

22. Hoff, N. J. & Mautner, S. E. (1945). Buckling of sandwich-type panels. Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 12, No. 3, pp. 285-297.
23. Noor, A. K. (1996). Computational Models for Sandwich Panels and Shells. Applied Mechanics Reviews, Vol. 49, No. 3, pp. 155-199.
24. Reissner, E. (1948). Finite deflection of sandwich plates. Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 15, No. 7, pp. 435-440.

УДК 519.172

ЕДИНИЧНЫЕ И ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ В ГРАФЕ

Курапов С. В., к. ф.-м. н., доцент, Давидовский М. В.

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

lilili5050@rambler.ru, m.davidovsky@gmail.com

В данной работе рассматриваются свойства изометрических циклов в графе. Представлен алгоритм выделения множества изометрических циклов в графе. Для графов с циклическими фрагментами вводится понятие единичного цикла. Представлен алгоритм выделения множества единичных циклов в графе с циклическими фрагментами. Рассмотрены основные свойства единичных циклов. Вычислительная сложность представленных алгоритмов определяется как $O(m)$.

Ключевые слова: неориентированный граф, граф с циклическими фрагментами, изометрические циклы, единичные циклы.

ОДИНИЧНІ ТА ІЗОМЕТРИЧНІ ЦИКЛИ У ГРАФІ

Курапов С. В., к. ф.-м. н., доцент, Давидовський М. В.

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

lilili5050@rambler.ru, m.davidovsky@gmail.com

У роботі розглядаються властивості ізометричних циклів у графі. У статті представлений алгоритм виділення множини ізометричних циклів у графі. Для графів з циклічними фрагментами вводится поняття одиничного циклу. Представлений алгоритм виділення множини одиничних циклів у графі з циклічними фрагментами. Розглянуто основні властивості одиничних циклів. Обчислювальна складність представлених алгоритмів визначається як $O(m)$.

Ключові слова: неорієнтований граф, граф з циклічними фрагментами, ізометричні цикли, одиничні цикли.

UNIT AND ISOMETRIC CYCLES IN GRAPHS

Kurapov S. V., PhD, Associate professor, Davidovsky M. V.

*Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69096, Ukraine*

lilili5050@rambler.ru, m.davidovsky@gmail.com

This article presents a mathematical framework that allows solving a number of important combinatorial problems arising during the design of complex products and systems, the design of flat structures, the analysis of social networks and many other topical applied problems. This framework is based on the concepts of isometric and unit cycles of a graph and their properties. The aim of the presented research is a mathematical description of the properties of graph isometric cycles, as well as the introduction of the concept of unit cycles for graphs with cyclic fragments and the description of their properties. The presented mathematical framework basically follows the topological approach, which consists in the

initial construction of a topological drawing of a graph using the set-theoretic methods without geometric drawing of the graph on the plane. Further, a geometric drawing of the graph is constructed on the basis of the obtained topological drawing using the methods of the theory of rotation taking into account the geometric constraints. The definition of an isometric cycle is given, and the properties of isometric cycles in a graph are examined in the article. For graphs with cyclic fragments, the notion of a unit cycle is introduced and the basic properties of unit cycles are analyzed. Two theorems on the existence of a basis of a linear subspace of quasi-cycles consisting of isometric cycles are proved in the article. The authors propose new algorithms for constructing the set of isometric cycles of a graph and for constructing a set of unit cycles for graphs with cyclic fragments. The computational complexities of the proposed algorithms are of the order $O(m)$, where m is the number of edges in the graph. The mathematical framework presented in this article can serve as a basis for solving such challenging problems in frame of the Graph Theory as constructing a graph with predefined properties, graph planarity testing and finding the maximally flat subgraph of a graph, graph coloring, etc. From the practical point of view, this framework allows effectively solving a number of topical problems in the field of electrical circuits and planar structures design.

Key words: undirected graph, graph with cyclic fragments, isometric cycles, unit cycles.

ВВЕДЕНИЕ

Во многих областях науки и техники требуется решение задачи визуализации рисунка графа [1-3]. Эта задача может быть решена с помощью математического аппарата, основанного на понятиях изометрических и единичных циклов графа. Сутью этого математического аппарата является топологический подход, который заключается в первоначальном построении топологического рисунка графа (G, h) с применением теоретико-множественных методов без геометрической прорисовки графа на плоскости [4]. Следующим шагом является построение геометрического рисунка графа с учетом тех или иных геометрических ограничений с использованием методов теории вращения [5]. При этом одним из основных вопросов является построение множества изометрических циклов графа, а для графов с циклическими фрагментами – построение множества единичных циклов. Рассмотрим основные свойства множества таких циклов и способы их выделения.

МЕТРИКА ГРАФОВ. РАССТОЯНИЕ В ГРАФЕ

Воспользуемся понятием расстояния между двумя вершинами графа [6].

Расстоянием $\rho(x, y)$ в графе G между вершинами x и y графа $G = (X, U)$ называется длина кратчайшего из маршрутов (и, значит, кратчайшей из простых цепей), соединяющих эти вершины; если x и y отделены в G , то $\rho(x, y) = +\infty$. Функция $\rho = \rho(x, y)$, определенная на множестве всех пар вершин графа G и принимающая целые неотрицательные значения (к числу которых мы относим и бесконечное), является метрикой графа, поскольку она удовлетворяет трем аксиомам Фреше:

$$\forall x, y \in X [\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y], \tag{1}$$

$$\forall x, y \in X [\rho(x, y) = \rho(y, x)], \tag{2}$$

$$\forall x, y, z \in X [\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)]. \tag{3}$$

Выполнение первых двух аксиом тривиально, проверим третью (неравенство треугольника).

Если вершины x, y или вершины y, z отделены, то, по крайней мере, одна из двух величин $\rho(x, y)$ и $\rho(y, z)$ есть $-\infty$. Если же ни x и y , ни z и y не отделены, то пусть

$$x \ u_1 \ x_1 \ u_2 \ x_2 \ \dots \ x_{\rho(x, y)-1} \ u_{\rho(x, y)} \ y \quad \text{и} \quad y \ v_1 \ y_1 \ v_2 \ y_2 \ \dots \ y_{\rho(y, z)-1} \ v_{\rho(y, z)} \ z$$

– какие-либо из кратчайших цепей, соединяющих эти пары вершин. Маршрут

$$x \ u_1 \ x_1 \ u_2 \ x_2 \ \dots \ x_{\rho(x, y)-1} \ u_{\rho(x, y)} \ y \ v_1 \ y_1 \ v_2 \ y_2 \ \dots \ y_{\rho(y, z)-1} \ v_{\rho(y, z)} \ z$$

обладает длиной $\rho(x, y) + \rho(y, z)$, значит длина $\rho(x, z)$ кратчайшей цепи между x и z не превышает $\rho(x, y) + \rho(y, z)$. В обоих случаях неравенство треугольника выполнено.

Введем следующие понятия, связанные с метрикой графа.

Определение 1 [7]. *Изометрический подграф* – подграф G' графа G , у которого все расстояния внутри G' те же самые, что и в G .

