

УДК 539.3

## СИНГУЛЯРНІСТЬ НАПРУЖЕНЬ У БАГАТОКЛИНОВІЙ СИСТЕМІ, З ПОВ'ЯЗАНИМИ МІЖ СОБОЮ ПРУЖНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ЇЇ ЕЛЕМЕНТІВ, ЗА АНТИПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

<sup>1</sup>Махоркін М. І., к. ф.-м. н., доцент, <sup>2</sup>Скрипочка Т. А., к. ф.-м. н., доцент

<sup>1</sup>Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,  
вул. Наукова, 3-б, Львів, 79060, Україна

<sup>2</sup>Львівський національний аграрний університет,  
вул. Володимира Великого, 1, м. Дубляни, Жовківський р-н, Львівська обл, 80381, Україна

mahorkin@ukr.net

За умов антипласкої деформації розглянуто багатоклинову систему, пружні характеристики елементів якої пов'язані функційною залежністю. Досліджено вплив збільшення кількості клиноподібних елементів системи (при збереженні її початкової геометричної конфігурації) на зміну значень порядку сингулярності напружень. З'ясовано, що системи такого типу правомірно використовувати для математичного моделювання клиновидних тіл з функціонально-градієнтних матеріалів, пружні характеристики яких неперервно змінюються у трансверсальному напрямку.

*Ключові слова:* антипласка задача, багатоклинова система, сингулярність напружень, функціонально-градієнтний матеріал, функційна залежність модуля зсуву.

## СИНГУЛЯРНОСТЬ НАПРЯЖЕНИЙ В МНОГОКЛИНЬЕВОЙ СИСТЕМЕ, С ЗАВИСИМЫМИ МЕЖДУ СОБОЙ УПРУГИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ЕЕ ЭЛЕМЕНТОВ, ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

<sup>1</sup>Махоркин Н. И., к. ф.-м. н., доцент, <sup>2</sup>Скрипочка Т. А., к. ф.-м. н., доцент

<sup>1</sup>Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України,  
вул. Научная, 3-б, Львов, 79060, Україна

<sup>2</sup>Львівський національний аграрний університет,  
вул. Володимира Великого, 1, г. Дубляни, Жовковський р-н, Львівська обл, 80381, Україна

mahorkin@ukr.net

При условиях антиплаской деформации рассмотрена многоклиньевая система, упругие характеристики элементов которой связаны функциональной зависимостью. Исследовано влияние увеличения числа клиноподобных элементов системы (при сохранении ее начальной геометрической конфигурации) на изменение значений порядка сингулярности напряжений. Выяснено, что системы такого типа целесообразно использовать для математического моделирования клиновидных тел из функционально-градієнтных материалов, упругие характеристики которых непрерывно изменяются в трансверсальном направлении.

*Ключевые слова:* антиплаская задача, многоклиньевая система, сингулярность напряжений, функционально-градієнтный материал, функциональная зависимость модуля сдвига.

## STRESS SINGULARITY IN MULTIWEDGE SYSTEM WITH INTERCONNECTED ELASTIC CHARACTERISTICS OF ITS ELEMENTS, UNDER ANTIPLANE DEFORMATION

<sup>1</sup>Mykola Makhorkin, Cand. Sc. (Phys.-Math.), associated professor,

<sup>2</sup>Tetiana Skrypochka, Cand. Sc. (Phys.-Math.), associated professor

<sup>1</sup>*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics*

*National Academy of Sciences of Ukraine,*

*3-b, Naukova str., L'viv, 79060, Ukraine*

<sup>2</sup>*Lviv National Agrarian University,*

*1 Volodymyra Velykogo str., Dubliany city, Zhovkva district, L'viv region, 80381, Ukraine*

mahorkin@ukr.net

The work seeks to study the singularity order in multiwedge systems with a large number of elements. The physical-mechanical characteristics of which are connected by a certain law. For this purpose a multiwedge system is studied, the system being under condition of antiplane deformation. The order of stress singularity in such a system is determined using the results of [6], where the characteristic equations are constructed by the method of statement of generalized conjugation problem under the classical boundary conditions for an arbitrary number of heterogeneous wedge-like elements.

