УДК 531:383-62:50

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ЛІНІЙНИМИ СТАЦІОНАРНИМИ ПАРАМЕТРИЧНИМИ СИСТЕМАМИ

Новицький В. В., Зінчук М. О., Тетерятник О. В.

Інститут математики НАН України,
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01004, Україна

Novyc@imath.kiev.ua, E.Teteryatnik@gmail.com

Вивчаються умови оптимального керування лінійними неперервними системами з матрицями коефіцієнтів, які залежать від параметра. Сформульовано інтервальні умови для оптимального регулятора. Наведено приклад оптимального керування параметричною системою четвертого порядку.

Ключові слова: оптимальне керування, параметричні системи, матричне рівняння Ріккаті, оптимальний регулятор.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СТАЦИОНАРНЫМИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Новицкий В. В., Зинчук М. О., Тетерятник О. В.

Институт математики НАН Украины,
ул. Терещенковская, 3, Киев, 01004, Украина

Novyc@imath.kiev.ua, E.Teteryatnik@gmail.com

Изучаются условия оптимального управления линейными непрерывными системами с матрицами коэффициентов, зависящих от параметра. Сформулировані интервальные условия для оптимального регулятора. Приведен пример оптимального управления параметрической системой четвертого порядка.

Ключевые слова: оптимальное управление, параметрические системы, матричное уравнение Риккати, оптимальный регулятор.

OPTIMAL CONTROL OF LINEAR STATIONARY PARAMETRIC SYSTEMS

Novytskyy V. V., Zinchuk M. O., Teteriatnyk O. V.

Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine,
Tereschenkivska st., 3, Kiev, 01004, Ukraine

Novyc@imath.kiev.ua, E.Teteryatnik@gmail.com

In this paper the conditions of optimal control of linear continuous parametric systems are investigated. The matrix of the coefficients of the considered systems consists of a skew-symmetric matrix of general form, which has no multiple eigenvalues and arbitrary, which depends on the parameter. In this connection, the optimal regulator is constructed on the basis of the asymptotic solution of the matrix Riccati equation, which is reduced to an infinite system of matrix equations. Necessary and sufficient conditions for the solvability of this system are defined through the zero-space of the expanded matrix, which is constructed by means of direct product. This gave an easy way to calculate the values of the free parameters of components of the matrix of the asymptotic solution. It is shown how to find the exact solution of the matrix Riccati equation for a finite number of steps (the matrix-solving has a finite decomposition). The exact solution allowed us to formulate in the form of a theorem the interval conditions for an optimal regulator. The effectiveness of the approach is illustrated by the example in the fourth order.

Key words: optimal control, parametric systems, matrix Riccati equation, optimal regulator.

ВСТУП

У статті [1] розглядалося оптимальне керування лінійними параметричними системами з матрицею коефіцієнтів консервативної частини, що задана в канонічній формі. Нижче досліджуються умови оптимального керування неперервними системами з матрицями коефіцієнтів (одна з яких кососиметрична загального вигляду і не має кратних власних значень), які залежать від параметра. Формулюються інтервальні умови для оптимального регулятора на основі обмеженого асимптотичного розв'язку матричного рівняння Ріккаті. Для параметричної системи четвертого порядку побудовано оптимальний регулятор і відповідний інтервал для невідомого параметра.

1. ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ МАТРИЧНОГО РІВНЯННЯ РІККАТІ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ПАРАМЕТРИЧНИХ СИСТЕМ

Розглянемо лінійну керовану диференціальну систему

$$\dot{x} = \left(A_0 + \varepsilon A_1\right) x + \varepsilon B u, \quad x\left(t_0\right) = x_0, \tag{1.1}$$

де $x \in \Re_{2n}$ – вектор стану, $A_0 = -A_0^T \in \Re_{2n\times 2n}$ – кососиметрична невироджена матриця, $A_1 \in \Re_{2n\times 2n}$ – довільна стала матриця, $u \in \Re_m$ – вектор керування, $B \in \Re_{2n\times m}$ – матриця при керуванні, $\varepsilon > 0$ – скалярний параметр. Система (1.1) при малих значеннях ε описує деяку майже консервативну систему [2].

Будемо шукати оптимальний регулятор для (1.1) у вигляді зворотного зв'язку за станом

$$u = -Kx \tag{1.2}$$

з квадратичним критерієм якості

$$J = \int_0^\infty \left(x^T Q x + u^T R u \right) dt, \tag{1.3}$$

де $K \in \Re_{m\times 2n}$ – деяка стала матриця, $Q \in \Re_{2n\times 2n}$, $R \in \Re_{m\times m}$ – додатно означені матриці.

Регулятор (1.2) буде оптимальним [3], якщо

$$K = \varepsilon R^{-1} B^T S, \tag{1.4}$$

де $S \in \Re_{2n\times 2n}$ – симетрична додатно означена матриця-розв'язок матричного рівняння Ріккаті

$$\left(A_0 + \varepsilon A_1\right)^T S + S\left(A_0 + \varepsilon A_1\right) - \varepsilon^2 S B R^{-1} B^T S + Q = 0.$$

Тут Q та R – матриці з (1.3).