На рис. 1 представлен граф G , имеющий следующую матрицу расстояний:

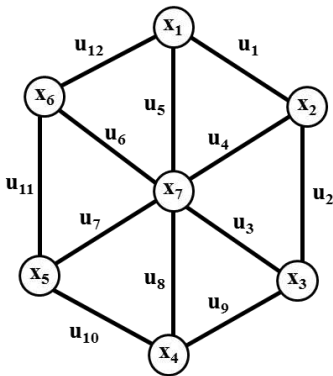
$$\rho = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} & \begin{matrix} \infty & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & \infty & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & \infty & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & \infty & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & \infty & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & \infty & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \infty \end{matrix} \end{matrix}$$


Рис. 1. Граф G

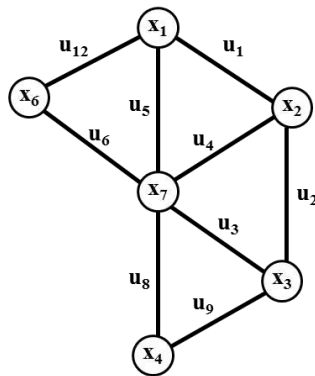


Рис. 2. Изометрический подграф G'

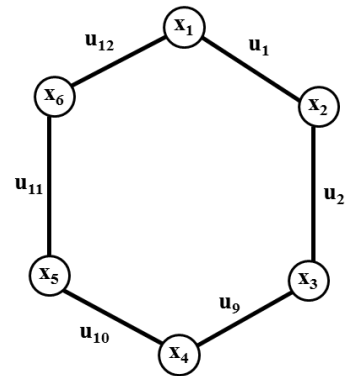


Рис. 3. Неизометрический подграф G'

Подматрица расстояний для изометрического подграфа, представленного на рис. 2.

$$\rho = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_6 & x_7 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} & \begin{matrix} \infty & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & \infty & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & \infty & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & \infty & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \infty & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \infty \end{matrix} \end{matrix}$$

Подматрица расстояний для неизометрического подграфа, представленного на рис. 3.

$$\rho = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{matrix} \infty & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & \infty & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & \infty & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & \infty & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & \infty & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & \infty \end{matrix} \end{matrix}$$

Как видим, матрица расстояний для подграфа на рис. 2 является, а матрица расстояний для подграфа на рис. 3 – не является подматрицей расстояний графа G .

МНОЖЕСТВО ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ

Мощность подмножества простых циклов в графе меньше мощности множества квазициклов. Подмножество простых циклов обозначим C_R :

$$\text{card } C_R \leq \text{card } C. \tag{4}$$

Однако существует подмножество с мощностью еще меньшей, чем подмножество простых циклов, обладающее определенными характерными свойствами.

Определение 2. *Изометрический цикл* в графе – это простой цикл, для которого кратчайший путь между любыми двумя его вершинами состоит из ребер этого цикла.

Изометрический цикл – частный случай изометрического подграфа [7]. Или, другими словами, изометрическим циклом в графе называется подграф G' в виде простого цикла, если между двумя любыми несмежными вершинами данного подграфа в графе G не существует маршрутов меньшей длины, чем маршруты, принадлежащие данному циклу. Подмножество, состоящее из изометрических циклов, будем называть подмножеством изометрических циклов, и обозначать C_+ . Сказанное поясним на примерах. Рассмотрим суграф, состоящий из ребер $\{u_1, u_3, u_{13}, u_{15}\}$ графа G_a , представленного на рис. 4,а. Как видно – это простой цикл. Но в то же время, это не изометрический цикл, так как между вершинами x_7 и x_8 в графе существует маршрут меньшей длины, проходящий по ребру u_{14} .

Рассмотрим граф G_b , представленный на рис. 4,б. Пусть цикл состоит из ребер $u_1, u_2, u_3, u_6, u_8, u_9, u_{11}, u_{12}$. Данный суграф есть простой цикл. Однако этот суграф не может быть изометрическим циклом, так как в соответствующем графе между вершинами x_2 и x_8 имеется маршрут меньшей длины (а именно: маршрут, проходящий по ребрам u_4 и u_{10}), чем маршруты, принадлежащие этому суграфу (например, маршрут, проходящий по ребрам u_1, u_3, u_8, u_9 или u_2, u_6, u_{11}, u_{12}). Следует заметить, что в полных графах множество изометрических циклов совпадает с множеством циклов минимальной длины. Для изучения свойств изометрических циклов нам понадобится следующая теорема.

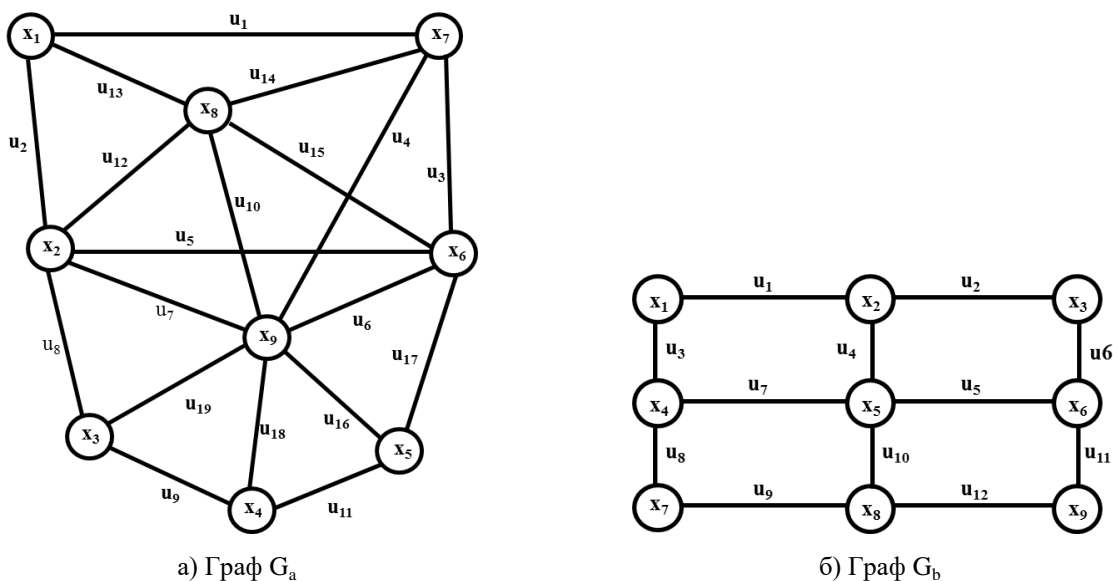


Рис. 4. Графы G_a и G_b

Теорема 1. Для любого несепарабельного графа линейное подпространство квазициклов имеет базис, состоящий из изометрических циклов.