For the initial geometric parameters of the system being invariable we study the dependence of the order of stress singularity on the wedge number and relation of maximal and minimal values of the shear modulus for a cyclic, exponential and quadratic laws of change of elastic characteristics of its elements. It is determined that when the number of wedges which compose the system, is enlarged and, respectively, when their apex angle is decreased, the value of order of stress singularity in the system apex vicinity tends to some asymptotic value. We assume that using such systems, the materials can be modeled mathematically. The elastic characteristics of such materials change continuously in a transversal direction, i. e. the materials with an angular functional gradience. With the help of a multicomponent wedge system we modeled mathematically an insert made of functionally graded material (FGM) in a composite wedge (three-component composite wedge, the internal wedge of which is made of functionally graded material). Basing on the model we studied the singularity order in the crack tip vicinity, which emerges from the point of such a system for various values of relation of shear modulus of external wedges. The values obtained are compared to the values of singularity order, calculated by solution of a characteristic equation for a wedge insert made of FGM [11]. As a result we elucidated that having only 20 elements of the system by which the insert is modeled mathematically, a relative error between calculated values of singularity order did not exceed 2%. Hence, it is reasonably to conclude that such multicomponent systems, where elastic characteristics of the elements are connected by a functional dependence, will be admissible to use for mathematical modeling of the wedge bodies, the elastic characteristics of which change in a transversal direction.

*Key words: antiplane problem, multiwedge system, stress singularity, functionally graded material, functional dependence of shear modulus.*

### ВСТУП

Сингулярність поля напружень в околі особливих точок пружних тіл (вершини тріщин чи гострокінцевих включень, таких, як, наприклад, кінці волокон у композиті, злами поверхні поділу матеріалів, точки зміни крайових умов тощо) здавна привертала увагу дослідників. Ці питання розглядалися ще в роботі К. Wieghardt [1] (1907), а подальший розвиток тематика отримала у класичній роботі М. Л. Williams [2]. Такий інтерес безперечно зумовлений тим, що саме околиці цих точок є очевидними осередками руйнування у пружних матеріалах. Тому з'ясування особливостей поведінки поля напружень в околицях таких точок є важливою складовою при прогнозуванні міцності конструкцій та їх елементів.

Детальний огляд праць, що стосуються цієї проблематики, наведено в публікаціях [3-7], при цьому варто зауважити, що околиці особливих точок автори зазвичай моделюють за допомогою багатоклинової системи, елементи якої мають спільну вершину. У згаданих працях розглянуті аналітичні та числові методи з'ясування напружено-деформованого стану в багатоклинових системах та здійснені дослідження для конкретних їхніх конфігурацій [4, 7, 8]. Проте, при аналізі поведінки поля напружень переважно обмежувалися системами, кількість елементів яких не перевищувала чотирьох. Це зумовлено тим, що при використанні аналітичних підходів (використання комплексних потенціалів чи перетворення Мелліна) [3, 4] виникає необхідність розв'язувати систему рівнянь порядку  $2n$  для антиплоскої задачі та  $4n$  для плоскої, а числові методи [5, 8] потребують додаткового удосконалення, особливо при дослідженні систем, що містять елементи з малими кутами розхилу. Цим може пояснюватись те, що зараз відсутні ґрунтовні дослідження поведінки сингулярності поля напружень в околиці вершини багатоклинової системи у випадку, якщо кількість її елементів буде збільшуватися (а міра їх кутового розхилу, відповідно, зменшуватиметься), зберігаючи при цьому початкову геометрію системи.

З огляду на вищесказане, у нашій статті проаналізовано зміну порядку сингулярності поля напружень при збільшенні кількості елементів системи за умови збереження її початкової геометрії. При цьому вважалося, що пружні властивості елементів пов'язані між собою певною функційною залежністю. Для досліджень використано побудовані у [6, 9] характеристичні рівняння для багатоклинової системи, що існує за умов антиплоскої деформації.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо композит, складений із довільної кількості  $n$  зчеплених між собою різнорідних пружних, ізотропних клинів  $S_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) з кутами розхилу при вершині  $\alpha_i$  ( $\sum_{i=1}^n \alpha_i \leq 2\pi$ ) та

кутового вирізу  $S_{n+1}$  з кутом розхилу  $\alpha_{n+1} = 2\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq 2\pi$  (рис. 1), котрий перебуває в умовах поздовжнього зсуву  $u=0$ ,  $v=0$ ,  $w=w(r,\varphi)$ . Таку систему віднесено до полярної системи координат  $r, \varphi$ , з центром у точці сходження клинів, де клин  $S_i$  займає область  $\varphi_{i-1} < \varphi < \varphi_i$ ,  $0 < r < \infty$ , а лініям з'єднання клинів відповідають полярні координати  $\varphi_i = \sum_{i=1}^i \alpha_i \leq 2\pi$ . На лініях зчеплення клинів  $\varphi = \varphi_i$  виконуються умови ідеального механічного

контакту, а берегах вирізу  $\varphi_0 = 0$  та  $\varphi_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k = 2\pi - \alpha_{n+1}$  – умови першої, другої або змішаної задач теорії пружності. Модуль зсуву відповідного клина задається залежністю  $\mu_i = \mu(\varphi_i)$ .