Уведемо заміну [4] $P = \varepsilon S$, тоді прийдемо до еквівалентного матричного рівняння Ріккаті:

$$\left(A_0 + \varepsilon A_1\right)^T P + P\left(A_0 + \varepsilon A_1\right) - \varepsilon P B R^{-1} B^T P + \varepsilon Q = 0. \tag{1.5}$$

Виходячи з (1.5), матрицю-розв'язок P будемо шукати у вигляді розвинення за параметром ε

$$P = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \dots . \tag{1.6}$$

Матрицю Q зобразимо у вигляді подібного розвинення

$$Q = Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + \dots . \tag{1.7}$$

На відміну від класичної постановки задачі, коли матриця Q задана конкретно (є числовою у критерії (1.3)), будемо вважати, що додатно означена матриця Q_0 задана, а симетричні матриці Q_1, Q_2, ... будуть обчислені у процесі пошуку матриці зворотного зв'язку K, тобто матрицю Q задамо параметрично. Симетричні матриці Q_1, Q_2, ... можуть бути довільними, якщо не впливають на додатну означеність матриці Q. Обчислювальні матриці дають можливість розв'язати рівняння (1.5) за скінченне число кроків [1].

Така постановка задачі дозволяє знайти точний розв'язок рівняння Ріккаті, де матриця P має скінченне число доданків за умови, що Q – додатно означена матриця. У наступному параграфі на основі такого точного розв'язку будується інтервал для параметра ε, у якому знайдений регулятор буде оптимальним.

Від параметричного матричного рівняння Ріккаті, підставляючи (1.6), (1.7) у (1.5) і зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε, приходимо до нескінченної системи матричних рівнянь типу Ріккаті

$$A_0P_0 - P_0A_0 = 0, \tag{1.8}$$

$$\begin{gathered} A_0P_1 - P_1A_0 = P_0A_1 + A_1^TP_0 - P_0BR^{-1}B^TP_0 + Q_0, \\ A_0P_2 - P_2A_0 = P_1A_1 + A_1^TP_1 - P_1BR^{-1}B^TP_0 - P_0BR^{-1}B^TP_1 + Q_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_0P_k - P_kA_0 = P_{k-1}A_1 + A_1^TP_{k-1} - \sum_{i=1}^{k} P_{i-1}BR^{-1}B^TP_{k-i} + Q_{k-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{gathered} \tag{1.9}$$

У подальшому будемо розглядати тільки скінченні розклади, тому зосереджувати увагу на збіжності рядів (1.6), (1.7) не будемо. Розгляд скінченних розкладів (1.6), (1.7) певним чином впливає на регулятор, який буде оптимальним, як правило, не для всіх значень параметра ε. Тому необхідно виявити обмеження на невідомий параметр, за яких регулятор буде оптимальним.

Нехай A_0 – довільна кососиметрична матриця, яка не має кратних власних значень. Рівняння (1.8) показує перестановність матриць A_0, P_0. Матрицю-комутатор P_0 можна зобразити у вигляді такого розкладу [5]:

$$P_0 = \alpha_0I_{2n} + \alpha_2A_0^2 + \dots + \alpha_{2(n-1)}A_0^{2(n-1)}, \tag{1.10}$$

де α_i, $i = 0, 2, \dots, 2(n-1)$ – деякі невизначені параметри. Тут I_{2n} – одинична матриця розміру $2n$.

У роботі [6] показано, що для розв'язності системи (1.9), коли кососиметрична матриця A_0 канонічного вигляду, права частина рівнянь має задовольняти певні умови, за допомогою яких вільним параметрам матриць P_i, $i = 0, 1, 2, \dots$ надаються конкретні значення. Знайдемо подібні умови у нашому випадку. Для цього перейдемо до еквівалентного рівняння, матриця коефіцієнтів якого має розмір $4n^2$. Це можна зробити через прямий добуток [7, теорема 8.4.1, с. 239].

Позначимо через D_i праву частину i-го рівняння системи (1.9), а через $D_{i,l*}$, $P_{i,l*}$ – l-ті рядки відповідно матриць D_i, P_i. Отримаємо еквівалентну систему рівнянь:

$$\breve{A}\theta_i = \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, \tag{1.11}$$

де

$$\breve{A} = A_0 \otimes I_{2n} - I_{2n} \otimes A_0^T, \quad \theta_i = \left[P_{i,1*}, \dots, P_{i,2n*}\right]^T,$$

$$\xi_i = \left[D_{i,1*}, \dots, D_{i,2n*}\right]^T, \quad \breve{A} \in \Re_{4n^2 \times 4n^2}, \quad \theta_i, \xi_i \in \Re_{4n^2}$$

Тут $\otimes$ – символ прямого добутку.