Доказательство. Будем рассматривать систему фундаментальных циклов, порожденных деревом T . Пусть вершины A_1, A_2, \dots, A_p образуют фундаментальный цикл, содержащий хорду (A_p, A_1) . Если между несмежными вершинами этого цикла в графе не существует путей меньшей или равной длины, чем пути принадлежащие циклу, то это изометрический цикл. Если в цикле существуют две несмежные вершины графа A_i и A_j ($i < j$), а в графе существует путь меньшей длины для выбранных вершин, чем путь по циклу $A_i, B_1, B_2, \dots, B_r, A_j$, то образуются два цикла, кольцевая сумма которых есть исходный цикл. Напомним, что под кольцевой суммой графов G_1 и G_2 понимается граф $G = G_1 \oplus G_2$, порожденный на множестве ребер $(A_1 \cup A_2) \setminus (A_1 \cap A_2)$, т. е. ребер, присутствующих либо в G_1 , либо в G_2 , но не принадлежащих их пересечению $G_1 \cap G_2$. Итак, оставляем цикл, содержащий хорду. Это и есть изометрический цикл. Так как количество фундаментальных циклов определяется цикломатическим числом, то количество изометрических циклов, полученных описанным выше способом, также равно цикломатическому числу графа и включает все хорды. Следовательно, система линейно независима. *Теорема доказана.*

СВОЙСТВА ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ

Рассмотрим следующий граф, представленный на рис. 5. Построим матрицу расстояний для данного графа:

$$\rho =$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_1	∞	1	2	2	1	1	2	3	2
x_2	1	∞	1	2	2	2	1	2	3
x_3	2	1	∞	1	2	2	1	1	2
x_4	2	2	1	∞	1	2	2	1	1
x_5	1	2	2	1	∞	1	2	2	1
x_6	1	2	2	2	1	∞	1	2	1
x_7	2	1	1	2	2	1	∞	1	2
x_8	3	2	1	1	2	2	1	∞	1
x_9	2	3	2	1	1	1	2	1	∞

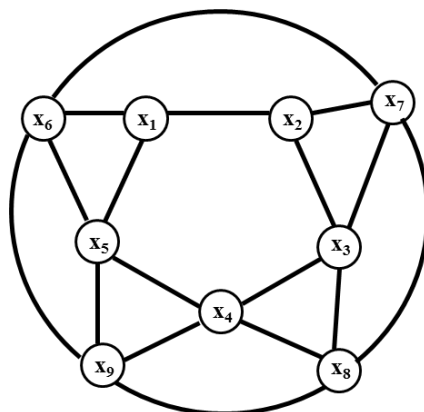


Рис. 5. Граф G

Рассмотрим подграф, состоящий из вершин $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Данный подграф – изометрический цикл, состоящий из вершин $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, так как его матрица расстояний совпадает с подматрицей данного подграфа (см. подматрицу слева).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	∞	1	2	2	1
x_2	1	∞	1	2	2
x_3	2	1	∞	1	2
x_4	2	2	1	∞	1
x_5	1	2	2	1	∞

 $=$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	∞	1			1
x_2	1	∞	1		
x_3		1	∞	1	
x_4			1	∞	1
x_5	1			1	∞

Удалим из подматрицы все неединичные элементы (см. подматрицу справа), такую подматрицу впредь будем называть подматрицей с единичными элементами. В результате получим подматрицу, состоящую только из единиц, и представляющую собой матрицу смежностей для выбранного изометрического цикла. Представим каждую строку такой подматрицы в виде записи однострочного структурного числа [8]. Произведем умножение однострочных структурных чисел, в результате получим следующее структурное число:

$x_1:$	[x_2	x_5]	$=$	$x_1:$		x_2	x_5	
$x_2:$	[x_1	x_3]		$x_2:$		x_3	x_1	
$x_3:$	[x_2	x_4]		$x_3:$		x_4	x_2	
$x_4:$	[x_3	x_5]		$x_4:$		x_5	x_3	
$x_5:$	[x_1	x_4]		$x_5:$		x_1	x_4	

Каждый элемент структурного числа (столбец) характеризует ориентированный цикл:

$$c_1 = (x_1, x_2) + (x_2, x_3) + (x_3, x_4) + (x_4, x_5) + (x_5, x_1); c_2 = (x_1, x_5) + (x_5, x_4) + (x_4, x_3) + (x_3, x_2) + (x_2, x_1).$$

Рассмотрим подграф, состоящий из вершин $\{x_1, x_2, x_5, x_6, x_7\}$.

	x_1	x_2	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	1	1	1	2
x_2	1	∞	2	2	1
x_5	1	2	∞	1	2
x_6	1	2	1	∞	1
x_7	2	1	2	1	∞

 $=$

	x_1	x_2	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	1	1	1	
x_2	1	∞			1
x_5	1	1	∞	1	
x_6	1		1	∞	1
x_7		1		1	∞

Представим каждую строку такой подматрицы в виде записи однострочного структурного числа. Произведем умножение однострочных структурных чисел, в результате получим следующее структурное число:

$x_1:$	[x_2	x_3	x_4]	$=$	$x_1:$		x_2	x_5	x_5	x_6	
$x_2:$	[x_1	x_5]		$x_2:$		x_7	x_1	x_7	x_7	
$x_5:$	[x_1	x_2	x_4]		$x_5:$		x_1	x_6	x_6	x_1	
$x_6:$	[x_1	x_3	x_5]		$x_6:$		x_5	x_7	x_1	x_5	
$x_7:$	[x_2	x_4]		$x_7:$		x_6	x_2	x_2	x_2	

Элементы структурного числа характеризуются столбцами. Полученные циклы не являются изометрическими циклами (см. рис. 1-3), так как существуют элементы структурного числа, представляющие собой квазициклы.

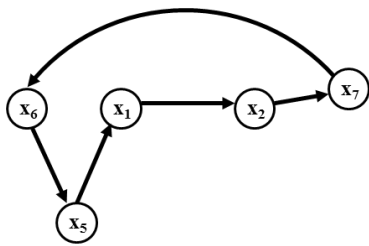


Рис. 6. Цикл для 1-го столбца

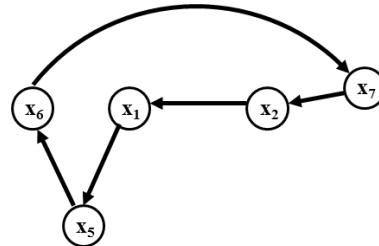


Рис. 7. Цикл для 2-го столбца

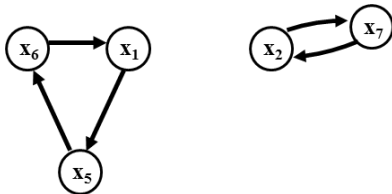


Рис. 8. Квазицикл для 3-го столбца

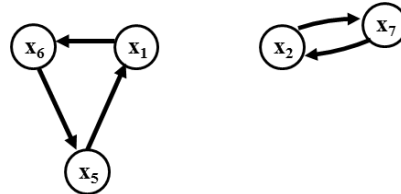


Рис. 9. Квазицикл для 4-го столбца

Рассмотрим подграф, состоящий из вершин $\{x_3, x_4, x_5, x_8, x_9\}$.

	x_3	x_4	x_5	x_8	x_9
x_3	∞	1	2	1	2
x_4	1	∞	1	1	1
x_5	2	1	∞	2	1
x_8	1	1	2	∞	1
x_9	2	1	1	1	∞

 $=$

	x_3	x_4	x_5	x_8	x_9
x_3	∞	1		1	
x_4	1	∞	1	1	1
x_5		1	∞		1
x_8	1	1		∞	1
x_9		1	1	1	∞

Представим каждую строку такой подматрицы в виде записи однострочного структурного числа. Произведем умножение однострочных структурных чисел, в результате получим следующее структурное число:

$$\begin{matrix}
 x_3: [& x_4 & x_8 & &] \\
 x_4: [& x_3 & x_5 & x_8 & x_9] \\
 x_5: [& x_4 & x_9 & &] \\
 x_8: [& x_3 & x_4 & x_9 &] \\
 x_9: [& x_4 & x_5 & x_8 &]
 \end{matrix}
 =
 \begin{matrix}
 x_3 & x_4 & x_4 & x_8 & x_8 & x_8 & x_8 \\
 x_4 & x_5 & x_8 & x_3 & x_3 & x_5 & x_9 \\
 x_5 & x_9 & x_9 & x_4 & x_9 & x_9 & x_4 \\
 x_8 & x_3 & x_3 & x_9 & x_4 & x_3 & x_3 \\
 x_9 & x_8 & x_5 & x_5 & x_5 & x_4 & x_5
 \end{matrix}$$

Элементы структурного числа характеризуются столбцами. Полученные циклы также не являются изометрическими циклами, так как существуют элементы структурного числа, представляющие собой квазициклы (например, 2-ой, 4-ый, 5-ый и 6-ой столбцы). Таким образом, изометрические циклы характеризуются еще и тем, что подматрица расстояний подграфа данного цикла, состоящая только из единичных элементов, представляет собой матрицу смежностей. И существуют только два простых цикла с различной ориентацией.