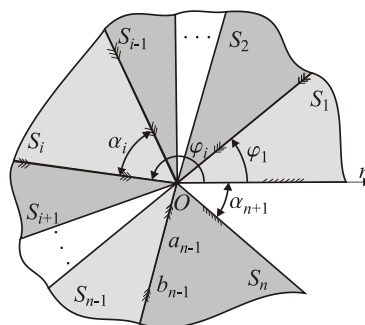


Рис. 1. Багатоклинова система

Згідно з результатами робіт [6, 9] порядок сингулярності поля напружень в околі вершини кутового вирізу, що міститься у цій системі, визначається співвідношенням  $\lambda_i = 1 - \text{Re}(q_i)$ , де  $q_i$  – корені характеристичного рівняння  $\Delta(q) = 0$ , дійсна частина яких належить інтервалу  $\text{Re}(q_i) \in (0; 1)$ . Характеристичне рівняння за антиплоскої деформації, залежно від заданих на берегах вирізу крайових умов, має такий вигляд [9]:

A. 1) за умов першої крайової задачі теорії пружності

$$q \sin(q\varphi_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_{i+1}} L_1^i \cos[q(\varphi_n - \varphi_i)] = 0; \quad (1)$$

B. 2) за умов другої крайової задачі –

$$\sin(q\varphi_n) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{q\mu_{i+1}} L_2^i \sin[q(\varphi_n - \varphi_i)] = 0; \quad (2)$$

C. 3) за умов змішаної крайової задачі –

$$\cos(q\varphi_n) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{q\mu_{i+1}} L_1^i \sin[q(\varphi_n - \varphi_i)] = 0, \quad (3)$$

D. якщо зусилля задані при  $\varphi = 0$ , а переміщення при  $\varphi = \varphi_n$  та

$$q \cos(q\varphi_n) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_{i+1}} L_2^i \cos[q(\varphi_n - \varphi_i)] = 0, \quad (4)$$

E. якщо зусилля задані при  $\varphi = \varphi_n$ , а переміщення при  $\varphi = 0$ .

Зауважимо, що при моделюванні півбезмежної тріщини, півбезмежного абсолютно жорсткого включення або частково відшарованого абсолютно жорсткого включення в (1)-(4) відповідно, слід прийняти  $\varphi_n = 2\pi$  (кутовий виріз вироджується в розріз).

Якщо ж система є суцільним кусково-однорідним тілом, складеним із  $n$  клинів, то вважаємо, що виріз вироджується в тріщину  $\alpha_{n+1} = 0$ , і на її краях задано умови ідеального механічного контакту  $\sigma_{\varphi z}|_{\varphi=0} - \sigma_{\varphi z}|_{\varphi=2\pi} = 0$ ,  $w|_{\varphi=0} - w|_{\varphi=2\pi} = 0$ . У цьому випадку характеристичне рівняння має такий вигляд:

$$\begin{aligned} & \left( \cos(2\pi q) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{q\mu_{i+1}} L_1^i \sin[q(2\pi - \varphi_i)] - 1 \right) \times \\ & \times \left[ \mu_n \left( q \cos(2\pi q) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_{i+1}} L_2^i \cos[q(2\pi - \varphi_i)] \right) - \mu_n q \right] - \\ & - \left( \sin(2\pi q) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{q\mu_{i+1}} L_2^i \sin[q(2\pi - \varphi_i)] \right) \times \\ & \times \left( -q \sin(2\pi q) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_{i+1}} L_1^i \cos[q(2\pi - \varphi_i)] \right) \mu_n = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Тут

$$L_1^k = -q \sin q \varphi_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{\mu_{i+1}} L_1^i \cos[q(\varphi_k - \varphi_i)],$$

$$L_2^k = q \cos q \varphi_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{\mu_{i+1}} L_2^i \cos[q(\varphi_k - \varphi_i)].$$
(6)

Відтак, подання (1)-(6) дають змогу визначити порядок сингулярності в багатоклиновій системі, що складена з довільної кількості елементів з довільними геометричними та механічними характеристиками за умов поздовжнього зсуву.

### ЧИСЛОВІ ДОСЛІДЖЕННЯ

З метою вивчення поведінки порядку сингулярності в багатокомпонентних композитних клинах, розглянуто різні випадки закону зміни пружних характеристик від клина до клина. Досліджувалась залежність сингулярності напружень у випадку, коли модуль зсуву складових клина змінювався за циклічним (двофазна система рис. 2), експоненціальним [10] та квадратичним [11] законами від значення  $\mu_1$  до  $\mu_2$  (рис. 3). Також було прийнято, що кути розхилу при вершині всіх складових однакові та дорівнюють  $\alpha_i = (2\pi - \alpha_{n+1})/n = \varphi_n/n$ , де  $n$  – кількість компонентів композиту (відповідно, при збільшенні кількості елементів значення їх кутів розхилу зменшується).