Отже, якщо виконуються рівності (необхідні та достатні умови)

$$\mathrm{rang}\breve{A} = \mathrm{rang}\left[\breve{A}, \xi_i\right], \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{1.12}$$

то рівняння (1.11) мають розв’язки. Звідси випливає, що матриці обох частин рівностей (1.12) мають спільний нуль-простір.

Запишемо необхідні та достатні умови розв’язності рівнянь (1.11), виходячи з нуль-простору розмірності $2n$ матриці $\breve{A}$. Це випливає з подальшого. Власні значення матриці $\breve{A}$ такі: $\lambda_k - \lambda_j$ [7, с. 238], де λ_k, λ_j, $k, j \in \left\{\overline{1, 2n}\right\}$ – власні значення матриці A_0, звідки $2n$ із них є нульовими. Нехай вектор $\gamma \in \Re_{4n^2}$ є загальним розв’язком системи рівнянь

$$\breve{A}\gamma = 0, \tag{1.13}$$

тобто він описує нуль-простір матриці $\breve{A}$. Із властивостей прямого добутку отримуємо

$$\left(A_0 \otimes I_{2n} - I_{2n} \otimes A_0^T\right)^T = A_0^T \otimes I_{2n} - I_{2n} \otimes \left(A_0^T\right)^T = -\breve{A},$$

тобто матриця $\breve{A}$ – кососиметрична, тому для вектора γ з (1.13) вірна рівність $\breve{A}^T\gamma = 0$. Якщо домножимо зліва обидві частини рівнянь (1.11) на ненульовий транспонований вектор γ^T, який має $2n$ довільних сталих, то отримаємо нульові тотожності тоді і тільки тоді, коли рівняння мають розв’язки.

Отже, необхідні і достатні умови розв’язності i-го рівняння визначає рівність

$$\left(\gamma, \xi_i\right) = 0. \tag{1.14}$$

Оскільки вектор γ має довільні сталі, то для виконання (1.14) і обчислення конкретних значень вільних параметрів матриці P_{i-1} у скалярному добутку $\left(\gamma, \xi_i\right)$ необхідно прирівняти до нуля коефіцієнти при цих довільних сталих.

Перше рівняння системи (1.9) нелінійне відносно матриці P_0, а інші рівняння лінійні відносно матриць P_i, $i > 0$, що мають вільні параметри. Підставимо у праву частину першого рівняння системи (1.9) розклад для P_0, отримаємо

$$D_1 = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{2j} A_0^{2j} A_1 + A_1^T \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{2j} A_0^{2j} - \left(\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{2j} A_0^{2j}\right) BR^{-1}B^T \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{2j} A_0^{2j} + Q_0$$

або [8]

$$D_1 = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{2j} \left(A_0^{2j} A_1 + A_1^T A_0^{2j}\right) - \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{2j} \alpha_{2l} A_0^{2j} BR^{-1}B^T A_0^{2l} + Q_0, \tag{1.15}$$

тобто для $i = 1$ у рівнянні (1.14) коефіцієнти при довільних сталих вектора γ будуть нелінійними відносно параметрів розкладу (1.10), а для інших рівнянь – лінійні відносно вільних параметрів відповідних матриць.

Зауважимо такий факт: оскільки матриця P_0 задовольняє рівняння (1.8), то вектор γ можна сформувати за розкладом (1.10) з меншим числом довільних сталих

$$\gamma = \left[P_{\nu,1*}, \ldots, P_{\nu,2n*}\right], \quad P_\nu = \nu_1 I_{2n} + \nu_2 A_0^2 + \ldots + \nu_{2(n-1)} A_0^{2(n-1)}, \tag{1.16}$$

де ν_i, $i = \overline{1, n}$ – довільні сталі. При цьому зменшується також відповідна кількість рівнянь для обчислення значень вільних параметрів, щоправда, вектор γ, сформований за (1.16), через меншу кількість довільних сталих не в усіх випадках може давати розв'язність (1.11) за допомогою (1.14).

Тепер перейдемо до обчислення матриць P_i, $i=1,2,...$ з вільними параметрами. З рівнянь (1.11), при відомій правій частині (матриця P_{i-1} обчислена), отримуємо шукану матрицю P_i. Для спрощення розв'язання рівнянь можна звести матрицю $\breve{A}$ до верхнього трикутного вигляду за допомогою лівих елементарних операцій [9, с. 126], яким відповідають матриці $S_1, S_2, ..., S_l$. Далі покладаємо $S = S_l S_{l-1} ... S_1$ і приходимо до системи рівнянь:

$$S\breve{A}\theta_i = S\xi_i, \quad i=1,2,..., \tag{1.17}$$

де елементи вектора θ_i обчислюються достатньо просто, починаючи з нижніх. Симетричності матриці P_i з розв'язку θ_i рівняння (1.11) або (1.17) досягаємо за допомогою частини вільних параметрів. Це можна зробити завжди, оскільки матричне рівняння Ріккаті (1.5) має симетричний розв'язок, а отже, його має система (1.8), (1.9).

