7. Ланкастер П. Теория матриц. Москва: Наука, 1978. 280 с.
8. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т 1. Основные алгоритмы. Москва: Мир, 1976. 736 с.
9. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Москва: Наука, 1988. 552 с.
10. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. Москва: Мир, 1989. 656 с.

REFERENCES

1. Zinchuk, M. O. & Novytskyi, V. V. (2010). Optimal control of linear parametric systems. Zb. prats In-tu matematyky NAN Ukrainy, Vol. 7, No. 3, pp. 171-185.
2. Novytskyi, V. V. & Khuan, Chen (2004). Optimal control of almost conservative systems. Zb. prats In-tu matematyky NAN Ukrainy, Vol. 1, No. 2, pp. 152-157.
3. Barnett, S. & Cameron, R. G. (1985). Introduction to Mathematical Control Theory, Second Edition. Oxford: Clarendon press.
4. Larin, V. B. (1978). On weak management of weakly damped systems. Prikl. matematika i mehanika, Vol. 42, No. 6, pp. 1000-1006.
5. Prasolov, V. V. (1996). The problems and theorems of linear algebra. Moscow: Nauka.
6. Zinchuk, M. O. & Novytskyi, V. V. (2006). Optimal control of continuous almost conservative systems. Zb. prats In-tu matematyky NAN Ukrainy, Vol. 3, No. 1, pp. 75-89.
7. Lankaster, P. (1978). Theory of matrices. Moscow: Nauka.
8. Knut, D. (1976). The art of computer programming. (vol. 1) The main algorithms. Moscow: Mir.
9. Gantmaher, F. R. (1988). Theory of matrices. Moscow: Nauka.
10. Horn, R. & Dzhonson, Ch. (1989). Matrix Analysis. Moscow: Mir.

УДК 539.3

ЗГИН ПЛАСТИНИ РЕЙССНЕРА З ДВОМА РІВНИМИ ЗСУНУТИМИ ПАРАЛЕЛЬНИМИ ТРІЩИНАМИ З УРАХУВАННЯМ ШИРИНИ ОБЛАСТІ КОНТАКТУ ЇХНІХ БЕРЕГІВ

Опанасович В. К., д. ф.-м. н., професор, Звізло І. С., к. ф.-м. н., Яцик І. М., магістр

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна

kafmech@franko.lviv.ua, kafmech@franko.lviv.ua, IhorYatsyk@i.ua

Досліджено напружено-деформований стан ізотропної пластини з двома прямолінійними паралельними зсунутими наскрізними тріщинами однакової довжини за двобічного згину розподіленими моментами на нескінченності. Береги тріщин вільні від зовнішнього навантаження, а під дією згинальних моментів на нескінченності вони прийшли у гладкий контакт уздовж області сталої ширини поблизу основи пластини. На основі методів теорії функцій комплексної змінної і комплексних потенціалів плоскої задачі теорії пружності та теорії згину пластин за Рейсснером, розв’язування задачі зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь на тріщинах, яку вирішено чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Побудовано графічні залежності для контактного зусилля між берегами тріщин, коефіцієнтів інтенсивності зусиль, згинальних і крутних моментів та поперечних сил за різних параметрів задачі.

Ключові слова: пластина Рейсснера, тріщина, двобічний згин, контакт берегів тріщини, плоский напружений стан, комплексні потенціали, контактне зусилля, коефіцієнти інтенсивності.

ИЗГИБ ПЛАСТИНЫ РЕЙССНЕРА С ДВУМЯ РОВНЫМИ СДВИНУТЫМИ ПАРАЛЕЛЬНЫМИ ТРЕЩИНАМИ С УЧЕТОМ ШИРИНЫ ОБЛАСТИ КОНТАКТА ИХ БЕРЕГОВ

Опанасовыч В. К., д. ф.-м. н., профессор, Звизло И. С., к. ф.-м. н., Яцык И. Н., магистр

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, г. Львов, 79000, Украина

kafmech@franko.lviv.ua, kafmech@franko.lviv.ua, IhorYatsyk@i.ua

Исследовано напряженно-деформированное состояние изотропной пластины с двумя прямолинейными параллельными сдвинутыми сквозными трещинами одинаковой длины при двустороннем изгибе распределенными моментами на бесконечности. Берега трещин свободны от внешней нагрузки, а под воздействием изгибающих моментов на бесконечности они пришли в гладкий контакт вдоль области постоянной ширины вблизи основания пластины. С использованием методов теории функций комплексного переменного и комплексных потенциалов плоской задачи теории упругости и теории изгиба пластин по Рейсснеру, решение задачи сведено к системе сингулярных интегральных уравнений на трещинах, решаемой численно с помощью метода механических квадратур. Построены графические зависимости для контактного усилия между берегами трещин, коэффициентов интенсивности усилий, изгибающих и крутящих моментов и поперечных сил при различных параметрах задачи.