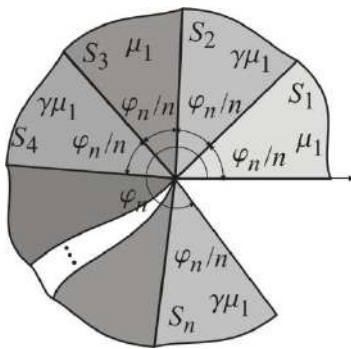


Рис. 2. Двофазна циклічна система

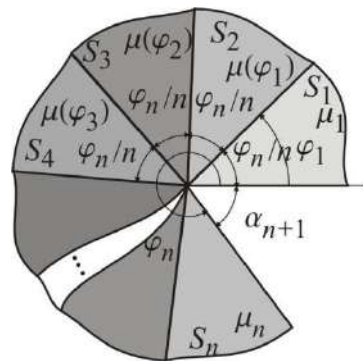


Рис. 3. Система, у якій модулі зсуву клинів пов'язані між собою експоненціальним або лінійним законом

Нижче подані результати досліджень порядку сингулярності напружень для випадку, коли кутовий виріз вироджується в розріз ( $\alpha_{n+1} = 0$ ), на берегах якого задані умови першої, другої або змішаної крайових задач. Також розглянуто випадки суцільного тіла, складеного із клинів та частково відшарованого абсолютно жорсткого включення (умови ідеального контакту берегів розрізу).

**1. Циклічний закон зміни модулів зсуву (двофазна система) заданий такою залежністю:**

$$\mu_i = \mu \gamma^{0.5(1-(-1)^{i-1})} \quad (\mu_i = \mu_{i-1} \gamma^{(-1)^{i-1}}) \quad \mu_i = \mu \gamma^{\sin^2 \left[ \frac{(i-1)\pi}{2} \right]}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Зважаючи на специфіку двофазної циклічної системи, обчислення порядку сингулярності напружень здійснювалися для випадку парної кількості елементів системи, оскільки саме в цьому випадку зберігається циклічність зміни модулів зсуву.

Результати обчислень сингулярності поля напружень для різних крайових умов, залежно від кількості клинів, що складають систему, та величини відношення модулів зсуву суміжних клинів  $\gamma$ , подано в таблиці 1.

Таблиця 1

| $\begin{matrix} n \\ \gamma \end{matrix}$ | 2      | 4      | 6      | 8      | 10     | 12     | 14     | 16     | 18     | 20     |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| <b>Перша крайова задача</b>               |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| <b>1000</b>                               | 0,5    | 0,9716 | 0,9699 | 0,9692 | 0,9689 | 0,9688 | 0,9687 | 0,9686 | 0,9686 | 0,9686 |
| <b>100</b>                                | 0,5    | 0,9105 | 0,9052 | 0,9033 | 0,9025 | 0,9021 | 0,9018 | 0,9016 | 0,9015 | 0,9014 |
| <b>10</b>                                 | 0,5    | 0,7334 | 0,7215 | 0,7175 | 0,7158 | 0,7148 | 0,7142 | 0,7138 | 0,7135 | 0,7134 |
| <b>Друга крайова задача</b>               |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| <b>1000</b>                               | 0,5    | 0,9715 | 0,9698 | 0,9692 | 0,969  | 0,9688 | 0,9687 | 0,9686 | 0,9686 | 0,9685 |
| <b>100</b>                                | 0,5    | 0,9105 | 0,9052 | 0,9033 | 0,9025 | 0,9021 | 0,9018 | 0,9016 | 0,9015 | 0,9014 |
| <b>10</b>                                 | 0,5    | 0,7334 | 0,7215 | 0,7175 | 0,7157 | 0,7147 | 0,7141 | 0,7137 | 0,7135 | 0,7133 |
| <b>Змішана крайова задача</b>             |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| <b>1000</b>                               | 0,9899 | 0,9875 | 0,9865 | 0,9860 | 0,9857 | 0,9855 | 0,9853 | 0,9852 | 0,9851 | 0,985  |
| <b>100</b>                                | 0,9683 | 0,9609 | 0,9578 | 0,9562 | 0,9551 | 0,9544 | 0,9539 | 0,9535 | 0,9531 | 0,9529 |
| <b>10</b>                                 | 0,9024 | 0,8822 | 0,8743 | 0,8701 | 0,8675 | 0,8656 | 0,8643 | 0,8634 | 0,8626 | 0,862  |

2. Експоненціальний закон зміни модулів зсуву  $\mu_i$  складових системи від  $\mu_1$  (значення модуля зсуву першого клина) до  $\mu_n$  (значення модуля зсуву  $n$ -го клину) заданий таким співвідношенням [10]:

$$\mu_i = be^{a(\varphi_i - 0,5\varphi_n)},$$

де  $a = (\varphi_n)^{-1} \ln \gamma$ ,  $b = \sqrt{\gamma}$ ,  $\mu_1 \gamma = \mu_n$ .