Відзначимо ще одну властивість вектора γ. За допомогою нього можемо легко знайти номери лінійно залежних (незалежних) стовпців матриці $\breve{A}$. Дійсно, позначимо $c = \left[c_1, c_2, ..., c_{2n}\right]^T$ вектор, який ставить у відповідність номери стовпцям матриці $\breve{A}$. Тоді до коефіцієнтів при довільних сталих вектора γ скалярного добутку $\left(\gamma, c\right)$ входитимуть номери лінійно залежних (у сукупності) стовпців. Лінійно залежними стовпцями матриці $\breve{A}$ будуть ті, які належать тільки одному з коефіцієнтів. Число таких номерів дорівнює числу коефіцієнтів, тобто розмірності нуль-простору матриці $\breve{A}$.

2. ФОРМУВАННЯ ІНТЕРВАЛЬНИХ УМОВ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА

Перейдемо до побудови робастного оптимального регулятора. Для цього розглянемо деякі симетричні матриці обмежених розкладів (1.6), (1.7)

$$P = P_0 + \varepsilon P_1, \quad Q = Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2, \tag{2.1}$$

що задовольняють матричне рівняння Ріккаті (1.5), причому додатно означена матриця Q_0 задана. Покажемо, що матриці P і Q з (2.1) існують та наведемо умови, за яких вони будуть додатно означеними.

Теорема 2.1. Нехай загального вигляду кососиметрична матриця A_0 не має кратних власних значень, матриці P і Q з (2.1) задовольняють матричне рівняння Ріккаті (1.5), $\mu_{\max}$ – максимальне власне значення пучка матриць $\mu P_0 + P_1$, δ_i $(i=1,...,2n)$ – власні значення квадратичного пучка матриць $\delta^2 Q_0 + \delta Q_1 + Q_2$ і $\delta_{\min}$, $\delta_{\max}$ – відповідно його мінімальне та максимальне дійсні власні значення.

Тоді, якщо параметри розкладу (1.10), знайдені з рівняння

$$\left(\gamma, \xi_1\right) = 0, \tag{2.2}$$

визначають додатно визначену матрицю P_0, то для довільного $\varepsilon \in r_1\left(P\right) \cap r_2\left(Q\right)$, де

$$r_1\left(P\right) = \begin{cases} \left(0, \mu_{\max}^{-1}\right), & \text{якщо} \quad \mu_{\max} > 0, \\ \left(0, +\infty\right), & \text{якщо} \quad \mu_{\max} \le 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

$$r_2(Q)=\begin{cases}\left(0,\delta_{\max}^{-1}\right)\cup\left(\delta_{\min}^{-1},+\infty\right) & \text{якщо} \quad \delta_{\min},\delta_{\max}>0,\\ \left(0,\delta_{\max}^{-1}\right) & \text{якщо} \quad \delta_{\min}\le 0,\quad \delta_{\max}>0,\\ \left(0,+\infty\right) & \text{якщо} \quad \delta_{\min},\delta_{\max}\le 0 \\ & \text{або} \quad \delta_i\left(i=\overline{1,2n}\right)-\text{комплексні},\end{cases} \tag{2.4}$$

матриці P, Q – додатно означені.

Доведення. Матриця A_0 не має кратних власних значень, тому правомірний розклад (1.10) для комутуючої матриці P_0, у якому, як бачимо, усі складові матриці симетричні. Рівняння (2.2) визначає достатні умови розв’язності першого рівняння системи (1.9), з якого визначаємо параметри розкладу $\alpha_0,...,\alpha_{2(n-1)}$, прирівнявши до нуля коефіцієнти при довільних сталих вектора γ з (1.13). Будемо вважати, що знайдені параметри задають додатно означену матрицю P_0 (у теоремі розглядаються достатні умови).

При відомих матрицях P_0, Q_0 обчислюємо праву частину першого рівняння (1.15) системи (1.9), матрицю D_1 та з рівняння

$$\breve{A}\theta_1=\xi_1 \tag{2.5}$$

знаходимо елементи матриці P_1, де

$$\theta_1=\left[P_{1,1*},...,P_{1,2n*}\right]^T,\quad \xi_1=\left[D_{1,1*},...,D_{1,2n*}\right]^T.$$

На матриці P_1 завершуємо обчислення елементів розкладу матриці-розв’язку P ($P_i=0$, $i=2,3,...$), тому вільні параметри можна покласти рівними нулю. З іншого боку, вільні параметри можна обчислити, оскільки це природніше вписує матрицю P_1 у розклад (1.6) і, можливо, дасть ширший інтервал. Для обчислення вільних параметрів вибираємо симетричну матрицю Q_1 (наприклад, одиничну) і у скалярному добутку $\left(\gamma,\xi_2\right)$ прирівнюємо до нуля коефіцієнти при довільних сталих. При цьому матрицю Q_1 вибираємо тільки для обчислення значень вільних параметрів. Параметри, що не набули значень, покладаємо рівними нулю.