Для изучения свойств изометрических циклов нам понадобится следующая теорема.

Теорема 2. Для любого связного простого несепарабельного графа без мостов и петель, без кратных ребер и точек сочленения и без вершин с локальной степенью, меньшей или равной двум, линейное подпространство квазициклов имеет базис, состоящий из изометрических циклов.

Доказательство. Будем рассматривать систему фундаментальных циклов, порожденных деревом T . Пусть вершины A_1, A_2, \dots, A_p образуют фундаментальный цикл, содержащий

хорду (A_p, A_1) . Если между несмежными вершинами этого цикла в графе не существует путей, меньшей или равной длины, чем пути принадлежащие циклу, то это есть изометрический цикл. Если в цикле существуют две несмежные вершины графа A_i и A_j ($i < j$), путь между которыми минимален и включает хорду, то такой путь $A_i, B_1, B_2, \dots, B_r, A_j$ содержит количество ребер, меньшее либо равное пути между A_i и A_j нашего цикла. Так образуются два цикла, кольцевая сумма которых есть исходный цикл. Отметим, что каждый новый цикл имеет не более, чем $p-1$ вершин. Оставляем цикл, содержащий хорду, это и есть изометрический цикл. Так как количество фундаментальных циклов определяется цикломатическим числом, то количество изометрических циклов, полученных описанным выше способом, также равно цикломатическому числу графа. Множество изометрических циклов включает все хорды и линейно независимо. *Теорема доказана.*

Ввиду важности вопроса выделения конечного множества изометрических циклов из множества квазициклов, предлагается алгоритм выделения множества изометрических циклов в графе. Построение алгоритма начинается с выделения всех ребер в графе G . Выберем очередное ребро графа. Одну из вершин выбранного ребра пометим индексом 1, другую – индексом 2. Вершины графа, смежные с вершиной, имеющей индекс 2, и ещё не помеченные, пометим индексом 3. Не помеченные вершины, смежные с вершиной, имеющей индекс 3, пометим индексом 4 и т. д. Число, выражающее индекс последней помеченной вершины (вершин) графа, называется глубиной проникновения волны относительно выбранного ребра. Данный процесс представляет собой разметку вершин графа относительно выбранного ребра волновым алгоритмом (алгоритмом поиска в ширину).

Построим простые циклы, проходящие по выбранному ребру относительно первоначальной ориентации. С этой целью выберем все вершины графа G , смежные с вершиной, помеченной индексом 1. Будем идти от любой выбранной вершины, имеющей глубину проникновения d , к вершинам, имеющим глубину проникновения $(d-1)$, проходя при этом по ребрам графа. Затем будем идти от вершины $(d-1)$ к вершинам $(d-2)$ и т.д. Остановим этот процесс тогда, когда подойдем к вершине, имеющей индекс 2. Пройдя по всем построенным таким образом маршрутам, построим систему циклов, проходящих по выбранному ребру j . Обозначим такое множество циклов через S_j^1 . Переориентируем направление разметки. Теперь вершина, имевшая индекс 1, будет иметь индекс 2, а вершина, имевшая индекс 2, будет иметь индекс 1. И вновь построим разметку вершин. Описанным выше методом выделим систему циклов. Изометрические циклы, проходящие по выбранному ребру j , будут образованы как:

$$C_j = C_j^1 \cap C_j^2. \quad (6)$$

Множество изометрических циклов графа G будет образовано как объединение всех циклов, проходящих по всем ребрам графа:

$$C_\tau = \bigcup_{i=1}^m C_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (7)$$

Алгоритм 1. [Выделение множества изометрических циклов методом поиска в ширину]

Шаг 1. Выбираем ребро. Если количество ребер исчерпано, то конец работы алгоритма.

Шаг 2. Алгоритмом поиска в ширину производим прямую разметку вершин относительно вершины s выбранного ребра.

Шаг 3. Производим формирование множества циклов C_s при прямой разметке вершин.

Шаг 4. Алгоритмом поиска в ширину производим обратную разметку вершин относительно вершины t выбранного ребра.

Шаг 5. Производим формирование множества циклов C_t при обратной разметке вершин.

Шаг 6. Проверяем циклы C_s и C_t для выбранного ребра на совпадение. Несовпадающие циклы исключаем из рассмотрения.

Шаг 7. Проверяем сформированные на предыдущем шаге циклы с ранее записанными циклами во множестве изометрических циклов и в случае их отсутствия добавляем их во множество изометрических циклов. Идем на шаг 1.

Пример 1. В качестве примера рассмотрим граф G (рис. 10).

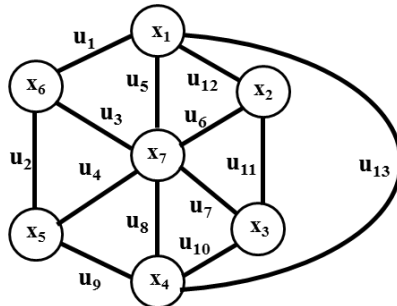


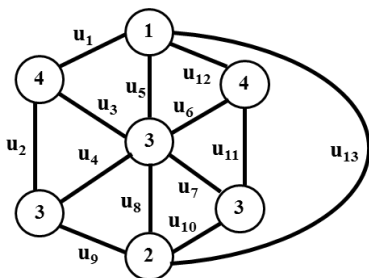
Рис. 10. Граф G

Если в качестве выбранного ребра взять ребро u_{13} , то процесс разметки вершин имеет вид, представленный на рис. 11. Система циклов, проходящих по ребру u_{13} , для разметки, показанной на рис. 11,а:

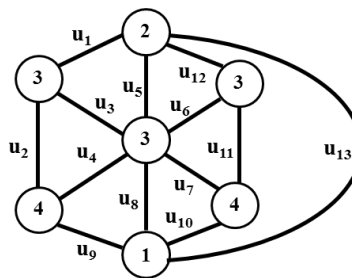
$$C_{13}^1 = \{ \{u_5, u_8, u_{13}\}, \{u_1, u_3, u_8, u_{13}\}, \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\}, \{u_6, u_8, u_{12}, u_{13}\}, \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\} \}.$$

Система циклов, проходящих по ребру u_{13} , для разметки, представленной на рис. 11,б:

$$C_{13}^2 = \{ \{u_5, u_8, u_{13}\}, \{u_4, u_5, u_9, u_{13}\}, \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\}, \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}, \{u_5, u_7, u_{10}, u_{13}\} \}.$$



а)



б)