Результати обчислень найвищого порядку сингулярності напружень у цій системі, що містить півбезмежну міжфазну тріщину ( $\alpha_{n+1} = 0$ ), подані в табл. 2 для випадків першої та другої крайових задач, а також для моделі суцільного багатоклинового композиту, залежно від кількості  $n$  клинів, що складають систему та величини відношення модулів зсуву першого та  $n$ -го клинів  $\gamma = \mu_n / \mu_1$ .

Таблиця 2

| $\begin{matrix} n \\ \gamma \end{matrix}$ | 2   | 4      | 6      | 8      | 10     | 12     | 14     | 16     | 18     |
|---|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| <b>Перша крайова задача</b>               |     |        |        |        |        |        |        |        |        |
| <b>2</b>                                  | 0,5 | 0,4828 | 0,4890 | 0,4922 | 0,4938 | 0,4947 | 0,4953 | 0,4956 | 0,4959 |
| <b>10</b>                                 | 0,5 | 0,4256 | 0,4447 | 0,4538 | 0,4584 | 0,4611 | 0,4627 | 0,4638 | 0,4646 |
| <b>100</b>                                | 0,5 | 0,3345 | 0,3530 | 0,3631 | 0,3686 | 0,3718 | 0,3739 | 0,3753 | 0,3762 |
| <b>1000</b>                               | 0,5 | 0,2569 | 0,2495 | 0,2503 | 0,2516 | 0,2527 | 0,2536 | 0,2542 | 0,2547 |

Продовження табл. 2

| $n \backslash \gamma$                    | 2   | 4      | 6      | 8      | 10     | 12     | 14     | 16     | 18     |
|--|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| <b>Друга крайова задача</b>              |     |        |        |        |        |        |        |        |        |
| <b>2</b>                                 | 0,5 | 0,51   | 0,5048 | 0,5018 | 0,5002 | 0,4992 | 0,4987 | 0,4983 | 0,4980 |
| <b>10</b>                                | 0,5 | 0,5024 | 0,4908 | 0,4828 | 0,4780 | 0,4751 | 0,4732 | 0,4719 | 0,4710 |
| <b>100</b>                               | 0,5 | 0,4365 | 0,4185 | 0,4069 | 0,3993 | 0,3943 | 0,3910 | 0,3886 | 0,3870 |
| <b>1000</b>                              | 0,5 | 0,3511 | 0,3136 | 0,2959 | 0,2853 | 0,2783 | 0,2735 | 0,2701 | 0,2676 |
| <b>Суцільний багатоклиновий композит</b> |     |        |        |        |        |        |        |        |        |
| <b>2</b>                                 | 0   | 0,0805 | 0,0707 | 0,0642 | 0,0608 | 0,0590 | 0,0579 | 0,0573 | 0,0569 |
| <b>10</b>                                | 0   | 0,2127 | 0,2034 | 0,1903 | 0,1817 | 0,1763 | 0,1728 | 0,1705 | 0,1689 |
| <b>100</b>                               | 0   | 0,2568 | 0,2554 | 0,2447 | 0,2354 | 0,2286 | 0,2237 | 0,2203 | 0,2177 |
| <b>1000</b>                              | 0   | 0,2279 | 0,2095 | 0,1965 | 0,1864 | 0,1788 | 0,1732 | 0,1691 | 0,1660 |

**3. Квадратичний закон зміни модуля зсуву  $\mu_i$  складових системи від  $\mu_1$  (значення модуля зсуву першого клина) до  $\mu_n$  (значення модуля зсуву  $n$ -го клину), заданий так [11]:**

$$\mu_i = [a(\varphi_i - 0,5\varphi_n) + b]^2,$$

$$\text{де } a = \frac{\sqrt{\mu_n} - \sqrt{\mu_1}}{\varphi_n}, \quad b = \frac{\sqrt{\mu_n} + \sqrt{\mu_1}}{2}, \quad \mu_n = \gamma\mu_1.$$

Найвищий порядок сингулярності напружень поблизу вершини міжфазної півбезмежної тріщини в системі, модулі зсуву компонентів якої змінюються за цим законом, обчислено для випадків першої та другої крайових задач. Також досліджено особливість напружень у суцільному багатоклиновому композиті, елементи якого змінюються згідно з поданим вище квадратичним законом. Результати досліджень залежності порядку сингулярності від кількості  $n$  клинів, що складають систему та величини  $\gamma = \mu_n/\mu_1$  – відношення модулів зсуву першого та  $n$ -го клинів, подані в табл. 3