Щоб виконувалися друге і третє рівняння системи (1.9), обчислюємо матриці Q_1, Q_2 (Q_i, $i=3,4,...$) за формулами

$$Q_1=P_0BR^{-1}B^TP_1+P_1BR^{-1}B^TP_0-P_1A_1-A_1^TP_1,\quad Q_2=P_1BR^{-1}B^TP_1. \tag{2.6}$$

Неоднозначність обчислення матриці P_1 враховано в (2.6). Отже, знайдені таким способом матриці $P=P_0+\varepsilon P_1$, $Q=Q_0+\varepsilon Q_1+\varepsilon^2Q_2$ задовольняють матричне рівняння Ріккаті (1.5).

Тепер знайдемо, за яких значень параметра ε пучки матриць P та Q будуть додатно означеними. Спочатку дослідимо пучок матриць $P_0+\varepsilon P_1$ на додатну означеність. Цей пучок матриць еквівалентний пучку $P(\mu)=\mu P_0+P_1$ за областю значень параметра $\varepsilon=\mu^{-1}$. Матриці P_0, P_1 – симетричні, тому власні значення пучка $P(\mu)$ є дійсними числами. Маємо $P_0>0$, а отже, при достатньо великих значеннях $\mu>0$ матриця μP_0+P_1 буде додатно означеною, що випливає з власних значень матриці μP_0 (вони великі додатні) і власних значень суми ермітових (симетричних) матриць [9, теорема 10 додатку]. Власні значення матриці неперервно залежать від її елементів [10], тому додатна означеність пучка $P(\mu)$ не зміниться до першого нуля $|P(\mu)|$ справа на осі μ. Отже, нехай $\mu_{\max}$ – максимальне власне значення $P(\mu)$. Тоді маємо такі випадки для параметра $\varepsilon = \mu^{-1}$, коли матриця-розв'язок P буде додатно означеною:

1) якщо $\mu_{\max} > 0$, то отримуємо $\mu_{\max} < \mu < +\infty$, а для параметра $\varepsilon = \mu^{-1}$ – інтервал $0 < \varepsilon < \mu_{\max}^{-1}$;

2) коли $\mu_{\max} \le 0$, то $0 < \mu < +\infty$, а для ε маємо такий інтервал: $0 < \varepsilon < +\infty$.

Розглянуті випадки описують інтервали (2.3).

Далі розглянемо квадратичний пучок матриць $Q = Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2$. Оскільки Q_0 – симетрична додатно означена матриця, то цей пучок матриць строго еквівалентний такому пучку [9, теорема 6, с. 139; теорема 2, с. 314]:

$$I_{2n} + \varepsilon Q_0^{-1/2} Q_1 Q_0^{-1/2} + \varepsilon^2 Q_0^{-1/2} Q_2 Q_0^{-1/2}.$$

Покладемо $\delta = \varepsilon^{-1}$ і перейдемо до пучка

$$Q(\delta) = \delta^2 I_{2n} + \delta Q_0^{-1/2} Q_1 Q_0^{-1/2} + Q_0^{-1/2} Q_2 Q_0^{-1/2},$$

який має однакову область значень з пучком $\delta^2 Q_0 + \delta Q_1 + Q_2$, а також з початковим пучком матриць для параметра $\varepsilon = \delta^{-1}$.

Для достатньо великих (включаючи від'ємні) значень параметра δ матриця $Q(\delta)$ буде додатно означеною як матриця з домінуючими діагональними додатними елементами (теорема Гершгоріна [10]). Причому, якщо всі власні значення квадратичного пучка матриць комплексні, то додатна означеність $Q(\delta)$ не залежить від параметра δ. Ураховуючи те, що власні значення матриці неперервно залежать від її елементів, то додатна означеність матриці $Q(\delta)$ не зміниться до перших нулів $|Q(\delta)|$ справа і зліва на осі δ. Нехай серед власних значень δ_i, $i = \overline{1, 2n}$, матриці $Q(\delta)$ є дійсні, а $\delta_{\min}$, $\delta_{\max}$ – відповідно мінімальне і максимальне дійсні власні значення. Розглянемо можливі випадки для параметра $\varepsilon = \delta^{-1}$, коли матриця Q буде додатно означеною.

1. Якщо всі дійсні власні значення додатні, то параметр δ належить інтервалам $0 < \delta < \delta_{\min}$, $\delta_{\max} < \delta < +\infty$. Тоді $\varepsilon = \delta^{-1}$ лежатиме в таких межах: $0 < \varepsilon < \delta_{\max}^{-1}$, $\delta_{\min}^{-1} < \varepsilon < +\infty$.

2. Якщо $\delta_{\min} \le 0$, $\delta_{\max} > 0$, то δ належить інтервалу $\delta_{\max} < \delta < +\infty$. Перейдемо до параметра ε і отримаємо такий інтервал: $0 < \varepsilon < \delta_{\max}^{-1}$.

3. Якщо всі дійсні власні значення недодатні або комплексні, то параметр $\delta > 0$ може бути довільним. Звідси маємо $0 < \varepsilon < +\infty$.