Рис. 11. Прямой и обратный процесс разметки вершин для ребра u_{13}

Пересечение множеств C_{13}^1 и C_{13}^2 :

$$C_{13} = C_{13}^1 \cap C_{13}^2 = \{ \{u_5, u_8, u_{13}\}, \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\}, \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\} \}.$$

Получим следующие соответствия ребер и изометрических циклов:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{ \{u_1, u_3, u_5\}, \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\} \}; & C_2 &= \{ \{u_2, u_3, u_4\}, \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\} \}; \\ C_3 &= \{ \{u_2, u_3, u_4\}, \{u_1, u_3, u_5\} \}; & C_4 &= \{ \{u_4, u_8, u_9\}, \{u_2, u_3, u_4\} \}; \\ C_5 &= \{ \{u_1, u_3, u_5\}, \{u_5, u_6, u_{12}\}, \{u_5, u_8, u_{13}\} \}; & C_6 &= \{ \{u_5, u_6, u_{12}\}, \{u_6, u_7, u_{11}\} \}; \\ C_7 &= \{ \{u_6, u_7, u_{11}\}, \{u_7, u_8, u_{10}\} \}; & C_8 &= \{ \{u_5, u_8, u_{13}\}, \{u_7, u_8, u_{10}\}, \{u_3, u_8, u_9\} \}; \\ C_9 &= \{ \{u_4, u_8, u_9\}, \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\} \}; & C_{10} &= \{ \{u_7, u_8, u_{10}\}, \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\} \}; \\ C_{11} &= \{ \{u_6, u_7, u_{11}\}, \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\} \}; & C_{12} &= \{ \{u_5, u_6, u_{12}\}, \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\} \}; \\ C_{13} &= \{ \{u_5, u_8, u_{13}\}, \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\}, \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\} \}. \end{aligned}$$

Множество изометрических циклов получим как объединение:

$$C_\tau = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_6 \cup C_7 \cup C_8 \cup C_9 \cup C_{10} \cup C_{11} \cup C_{12} \cup C_{13} = \\ = \{ \{u_1, u_3, u_5\}, \{u_2, u_3, u_4\}, \{u_4, u_8, u_9\}, \{u_5, u_6, u_{12}\}, \{u_5, u_8, u_{13}\}, \{u_6, u_7, u_{11}\}, \{u_7, u_8, u_{10}\}, \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\}, \\ \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\} \}.$$

Таким образом, множество изометрических циклов состоит из 9-ти элементов. Цикломатическое число графа G равно 7. Следовательно, для построения базиса нужно удалить два изометрических цикла. Очевидно, что для любого трехсвязного и более графа G множество изометрических циклов имеет мощность меньшую, чем мощность множества простых циклов, но большую или равную цикломатическому числу графа:

$$v(G) \leq \text{card } C_\tau \leq \text{card } C_R \leq \text{card } C. \tag{8}$$

Теперь покажем, что построение множества изометрических циклов должно производиться относительно всего множества ребер графа.

Покажем, что построение множества изометрических циклов должно производиться относительно всего множества ребер графа. Может показаться, что можно сократить перебор ребер для выделения всех изометрических циклов, если рассматривать только хорды графа. Следующий пример демонстрирует невозможность получения полного множества изометрических циклов, если построение производится только относительно хорд для выбранного дерева графа.

Пример 2. Рассмотрим граф, представленный на рис. 12.

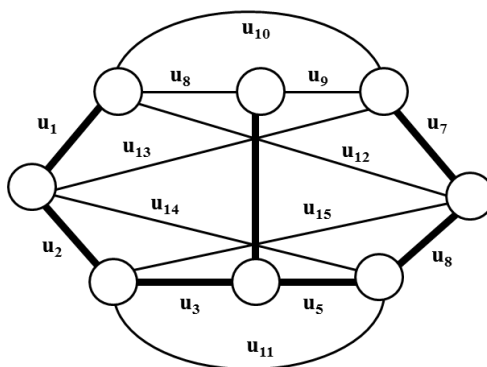


Рис. 12. Граф G и его дерево

Изометрические циклы относительно 4-го ребра: $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_8\}$, $\{u_3, u_4, u_8, u_{12}, u_{15}\}$, $\{u_4, u_5, u_6, u_8, u_{12}\}$, $\{u_4, u_5, u_6, u_7, u_9\}$, $\{u_2, u_3, u_4, u_9, u_{13}\}$, $\{u_4, u_5, u_9, u_{13}, u_{14}\}$. Как видно из данного примера, если построение производится только относительно хорд для выбранного дерева графа, то множество изометрических циклов будет не полно. В данном примере в итоговое множество не вошли изометрические циклы, проходящие по четвертому ребру.

Произведя сравнительный анализ, можно утверждать следующее:

- количество изометрических циклов в графе является постоянной величиной, равной или большей цикломатического числа графа, и не зависит от способа их выделения, в то время, как множество фундаментальных циклов в точности равно цикломатическому числу графа и зависит от выбора дерева;
- длина центральных разрезов графа определяет локальные степени вершин.

Рассмотрим основные свойства множества изометрических циклов графа. Введем фундаментальное понятие 0-подмножества изометрических циклов. Так как каждый суграф графа G представляет собой вектор из пространства суграфов L_G размерностью m , то система точек $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$ m -мерного линейного пространства L_G называется независимой, если система векторов

$$(x_1 - x_0), (x_2 - x_0), \dots, (x_k - x_0) \tag{9}$$

линейно независима. Очевидно, что независимость возможна и при $k < m$. Система (9) линейно независима тогда и только тогда, когда из соотношений

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k = 0, \quad (10)$$

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 0 \quad (11)$$

вытекает:

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0. \quad (12)$$

Здесь $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ – действительные числа. Таким образом, порядок нумерации точек не влияет на свойство независимости системы $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$ и если система точек независима, то всякая её подсистема также независима.

Покажем, что если система векторов (9) линейно независима, то из соотношений (10) и (11) вытекает (12). В силу (11) соотношение (10) переписывается в виде: $(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k) x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k = 0$, или иначе: $\lambda_1(x_1 - x_0) + \lambda_2(x_2 - x_0) + \dots + \lambda_k(x_k - x_0) = 0$.

Но так как система (9) линейно независима, то из последнего вытекает $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$, а отсюда, ввиду (11), следует и $\lambda_0 = 0$. Покажем теперь, что если из соотношения (10) и (11) вытекает (12), то система (9) линейно независима. Пусть имеет место следующее:

$$\lambda_1(x_1 - x_0) + \lambda_2(x_2 - x_0) + \dots + \lambda_k(x_k - x_0) = 0. \quad (13)$$

Полагая $\lambda_0 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k)$, мы можем переписать соотношение (13) в виде $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k = 0$, причем для $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ выполнено (11). Значит, $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$, т.е. из (13) вытекает $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$, а это означает линейную независимость системы (9).