Таблиця 3

| $n \backslash \gamma$       | 2   | 4      | 6      | 8      | 10     | 12     | 14     | 16     | 18     |
|-----------------------------|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| <b>Перша крайова задача</b> |     |        |        |        |        |        |        |        |        |
| <b>2</b>                    | 0,5 | 0,4790 | 0,4855 | 0,4889 | 0,4906 | 0,4916 | 0,4922 | 0,4926 | 0,4929 |
| <b>10</b>                   | 0,5 | 0,3991 | 0,4207 | 0,4308 | 0,4358 | 0,4385 | 0,4401 | 0,4411 | 0,4418 |
| <b>100</b>                  | 0,5 | 0,3188 | 0,3475 | 0,3565 | 0,3596 | 0,3606 | 0,3609 | 0,3607 | 0,3604 |
| <b>1000</b>                 | 0,5 | 0,2980 | 0,3233 | 0,3279 | 0,3273 | 0,3266 | 0,3252 | 0,3238 | 0,3224 |
| <b>Друга крайова задача</b> |     |        |        |        |        |        |        |        |        |
| <b>2</b>                    | 0,5 | 0,5141 | 0,5087 | 0,5055 | 0,5037 | 0,5027 | 0,502  | 0,5015 | 0,5012 |
| <b>10</b>                   | 0,5 | 0,5408 | 0,5316 | 0,5225 | 0,5162 | 0,5121 | 0,5093 | 0,5073 | 0,5059 |
| <b>100</b>                  | 0,5 | 0,5471 | 0,5456 | 0,5391 | 0,5328 | 0,5275 | 0,5231 | 0,5195 | 0,5167 |
| <b>1000</b>                 | 0,5 | 0,5413 | 0,5402 | 0,5358 | 0,5317 | 0,5282 | 0,5254 | 0,5229 | 0,5209 |

Продовження табл. 3

| $n \backslash \gamma$                    | 2 | 4      | 6      | 8      | 10     | 12     | 14     | 16     | 18     |
|--|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| <b>Суцільний багатоклиновий композит</b> |   |        |        |        |        |        |        |        |        |
| <b>2</b>                                 |   | 0,0819 | 0,0717 | 0,0647 | 0,061  | 0,059  | 0,0578 | 0,0571 | 0,0567 |
| <b>10</b>                                |   | 0,225  | 0,2197 | 0,2044 | 0,1927 | 0,1848 | 0,1795 | 0,1759 | 0,1734 |
| <b>100</b>                               |   | 0,2893 | 0,31   | 0,3072 | 0,2996 | 0,2916 | 0,2844 | 0,2783 | 0,2732 |
| <b>1000</b>                              |   | 0,2946 | 0,3188 | 0,3216 | 0,3197 | 0,3166 | 0,3133 | 0,3101 | 0,3072 |

Аналогічний характер зміни порядку сингулярності поля напружень справедливий також і для інших геометричних параметрів багатоклинових композитів.

### АНАЛІЗ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ТА ВИСНОВКИ

Результати досліджень продемонстрували, що зі збільшенням кількості елементів багатоклинової системи значення порядку сингулярності прямує до деякого асимптотичного значення, незалежно від закону зміни пружних характеристик.

З'ясовано, що асимптотичне значення порядку сингулярності для системи, у якій модуль зсуву змінюється циклічно від клина до клина (двохфазна система табл. 1), зростає зі збільшенням відношення модулів зсуву суміжних клинів для випадку першої крайової задачі та спадає у випадку другої або змішаної задачі. Асимптотичне значення в системах, де пружні характеристики змінюються за експоненціальним або квадратичним законами, навпаки – спадають зі зростанням відношення крайніх значень модуля зсуву табл. 2, 3 у всіх випадках. Відтак, можна припустити, що складена з клинів достатньо малого розхилу система моделюватиме функціонально-градієнтний матеріал (ФГМ), характеристики якого змінюються неперервним чином, залежно від полярного кута.

З метою з'ясування правомірності зробленого припущення, багатоклиновою системою було змодельовано вставку із ФГМ з квадратичною залежністю в композитному клині [11] (рис. 4 а). Крайні клини мають кут розхилу  $\alpha_1$  та  $\alpha_n$ , вставка із ФГМ моделюється набором клинів із кутами розхилу  $\alpha_i = [\varphi_n - (\alpha_1 + \alpha_n)](n-2)^{-1}$ ,  $i = 2, 3, \dots, n-1$  (рис. 4 б), модулі зсуву яких змінюються згідно з квадратичним законом:

$$\mu_i = [a(\varphi_i - 0,5\varphi_n) + b]^2,$$

де  $a = (\sqrt{\mu_n} - \sqrt{\mu_1})(\varphi_n)^{-1}$ ,  $b = 0,5(\sqrt{\mu_n} + \sqrt{\mu_1})$ ,  $\gamma = \mu_n / \mu_1$ .