Розглянуті випадки для параметра ε описують інтервали (2.4).

Отже, перетин інтервалів, побудованих для пучків матриць $\mu P_0 + P_1$, $\delta^2 Q_0 + \delta Q_1 + Q_2$, дає шуканий інтервал.■

Отже, якщо виконуються умови теореми 2.1, то завжди існує інтервал параметра ε, для якого, побудований за допомогою описаного вище підходу, регулятор буде оптимальним.

Укажемо на те, що точні розв'язки можна обчислювати з більшим числом доданків, ніж у (2.1). Якщо знайдено $P = P_0 + \varepsilon P_1 + ... + \varepsilon^k P_k$, $k > 1$ (матриці P_{k+i}, $i = 1, 2, ...$ прирівнюємо до нуля), то для отримання точного розв'язку рівняння Ріккаті матриці Q_i, $i = k, k+1, ...$ обчислюються за формулами

$$Q_k = \sum_{j=1}^{k+1} P_{j-1} BR^{-1} B^T P_{k+1-j} - P_k A_1 - A_1^T P_k,$$
$$Q_i = \sum_{j=1}^{i+1} P_{j-1} BR^{-1} B^T P_{i-j+1}, \quad i = \overline{k+1, 2k}, \quad Q_{2k+i} = 0, \quad i = 1, 2, ..., \tag{2.7}$$

а матриці Q_i, $i = \overline{0, k-1}$ вважаємо заданими. Інтервали для параметра ε можна обчислити аналогічно до інтервалів (2.3), (2.4), де $\mu_{\max}$ і $\delta_{\min}$, $\delta_{\max}$ – дійсні власні значення відповідно пучків матриць $\mu^k P_0 + \mu^{k-1} P_1 + ... + \mu P_{k-1} + P_k$, $\delta^{2k} Q_0 + \delta^{2k-1} Q_1 + ... + \delta Q_{2k-1} + Q_{2k}$, причому для парного k інтервал $r(P)$ обчислюється як інтервал $r(Q)$.

Приклад 2.1. Нехай задана система (1.1)-(1.4) з такими параметрами

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T,$$

$$Q_0 = I_4, \quad R = I_2, \quad K \in \mathbb{R}_{2\times 4}.$$

Необхідно знайти розв'язок матричного рівняння Ріккаті (1.5) та інтервал для параметра ε, у якому регулятор (1.4) буде оптимальним.

Матриця A_0 має різні власні значення $\lambda_{1,2} = \pm 0.8740320489i$, $\lambda_{3,4} = \pm 2.288245611i$, тому для пошуку оптимального регулятора та інтервала для параметра ε можна застосувати теорему 2.1. З рівняння (1.13) знаходимо вектор γ

$$\gamma = [2\nu_1 + \nu_2, -3\nu_4 + 2\nu_3, 2\nu_1, -\nu_4, 3\nu_4 - 2\nu_3, 3\nu_1 + \nu_2,$$
$$2\nu_4 - \nu_3, \nu_1, 2\nu_1, -2\nu_4 + \nu_3, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_1, -\nu_3, \nu_2 - \nu_1]^T.$$

Далі обчислюємо матрицю D_1, формуємо вектор ξ_1 і у скалярному добутку прирівнюємо до нуля коефіцієнти при довільних сталих ν_1, ν_2, ν_3, ν_4. У результаті проведених обчислень отримуємо рівняння (два з коефіцієнтів тотожно дорівнюють нулю):

$$-16\alpha_2 + 4 - 3(\alpha_0 - \alpha_2)^2 - 2(\alpha_0 - \alpha_2)\alpha_2 - 2a_2^2 +$$
$$+8\alpha_0 - 2\alpha_2(\alpha_0 - 5\alpha_2) + (\alpha_0 - 5\alpha_2)^2 = 0, \tag{2.8}$$
$$8\alpha_2 + 4 - (\alpha_0 - \alpha_2)^2 - a_2^2 - (\alpha_0 - 5\alpha_2)^2 = 0.$$

З системи нелінійних рівнянь (2.8) знаходимо один із розв'язків: $\alpha_0 = 6/5 + 1/5\sqrt{70}$, $\alpha_2 = 2/5$ і за розкладом (1.10) будуємо матрицю

$$P_0 = \begin{bmatrix} 2/5+1/5\sqrt{70} & 0 & 4/5 & 0 \\ 0 & 4/5+1/5\sqrt{70} & 0 & 2/5 \\ 4/5 & 0 & 2/5+1/5\sqrt{70} & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & -4/5+1/5\sqrt{70} \end{bmatrix},$$

власні значення якої дорівнюють $\lambda_{1,3} = 1/5\sqrt{70} + 2/5\sqrt{5}$, $\lambda_{2,4} = 1/5\sqrt{70} - 2/5\sqrt{5}$ тобто $P_0 = 0$.