ИНВАРИАНТЫ, ПОСТРОЕННЫЕ НА МНОЖЕСТВЕ ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ И ЦЕНТРАЛЬНЫХ РАЗРЕЗОВ ГРАФА

Как мы успели убедиться, запись замкнутого маршрута может быть осуществлена через подмножество ребер или через подмножество вершин графа. Запись цикла через подмножество ребер будем называть реберной записью цикла [3, 4]. Соответственно, вершинная запись цикла состоит из подмножества вершин, принадлежащих рассматриваемому циклу. В основном для записи суграфов и операций с ними применяется реберная запись. Вершинная запись применяется несколько реже и характеризует несколько иные свойства циклов. Имея множество изометрических циклов графа, можно построить вектор количества изометрических циклов, проходящих по ребру (впредь будем называть его вектором циклов по ребрам). Например, для графа G , представленного на рис. 13, множество изометрических циклов в реберной записи имеет вид:

$$c_1 = \{u_1, u_3, u_5\}; c_2 = \{u_2, u_3, u_4\}; c_3 = \{u_4, u_8, u_9\}; c_4 = \{u_5, u_6, u_{12}\};$$

$$c_5 = \{u_5, u_8, u_{13}\}; c_6 = \{u_6, u_7, u_{11}\}; c_7 = \{u_7, u_8, u_{10}\}; c_8 = \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\};$$

$$c_9 = \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}.$$

И тогда вектор циклов по ребрам можно записать в виде:

$$V_u = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Или в виде $V_u = (2, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 2, 3)$. Если записать изометрические циклы через вершины:

$$c_1 = \{x_1, x_6, x_7\}; c_2 = \{x_5, x_6, x_7\}; c_3 = \{x_4, x_5, x_7\}; c_4 = \{x_1, x_2, x_7\};$$

$$c_5 = \{x_1, x_4, x_7\}; c_6 = \{x_2, x_3, x_7\}; c_7 = \{x_3, x_4, x_7\}; c_8 = \{x_1, x_4, x_5, x_6\};$$

$$c_9 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\},$$

то вектор количества изометрических циклов, проходящих по вершинам графа (впредь будем его называть – вектор циклов по вершинам), запишется в виде:

$$V_x = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline 5 & 3 & 3 & 5 & 3 & 3 & 7 \\ \hline \end{array}$$

или в виде $V_x = (5,3,3,5,3,3,7)$.

Но существует запись циклов в виде замкнутого ориентированного маршрута, так как любое неориентированное ребро может быть представлено двумя разнонаправленными ориентированными ребрами. Такая запись циклов (замкнутых маршрутов) характерна только для плоских графов с учетом заданного направления обхода. Например, для графа, представленного на рис. 12, базисная система изометрических циклов и обод, характеризующие плоский граф, могут быть записаны в векторном виде:

$$c_1 = (x_1, x_7) + (x_7, x_6) + (x_6, x_1); \quad c_2 = (x_6, x_7) + (x_7, x_5) + (x_5, x_6);$$

$$c_3 = (x_5, x_7) + (x_7, x_4) + (x_4, x_5); \quad c_4 = (x_1, x_2) + (x_2, x_7) + (x_7, x_1);$$

$$c_6 = (x_2, x_3) + (x_3, x_7) + (x_7, x_2); \quad c_7 = (x_7, x_3) + (x_3, x_4) + (x_4, x_7);$$

$$c_9 = (x_1, x_4) + (x_4, x_3) + (x_3, x_2) + (x_2, x_1); \quad c_0 = c_8 = (x_1, x_6) + (x_6, x_5) + (x_5, x_5) + (x_4, x_1).$$

Инвариант графа – это число (функция) графа G , которое принимает одно и то же значение на любом графе, изоморфном G . Пусть f – функция, относящая каждому графу G некоторый элемент $f(G)$ из множества M произвольной природы (элементами множества M чаще всего служат числа и системы чисел, векторы, многочлены, матрицы). Эту функцию будем называть инвариантом, если на изоморфных графах её значения совпадают, т.е.

$$\forall G \text{ и } G' \text{ выполняется } G \cong G' \Rightarrow f(G) = f(G'). \tag{14}$$

Подпространства разрезов и циклов являются нормированными пространствами, так как любому их элементу можно поставить в соответствие неотрицательное вещественное число $\|l\|$, называемое *нормой*. В данном случае это длины разрезов и циклов соответственно. Введенное понятие удовлетворяет следующим условиям:

- $\|l\| > 0$ при $l \neq 0$, $\|0\| = 0$,
- $\|l_1 + l_2\| \leq \|l_1\| + \|l_2\|$ для любых $l_1 \in R$, $l_2 \in R$,
- $\|\alpha l\| = |\alpha| \|l\|$ для любого $l \in R$ и вещественного числа α .

Множеству центральных разрезов можно поставить в соответствие так называемый вектор локальных степеней, который также будет инвариантом графа:

$$V_s = (p_1 \times l_1, p_2 \times l_2, \dots), \tag{15}$$

где p_1 – количество центральных разрезов во множестве S длиной l_1 ; p_2 – количество центральных разрезов длиной l_2 во множестве S и т.д.

Причем $l_1 \leq l_2 \leq l_3 \leq \dots$, то есть длина циклов расставлена в порядке неубывания.

Множеству изометрических циклов можно также поставить в соответствие вектор вида (2.16), который также будет инвариантом графа:

$$V_c = (p_1 \times l_1, p_2 \times l_2, \dots), \tag{16}$$

где p_1 – количество изометрических циклов во множестве C_τ длиной l_1 , p_2 – количество изометрических циклов длиной l_2 во множестве C_τ и т.д. Причем $l_1 \leq l_2 \leq l_3 \leq \dots$, то есть длина циклов расставлена в порядке неубывания.

РАССТОЯНИЕ В ГРАФАХ С ЦИКЛИЧЕСКИМИ ФРАГМЕНТАМИ

В теории электрических цепей находят применения графы с циклическими фрагментами. Будем рассматривать графы с ориентированными циклами, представляющие фрагменты принципиальной электрической схемы (см. рис. 13).

На рис. 13 представлен граф с циклическими фрагментами, где неориентированные ребра заменены двумя разнонаправленными ориентированными ребрами. Определим расстояния для 1-ой и 2-ой вершин.

$\rho =$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
x_1	∞	1	2	2	3	4	3	2	3	1	3	2
x_2	2	∞	1	4	2	3	2	3	3	3	2	1