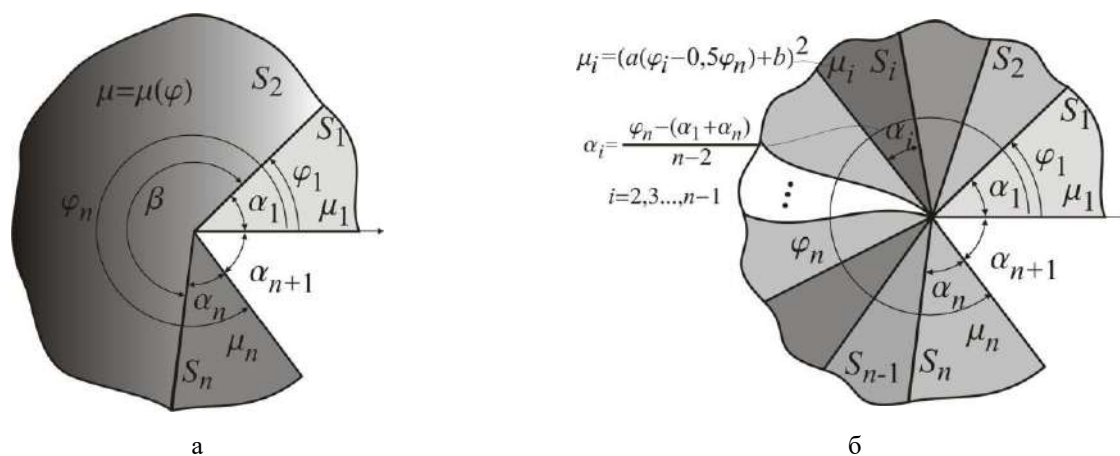


Рис. 4. Композитний клин із вставкою з функціонально градієнтного матеріалу



Результати обчислень порядку сингулярності напружень поблизу вершини тріщини для різних значень відношення модулів зсуву подані в табл. 4, для кутів розхилу крайніх клинів  $\alpha_1 = \pi/2$ ,  $\alpha_n = 7\pi/6$  відповідно,  $\varphi_n = 2\pi$  та загальної кількості клинів  $n=22$  (вставка змодельована 20-тьма клинами). Тут  $\lambda$  – наближені значення сингулярності, обчислені за допомогою формул (1), (6), а  $\lambda'$  – значення, обчислене за характеристичним рівнянням, що побудоване у [11] для вставки з ФГМ у трикомпонентному композитному клині.

Таблиця 4.

| $\gamma$   | 2      | 4      | 6      | 8      | 10     |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\lambda$  | 0,3914 | 0,2944 | 0,2617 | 0,2468 | 0,2398 |
| $\lambda'$ | 0,3921 | 0,2937 | 0,2585 | 0,2430 | 0,2359 |

Як видно, результати для вставки з ФГМ, змодельованої вже лишень 20-ма елементами, відносна похибка становить не більше, ніж 2%, при чому для близьких значень модулів зсуву зовнішніх клинів ( $\gamma < 6$ ) вона не перевищує 1%. Зі збільшенням кількості елементів, що моделюють вставку, точність обчислень порядку сингулярності напружень зростає.

Отже, виявлено, що зі зменшенням кута розхилу елементів системи порядок сингулярності напружень прямуватиме до певного асимптотичного значення, яке можна використовувати для оцінки сингулярності напружень у матрицях із функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ), характеристики яких змінюються неперервним чином залежно від полярного кута. Числові дослідження також підтвердили правомірність використання багатоклинової системи із малими кутами розхилу її елементів для математичного моделювання вставок із ФГМ у композитних клинах. Такий підхід до моделювання околів концентраторів напружень, що містяться у ФГМ із кутовою градієнтністю, уможливує дослідження фізико-механічних полів за умови будь-якої функційної залежності модуля зсуву.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Wieghardt K. Über das Spalten und Zerreißen elastischer Körper. *Z. Math. Phys.* 1907. Vol. 55. P. 60–103.
2. Williams M. L. Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension. *Journal of Applied Mechanics.* 1952. Vol. 19(4). P. 526–528.
3. Paggi M., Carpinteri A. On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion. *Appl. Mech. Rev.* 2008. Vol. 61, No. 2. P. 22.
4. Carpinteri A., Paggi M. Singular harmonic problems at a wedge vertex: mathematical analogies between elasticity, diffusion, electromagnetism, and fluid dynamics. *Journal of Mechanics of Materials and Structures.* 2011. Vol. 6(1-4). P. 113–125.
5. Linkov A. M., Koshelev V. F. Multi-wedge points and multi-wedge elements in computational mechanics: evaluation of exponents and angular distribution. *Int. J. Solids and Structures.* 2006. Vol. 43. P. 5909–5930.
6. Makhorkin M., Sulym H. On determination of the stress-strain state of a multi-wedge system with thin radial defects under antiplane deformation. *Civil and environmental engineering reports.* 2010. Vol. 5. P. 235–251.
7. Xiaofei H., Weian Y. Stress singularity analysis of multi-material wedges under antiplane deformation. *Acta Mechanica Solida Sinica.* 2013. Vol. 26, No. 2. P. 151–160.
8. Linkov A., Rybarska-Rusinek L. Numerical methods and models for anti-plane strain of a system with a thin elastic wedge. *Archive of Applied Mechanics.* 2008. Vol. 78, No. 10. P. 821–831.
9. Махоркін М. І., Сулим Г. Т. Асимптотики і поля напружень у клиновій системі за умов антиплоскої деформації. *Машинознавство.* 2007. № 1. С. 8-13.
10. Paggi M., Carpinteri A. On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion. *Appl. Mech. Rev.* 2008. Vol. 61. P. 1–22.
11. Tikhomirov V. V. Stress singularity in a top of composite wedge with internal functionally graded material. *St. Petersburg Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics.* 2015. Vol. 1, No. 3. P. 278–286.