Далі з рівняння (2.5) знаходимо перше наближення матриці-розв'язку P

$$P_1 = \begin{bmatrix} 7/5-1/10\sqrt{70} & 5/2+\frac{4}{25}\sqrt{70} & -\frac{14}{5}-1/5\sqrt{70} & 6/5+\frac{4}{25}\sqrt{70} \\ 5/2+\frac{4}{25}\sqrt{70} & \frac{23}{5}-1/10\sqrt{70} & -7/4+\frac{4}{25}\sqrt{70} & 0 \\ \frac{14}{5}-1/5\sqrt{70} & -7/4+\frac{2}{25}\sqrt{70} & 0 & 13/20 \\ 6/5+\frac{4}{25}\sqrt{70} & 0 & 13/20 & -\frac{11}{5}+1/10\sqrt{70} \end{bmatrix},$$

урахувавши симетричність матриці за допомогою частини вільних параметрів, а решту покладаємо рівними нулю. За формулами (2.6) обчислюємо матриці розкладу Q

$$Q_1 = \begin{bmatrix} -12.40798406 & 15.82628764 & 5.81397211 & -5.12342657 \\ 15.82628764 & 25.09992032 & 3.22517623 & -12.53138380 \\ 5.81397211 & 3.22517623 & -6.57604781 & 1.96542909 \\ -5.12342657 & -12.53138380 & 1.96542909 & 2.69604781 \end{bmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 21.18005471 & 14.44616773 & -2.49820160 & -3.46105126 \\ 14.44616773 & 14.16272776 & -4.06693606 & 0.0 \\ -2.49820160 & -4.06693606 & 1.59035193 & -0.88617098 \\ -3.46105126 & 0.0 & -0.88617098 & 1.85869589 \end{bmatrix}.$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що знайдений розв'язок P, Q задовольняє матричне рівняння Ріккаті (1.5).

Тепер знаходимо максимальні власні значення пучків матриць $\mu P_0 + P_1$ та $\delta^2 Q_0 + \delta Q_1 + Q_2$:

$$\left|\mu P_0 + P_1\right| = 4.0\mu^4 + 2.34150332\mu^3 - 44.01710326\mu^2 + 19.14069123\mu + 60.69431149,$$

$$\left|\delta^2 Q_0 + \delta Q_1 + Q_2\right| = 1.\delta^8 + 8.81193626\delta^7 - 821.4450381\delta^6 + 5732.956411\delta^5 -$$

$$-6281.234469\delta^4 + 6487.390346\delta^3 - 2022.27962\delta^2 - .711031807\delta^{-7},$$

$$\mu_{\max} = 3.12090767, \quad \delta_{\max} = 19.23482760.$$

Мінімальне власне значення квадратичного пучка матриць від'ємне.

Отже, в інтервалах $\left(0, \mu_{\max}^{-1}\right)$, $\left(0, \delta_{\max}^{-1}\right)$, відповідно матриці $P_0 + \varepsilon P_1$ і $Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2$ будуть додатно означеними. У спільному інтервалі $(0, 0.0519890)$ регулятор $K = R^{-1}B^T\left(P_0 + \varepsilon P_1\right)$ – оптимальний. Побудований регулятор і матриця коефіцієнтів замкненої системи мають вигляд:

$$K=\begin{bmatrix} 3.83865604\varepsilon & 2.47332005+3.76333997\varepsilon & -1.08067198\varepsilon & 0.40 \\ 2.53865604\varepsilon & 0.40 & 0.650\varepsilon & 0.87332005-1.36333997\varepsilon \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

$$A_0+\varepsilon\left(A_1-BK\right)=\begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & \varepsilon & -1.0-1.0\varepsilon \\ -1.0-3.83865604\varepsilon^2 & -2.47332005\varepsilon-3.76333997\varepsilon^2 & -2.0\varepsilon+1.08067198 & 2.6\varepsilon \\ \varepsilon & 3.0\varepsilon & 0.0 & 2.0 \\ 1.0+2.0\varepsilon-2.53865604\varepsilon^2 & -3.4\varepsilon & -2.0-0.65\varepsilon^2 & -0.87332005+1.36333997\varepsilon^2 \end{bmatrix}.$$

Наприклад, для $\varepsilon=0.05$ власні значення матриці коефіцієнтів такі:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}&=-0.03981458056\pm 2.310472295i, \\ \lambda_{3,4}&=-0.04685142209\pm 0.9226108147i. \end{aligned} \tag{2.10}$$

З (2.10) випливає, що замкнена система (1.1)-(1.4), за допомогою отриманого оптимального регулятора (2.9), стабілізована.