Ключевые слова: пластина Рейсснера, трещина, двусторонний изгиб, контакт берегов трещины, плоское напряженное состояние, комплексные потенциалы, контактное усилие, коэффициенты интенсивности.

REISSNER'S PLATE BENDING CONTAINING TWO EQUAL SHIFTED PARALLEL CRACKS TAKING INTO ACCOUNT CONTACT ZONE WIDTH OF THEIR FACES

Opanasovych V. K., D. Sc. in Physics and Maths, Professor,
Zvizlo I. S., Ph. D. in Physics and Maths, Yatsyk I. M., Master

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, Ukraine

kafmech@franko.lviv.ua, kafmech@franko.lviv.ua, IhorYatsyk@i.ua

Construction of the cracked plate bending problems solutions forms an important and actual in terms of theory development and practical applications scientific direction. They make it possible to determine stress and displacement distribution near the defects tips, as well as make recommendations for selecting optimal geometrical, physical and mechanical characteristics of plates depending on operating conditions in order to prevent destruction of engineering constructions. In this paper the stress-strain state of boundless isotropic plate with two equal shifted parallel through-the-thickness cracks, the faces of which are free from the external loading is investigated. The plate is under the action of the uniformly distributed in a remote part bending moments, which vectors are parallel and perpendicular to the axes of the cracks. It is assumed that under external loading the cracks faces come in a smooth contact on all crack length along the two-dimensional area of constant width near the upper plate basis. As a result of the cracks faces contact the solution of problem is presented in the form of two related problems solutions: the theory of elasticity plane problem and the problem of plates bending based on the equations of Reissner theory. On the basis of complex variable function theory methods and complex potentials the system of singular integral equations is obtained which is reduced by the mechanical quadratures method to the infinite system of linear algebraic equations. This system is solved numerically by the method of reduction using Gauss with a choice of main entry. The numerical analysis of problem at some parameters values is carried out and graphic dependences for contact force between the faces of cracks, force and moment intensity factors are constructed. In particular cases known in the scientific literature results for Reissner's plate bending problems with one crack considering the contact zone width of its faces, with two parallel not shifted equal cracks as well as for appropriate problems solved using equations of the classical theory of plates bending are obtained.

Key words: Reissner's plate, crack, bilateral bending, contact of crack faces, plane stress, complex potentials, contact force, intensity factors.

ВСТУП

Як конструктивний елемент пластини широко застосовують у машинобудуванні та багатьох інших галузях техніки. Їхній запас міцності істотно залежить від наявності в них тріщиноподібних дефектів, які є потужними концентраторами напружень та істотно знижують допустиме навантаження, що може бути прикладеним до пластини. Щоб визначити граничне навантаження, а також ресурс експлуатації пластинчастих елементів, важливо опрацювати методи оцінювання впливу таких дефектів на перерозподіл полів напружень і деформацій.

Найчастіше пластини перебувають під дією згинального навантаження. Тому вивчення напружено-деформованого стану пластини за згину з урахуванням можливого контакту берегів тріщиноподібних дефектів не втрачає своєї актуальності. З дослідженнями задач згину пластин з тріщинами та пошуком ефективних методів їхнього розв'язування можна ознайомитися в монографіях [1-3] і статтях [4-7], де контакт берегів тріщин не враховували, вважаючи тріщину щілиною із достатньо широко розведеними берегами, щоб вони не дотикалися. Однак зрозуміло, що в більшості випадків, незважаючи на істотне ускладнення формулювання задач згину пластини із тріщинами та розв'язування відповідних математичних задач, це все ж треба робити. У працях [8-16] вивчені різноманітні задачі, де в різний спосіб враховано контакт берегів тріщиноподібних дефектів за згину пластини, проте недостатньо досліджень, пов'язаних зі згином пластини з тріщинами, береги яких контактують уздовж двовимірної зони постійної ширини з використанням теорії Рейсснера. Зазначимо, що у праці [15] досліджено двобічний згин пластини Рейсснера розподіленими згинальними моментами на нескінченності за наявності прямолінійних співвісних наскрізних тріщин. Крім того, у дослідженні [16] розглянуто напружено-деформований стан ізотропної пластини Рейсснера з прямолінійними однаковими паралельними не зсунутими наскрізними тріщинами з урахуванням ширини області контакту їхніх берегів, при цьому вектори розподілених моментів паралельні та перпендикулярні до ліній тріщин.