## REFERENCES

1. Wieghardt, K. (1907). Über das Spalten und Zerreißen elastischer Körper. Z. Math. Phys., Vol. 55, pp. 60-103.
2. Williams, M. L. (1952). Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension. Journal of Applied Mechanics, Vol. 19(4), pp. 526-528.
3. Paggi, M. & Carpinteri, A. (2008). On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion. Appl. Mech. Rev., Vol. 61, No. 2, p. 22.
4. Carpinteri, A. & Paggi, M. (2011). Singular harmonic problems at a wedge vertex: mathematical analogies between elasticity, diffusion, electromagnetism, and fluid dynamics. Journal of Mechanics of Materials and Structures, Vol. 6(1-4), pp. 113-125.
5. Linkov, A. M. & Koshelev, V. F. (2006). Multi-wedge points and multi-wedge elements in computational mechanics: evaluation of exponents and angular distribution. Int. J. Solids and Structures, Vol. 43, pp. 5909-5930.
6. Makhorkin, M. & Sulym, H. (2010). On determination of the stress-strain state of a multi-wedge system with thin radial defects under antiplane deformation. Civil and environmental engineering reports, Vol. 5, pp. 235-251.
7. Xiaofei, H. & Weian, Y. (2013). Stress singularity analysis of multi-material wedges under antiplane deformation. Acta Mechanica Solida Sinica, Vol. 26, No. 2, pp. 151-160.
8. Linkov, A. & Rybarska-Rusinek, L. (2008). Numerical methods and models for anti-plane strain of a system with a thin elastic wedge. Archive of Applied Mechanics, Vol. 78, No. 10, pp. 821-831.
9. Makhorkin, M. & Sulym, H. (2007). Asymptotics and stress fields in the wedge system under antiplastic deformation conditions.. Mashynoznavstvo, No. 1, pp. 8-13.
10. Paggi, M. & Carpinteri, A. (2008). On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion. Appl. Mech. Rev., Vol. 61, pp. 1-22.
11. Tikhomirov, V. V. (2015). Stress singularity in a top of composite wedge with internal functionally graded material. St. Petersburg Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics, Vol. 1, No. 3, pp. 278-286.

УДК 539.3

## КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ТОНКОГО ЖОРСТКОГО ВКЛЮЧЕННЯ З ТРІЩИНАМИ НА ПРОДОВЖЕННІ ЗА ГАРМОНІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Мішарін А. С., Попов В. Г.

Національний університет «Одеська морська академія»,  
вул. Дідріхсона, 8, Одеса, Україна

mishandr@ukr.net, dr.vg.popov@gmail.com

Розв'язана плоска динамічна задача теорії пружності про визначення напруженого стану навколо тонкого жорсткого смугового включення з тріщинами на продовженні. Включення вважається повністю зчепленим із зовнішнім середовищем і перебуває під дією сил та моментів, що гармонічно змінюються за часом. Метод розв'язання базується на поданні переміщень і напружень через розривні розв'язки двовимірних рівнянь руху пружного середовища. Після задоволення граничних умов на включенні і тріщинах вихідна задача зводиться до системи сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих стрибків переміщень і напружень. Ця система розв'язується наближено числовим методом, який базується на застосуванні спеціальних квадратурних формул для сингулярних інтегралів.

*Ключові слова:* коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН), система сингулярних інтегральних рівнянь, сила, гармонічні коливання, включення, тріщина.