ВИСНОВКИ

У розглянутій роботі вивчалось оптимальне керування лінійними неперервними системами, матриці коефіцієнтів яких складаються з кососиметричної частини і збурення залежного від параметра. Для таких систем необхідно будувати оптимальний регулятор за допомогою асимптотичного розкладу розв’язку матричного рівняння Ріккаті, що призводить до нескінченної системи матричних алгебраїчних рівнянь. Отримано необхідні та достатні умови розв’язності таких рівнянь на основі нуль-простору розширеної матриці, яку побудовано за допомогою прямого добутку, що дало простий та ефективний спосіб обчислення значень вільних параметрів матриць розкладу (1.6). Показано, як можна отримати точний розв’язок рівняння Ріккаті за скінченне число кроків. А це, у свою чергу, дало можливість сформулювати у вигляді теореми інтервальні умови для оптимального регулятора. Ефективність розглянутого підходу показана на прикладі четвертого порядку.

Запропонований у статті алгоритм робастного оптимального керування неперервними параметричними системами може бути застосований до механічних систем, які описуються такими моделями.

ЛІТЕРАТУРА

1. Зінчук М. О., Новицький В. В. Оптимальне керування лінійними параметричними системами. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України*. 2010. Т. 7, № 3. С. 171–185.
2. Новицкий В. В., Хуан Чень. Оптимальное управление почти консервативными системами. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України*. 2004. Т. 1, № 2. С. 152–157.
3. Barnett S., Cameron R. G. Introduction to Mathematical Control Theory, Second Edition. Oxford: Clarendon press, 1985. 404 p.
4. Ларин В. Б. О слабом управлении слабодемпфированными системами. *Прикл. математика и механика*. 1978. Т. 42, Вып. 6. С. 1000–1006.
5. Прасолов В. В. Задачи и теоремы линейной алгебры. Москва: Наука, 1996. 304 с.
6. Зінчук М. О., Новицький В. В. Оптимальне керування неперервними майже консервативними системами. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України*. 2006. Т. 3, № 1. С. 75–89.

7. Ланкастер П. Теория матриц. Москва: Наука, 1978. 280 с.
8. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т 1. Основные алгоритмы. Москва: Мир, 1976. 736 с.
9. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Москва: Наука, 1988. 552 с.
10. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. Москва: Мир, 1989. 656 с.

REFERENCES

1. Zinchuk, M. O. & Novytskyi, V. V. (2010). Optimal control of linear parametric systems. Zb. prats In-tu matematyky NAN Ukrainy, Vol. 7, No. 3, pp. 171-185.
2. Novytskyi, V. V. & Khuan, Chen (2004). Optimal control of almost conservative systems. Zb. prats In-tu matematyky NAN Ukrainy, Vol. 1, No. 2, pp. 152-157.
3. Barnett, S. & Cameron, R. G. (1985). Introduction to Mathematical Control Theory, Second Edition. Oxford: Clarendon press.
4. Larin, V. B. (1978). On weak management of weakly damped systems. Prikl. matematika i mehanika, Vol. 42, No. 6, pp. 1000-1006.
5. Prasolov, V. V. (1996). The problems and theorems of linear algebra. Moscow: Nauka.
6. Zinchuk, M. O. & Novytskyi, V. V. (2006). Optimal control of continuous almost conservative systems. Zb. prats In-tu matematyky NAN Ukrainy, Vol. 3, No. 1, pp. 75-89.
7. Lankaster, P. (1978). Theory of matrices. Moscow: Nauka.
8. Knut, D. (1976). The art of computer programming. (vol. 1) The main algorithms. Moscow: Mir.
9. Gantmaher, F. R. (1988). Theory of matrices. Moscow: Nauka.
10. Horn, R. & Dzhonson, Ch. (1989). Matrix Analysis. Moscow: Mir.

УДК 539.3

ЗГИН ПЛАСТИНИ РЕЙССНЕРА З ДВОМА РІВНИМИ ЗСУНУТИМИ ПАРАЛЕЛЬНИМИ ТРІЩИНАМИ З УРАХУВАННЯМ ШИРИНИ ОБЛАСТІ КОНТАКТУ ЇХНІХ БЕРЕГІВ

Опанасович В. К., д. ф.-м. н., професор, Звізло І. С., к. ф.-м. н., Яцик І. М., магістр

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна

kafmech@franko.lviv.ua, kafmech@franko.lviv.ua, IhorYatsyk@i.ua

Досліджено напружено-деформований стан ізотропної пластини з двома прямолінійними паралельними зсунутими наскрізними тріщинами однакової довжини за двобічного згину розподіленими моментами на нескінченності. Береги тріщин вільні від зовнішнього навантаження, а під дією згинальних моментів на нескінченності вони прийшли у гладкий контакт уздовж області сталої ширини поблизу основи пластини. На основі методів теорії функцій комплексної змінної і комплексних потенціалів плоскої задачі теорії пружності та теорії згину пластин за Рейсснером, розв'язування задачі зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь на тріщинах, яку вирішено чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Побудовано графічні залежності для контактного зусилля між берегами тріщин, коефіцієнтів інтенсивності зусиль, згинальних і крутних моментів та поперечних сил за різних параметрів задачі.

Ключові слова: пластина Рейсснера, тріщина, двобічний згин, контакт берегів тріщини, плоский напружений стан, комплексні потенціали, контактне зусилля, коефіцієнти інтенсивності.