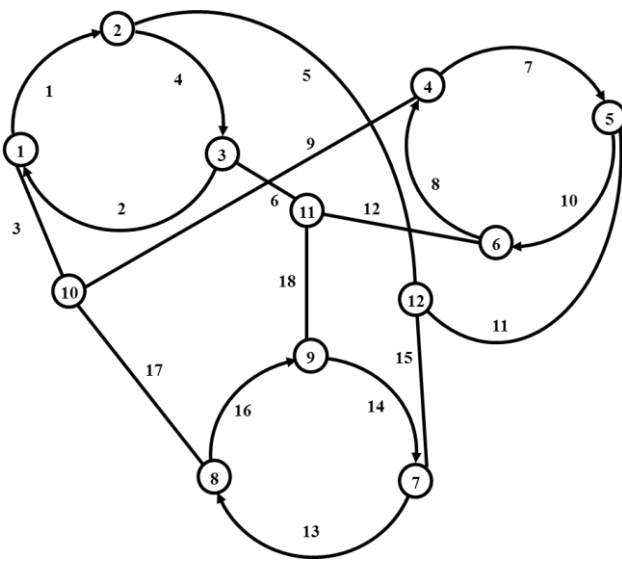


Рис. 13. Граф с циклическими фрагментами

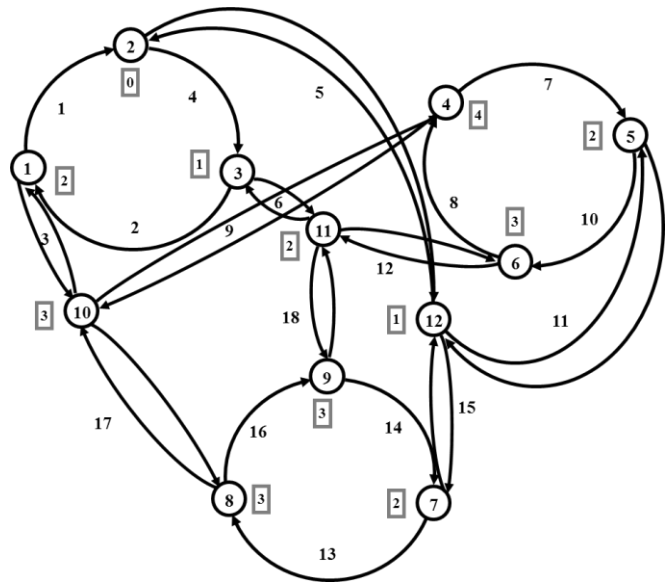


Рис. 14. Расстояния для 2-ой точки

Воспользовавшись рисунком 14, определим расстояние между вершинами графа. Составим матрицу расстояний.

$\rho =$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
x_1	∞	1	2	2	3	4	3	2	3	1	3	2
x_2	2	∞	1	4	2	3	2	3	3	3	2	1
x_3	1	2	∞	3	4	2	3	3	2	2	1	3
x_4	2	3	4	∞	1	2	3	2	3	1	3	2
x_5	4	2	3	2	∞	1	2	3	3	3	2	1
x_6	3	4	2	1	2	∞	3	3	2	2	1	3
x_7	3	2	3	3	2	3	∞	1	2	2	3	1
x_8	2	3	3	2	3	3	2	∞	1	1	2	3
x_9	3	3	2	3	3	2	1	2	∞	3	1	1
x_{10}	1	2	3	1	2	3	3	1	2	∞	3	3
x_{11}	2	3	1	2	3	1	2	3	1	3	∞	3
x_{12}	3	1	2	3	1	2	1	2	3	3	3	∞

ЦИКЛЫ В ГРАФАХ С ЦИКЛИЧЕСКИМИ ФРАГМЕНТАМИ

Определим циклы, проходящие по ориентированным ребрам фрагментов (за исключением самого фрагмента).

Таким образом, множество циклов, проходящих по ориентированным ребрам фрагментов, можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \langle X_1, X_{10}, X_8, X_7, X_{12}, X_2, X_1 \rangle; & C_2 &= \langle X_2, X_{12}, X_7, X_9, X_{11}, X_3, X_2 \rangle; \\
 C_3 &= \langle X_3, X_{11}, X_9, X_8, X_{10}, X_1, X_3 \rangle; & C_4 &= \langle X_4, X_{10}, X_8, X_7, X_{12}, X_5, X_4 \rangle; \\
 C_5 &= \langle X_5, X_{12}, X_7, X_9, X_{11}, X_6, X_5 \rangle; & C_6 &= \langle X_6, X_{11}, X_9, X_8, X_{10}, X_4, X_6 \rangle.
 \end{aligned}$$

Предположим, что выделенные циклы образованы в результате применения алгоритма поиска в ширину для неориентированного ребра. Тогда применяется следующий порядок: начальная вершина ребра не принадлежит, а конечная – принадлежит циклическому фрагменту. Тогда по выбранным ребрам проходят следующие циклы: по ребру $\langle X_{10}, X_1 \rangle - c_1$; по $\langle X_{12}, X_2 \rangle - c_2$; по $\langle X_{11}, X_3 \rangle - c_3$; по $\langle X_{10}, X_4 \rangle - c_4$; по $\langle X_{12}, X_5 \rangle - c_5$; по $\langle X_{11}, X_6 \rangle - c_6$; по $\langle X_{12}, X_7 \rangle - c_1, c_4$; по $\langle X_{10}, X_8 \rangle - c_3, c_6$; и по ребру $\langle X_{10}, X_1 \rangle - c_2, c_5$. Рассмотрим подграф $\{X_1, X_{10}, X_8, X_7, X_{12}, X_2\}$:

$\rho =$

	X_1	X_2	X_7	X_8	X_{10}	X_{12}
X_1	∞	1	3	2	1	2
X_2	2	∞	2	3	3	1
X_7	3	2	∞	1	2	1
X_8	2	3	2	∞	1	3
X_{10}	1	2	3	1	∞	3
X_{12}	3	1	1	2	3	∞

Подматрица расстояний подграфа

$=$

	X_1	X_2	X_7	X_8	X_{10}	X_{12}
X_1	∞	1			1	
X_2		∞				1
X_7			∞	1		1
X_8				∞	1	
X_{10}	1			1	∞	
X_{12}		1	1			∞

Подматрица, состоящая из единиц

$X_1:$	[X_2	X_{10}]		$X_1:$		X_2
$X_2:$	[X_{12}]		$X_2:$		X_{12}
$X_7:$	[X_8	X_{12}]	=	$X_7:$		X_8
$X_8:$	[X_{10}]		$X_8:$		X_{10}
$X_{10}:$	[X_1	X_8]		$X_{10}:$		X_1
$X_{12}:$	[X_2	X_7]		$X_{12}:$		X_7

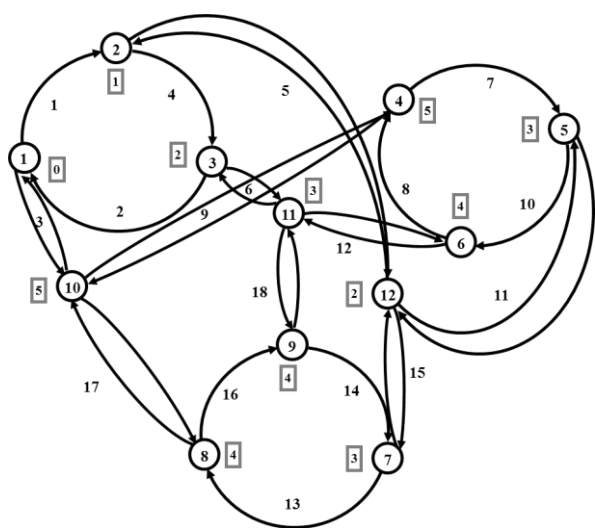


Рис. 15. Циклы для 1-ой дуги

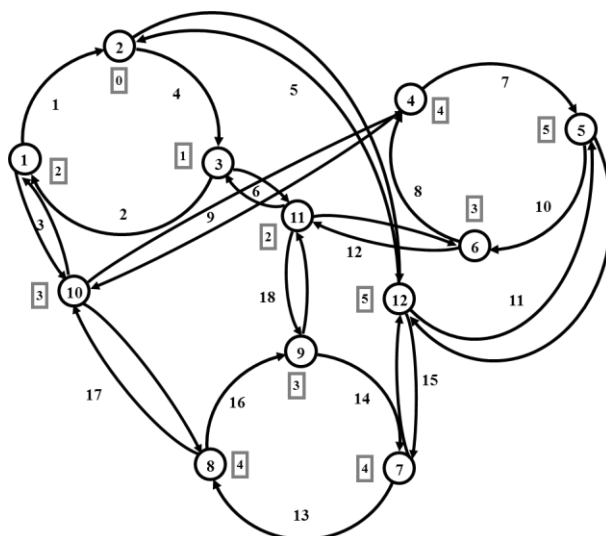


Рис. 16. Циклы для 4-ой дуги

Рассмотрим следующий подграф $\{x_2, x_{12}, x_7, x_9, x_{11}, x_3\}$:

$$\rho = \begin{array}{c} \begin{array}{c} x_2 \\ x_3 \\ x_7 \\ x_9 \\ x_{11} \\ x_{12} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline x_2 & \infty & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ \hline x_3 & 2 & \infty & 3 & 2 & 1 & 3 \\ \hline x_7 & 2 & 3 & \infty & 2 & 3 & 1 \\ \hline x_9 & 3 & 2 & 1 & \infty & 1 & 1 \\ \hline x_{11} & 3 & 1 & 2 & 1 & \infty & 3 \\ \hline x_{12} & 1 & 2 & 1 & 3 & 3 & \infty \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} x_2 \\ x_3 \\ x_7 \\ x_9 \\ x_{11} \\ x_{12} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline x_2 & \infty & 1 & & & & 1 \\ \hline x_3 & & \infty & & & 1 & \\ \hline x_7 & & & \infty & & & 1 \\ \hline x_9 & & & 1 & \infty & 1 & 1 \\ \hline x_{11} & & 1 & & 1 & \infty & \\ \hline x_{12} & 1 & & 1 & & & \infty \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_2: [\quad x_3 \quad x_{12} \quad] \\ x_3: [\quad x_{11} \quad] \\ x_7: [\quad x_{12} \quad] \\ x_9: [\quad x_7 \quad x_{11} \quad x_{12} \quad] \\ x_{11}: [\quad x_3 \quad x_9 \quad] \\ x_{12}: [\quad x_2 \quad x_7 \quad] \end{array} = \begin{array}{l} x_2: x_3 \\ x_3: x_{11} \\ x_7: x_{12} \\ x_9: x_7 \\ x_{11}: x_9 \\ x_{12}: x_2 \end{array}$$

Таким образом, множество единичных циклов для графа с циклическими фрагментами может быть построено алгоритмом поиска в ширину относительно ориентированных ребер циклического фрагмента. В таком применяется следующий порядок: и начальная, и конечная вершины ребра принадлежат циклическому фрагменту. В процессе применения алгоритма образуется множество единичных циклов для графа с циклическими фрагментами. Мы будем называть их единичными циклами, так как матрица смежности такого цикла образуются из подматрицы расстояний подграфа с учетом только единиц.

ВЫВОДЫ

В представленной работе рассматриваются понятия изометрического и единичного циклов в графе. Приводится формальное математическое определение изометрического цикла и анализируются свойства изометрических циклов в графе. Для построения множества изометрических циклов графа предложен специальный алгоритм, имеющий приемлемую вычислительную сложность, порядок которой оценивается как $O(m)$, где m – количество рёбер графа. Также в статье рассматривается особый вид графов, имеющий важнейшее значение в области моделирования электрических цепей и при проектировании плоских конструктивов [3]. В свою очередь, для графов с циклическими фрагментами вводится новая структура – множество единичных циклов графа. Приводится определение понятия единичного цикла и предлагается эффективный алгоритм выделения множества единичных циклов в графе с циклическими фрагментами. В статье также рассмотрены основные свойства единичных циклов и приведены примеры, наглядно иллюстрирующие эти свойства. В заключении следует отметить, что список комбинаторных задач, решаемых с помощью методов, основанных на понятиях и свойствах единичных и изометрических циклов, не ограничивается приведенными примерами, а распространяется на довольно обширные области применения вычислительной математики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tamassia R. Handbook of Graph Drawing and Visualization. CRC Press, 2014. 866 p.
2. Herman I., Melançon G., Marshall M. S. Graph Visualization and Navigation in Information Visualization: A Survey. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*. 2000. №6(1). P. 24–43. doi: 10.1109/2945.841119.
3. Курапов С. В., Давидовский М. В. Два подхода к проведению соединений в плоских конструктивах. *Компоненты и технологии*. 2015. № 7. С. 142–147.

4. Курапов С. В., Толлок А. В. Методы построения топологического рисунка графа. *Автоматика и телемеханика*. 2013. № 9. С. 78–97.
5. Рингель Г. Теорема о раскраске карт. Москва: Мир, 1977. 126 с.
6. Зыков А. А. Теория конечных графов. Новосибирск: ГРФМЛ, 1963. 542 с.
7. Kavitha T., Liebchen Ch., Mehlhorn K., Michail D., Rizzi R., Ueckerdt T., Zweig K. A. Cycle bases in graphs characterization, algorithms, complexity, and applications. *Computer Science Review*. 2009. Vol. 3, Iss. 4. P. 199–243.
8. Беллерт С., Возняцки Г. Анализ и синтез электрических цепей методом структурных чисел. Москва: Мир, 1972. 332 с.

REFERENCES

1. Tamassia, R. (2014). Handbook of Graph Drawing and Visualization. CRC Press.
2. Herman, I., Melançon, G. & Marshall, M. S. (2000). Graph Visualization and Navigation in Information Visualization: A Survey. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, No. 6(1), pp. 24-43. doi: 10.1109/2945.841119.
3. Kurapov, S. & Davidovsky, M. (2015). Two approaches to making joints in flat structures. *Komponenty i tehnologii*, No. 7, pp. 142-147.
4. Kurapov, S. V. & Tolok, A. V. (2013). The Topological Drawing of a Graph: Construction Methods. *Autom Remote Control*, Vol. 74, Iss. 9, pp. 1494-1509. doi: 10.1134/S0005117913090063.
5. Ringel, G. (2011). Map Color Theorem. Moscow: Mir.
6. Zykov, A. A. (1969). Theory of Finite Graphs. Novosibirsk: Publishing House «Nauka», Academy of Sciences of USSR, Siberian branch.
7. Kavitha, T., Liebchen, Ch., Mehlhorn, K., Michail, D., Rizzi, R., Ueckerdt, T. & Zweig, K. A. (2009). Cycle Bases in Graphs. Characterization, Algorithms, Complexity and Applications. *Computer Science Review*, Vol. 3, Iss. 4, pp. 199-243.
8. Bellert, S. & Wozniacki, G. (1972). Analysis and synthesis of electrical circuits by the method of structural numbers. Moscow: Mir.

УДК 539

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОДОЛЬНО ПОДКРЕПЛЕННОЙ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ЖИДКОСТИ

Латифов Ф. С., д. ф.-м. н., профессор, Мамедов Р. А., докторант

*Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет,
ул. А. Султанова, 5, г. Баку, Аз. 1073/1*

flatifov@mail.ru

В данной статье исследованы вынужденные колебания продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки в жидкости под действием пульсирующего во времени внутреннего радиального давления. На основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона, построена система уравнений для определения перемещений точек срединной поверхности продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки при динамическом взаимодействии с жидкостью. Действующие поверхностные нагрузки со стороны жидкости на продольно подкрепленную цилиндрическую оболочку определяются из решений уравнения движения жидкости, написанного в потенциалах. Получены аналитические формулы для нахождения перемещений точек срединной поверхности продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки, контактирующей с жидкостью.

Ключевые слова: вынужденные колебания, оболочка, идеальная жидкость, напряжение, подкрепление, принцип вариации.