 159-179.
12. Kachanov, L. M. (1975). Fundamentals of fracture mechanics. Moscow: Nauka.