Мета роботи – дослідити згин ізотропної пластини Рейсснера з прямолінійними паралельними зсунутими наскрізними однаковими тріщинами з урахуванням ширини області контакту їхніх берегів. Із застосуванням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів розв'язок задачі зведений до системи сингулярних інтегральних рівнянь, яка розв'язана чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Обчислення здійснені для вибраних значень параметрів задачі, на основі якого побудовано відповідні графічні залежності для контактного зусилля між берегами тріщин і коефіцієнтів інтенсивності зусиль, моментів та поперечних сил.

ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Дослідимо задачу про згин ізотропної пластини завтовшки $2h$ з двома однаковими паралельними зсунутими тріщинами завдовжки $2l$. Відстань між осями дефектів дорівнює d, а між проекціями центрів на напрямок тріщин – c. Вважаємо, що під впливом зовнішнього навантаження береги тріщини приходять у гладкий контакт поблизу верхньої основи пластини уздовж усієї довжини тріщини, причому ширина області контакту є сталою та дорівнює h_1.

Виберемо декартову систему координат $Oxy\tilde{z}$ з координатною площиною Oxy у серединній площині пластини, початок O якої розташований посередині відрізка, що з'єднує геометричні центри тріщин, а вісь Ox спрямовано паралельно до осей дефектів. Уведемо локальні системи координат $O_k x_k y_k$ з початками у точках $O_k\left((-1)^k c/2;(-1)^k d/2\right)$, $k=1,2$ і осями $O_k x_k$ та $O_k y_k$, паралельними відповідно до осей Ox та Oy. Відрізок дійсної осі $O_k x_k$, для якого $|x_k|\le l$, позначимо через L_k. Береги тріщин вільні від зовнішнього навантаження.

Пластина перебуває під дією розподіленого згинального навантаження на нескінченності M_x^∞ і M_y^∞ (рис. 1).

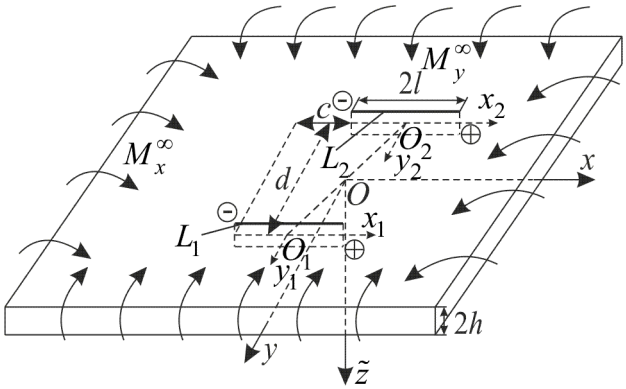

Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщин

Надалі дотримуватимемося таких позначень: μ – модуль зсуву; E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуассона; $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$.

З урахуванням контакту берегів тріщини розв’язування задачі розбиваємо на дві взаємозв’язані задачі: плоску задачу теорії пружності та задачу згину пластини з використанням теорії Рейсснера.

Згідно з формулюванням задачі на берегах тріщин маємо такі крайові умови:

$$\sigma_{y_k y_k}^+ = \sigma_{y_k y_k}^- = -N_k/(2h), \quad \sigma_{x_k y_k}^+ = \sigma_{x_k y_k}^- = 0, \quad x_k \in L_k, \quad k = 1,2, \tag{1}$$

$$M_{y_k}^+ = M_{y_k}^- = \beta h N_k, \quad H_{x_k y_k}^+ = H_{x_k y_k}^- = 0, \quad Q_{y_k}^+ = Q_{y_k}^- = 0, \quad x_k \in L_k, \quad k = 1,2, \tag{2}$$

$$\partial_{x_k}\left[v_{p_k}\right] - \alpha h \partial_{x_k}\left[\varphi_{y_k}\right] = 0, \quad x_k \in L_k, \quad k = 1,2, \tag{3}$$

де $\sigma_{x_k y_k}$, $\sigma_{y_k y_k}$ і u_{p_k} та v_{p_k} – відповідно компоненти тензора напружень і проекції вектора переміщення точки на осі $O_k x_k$ та $O_k y_k$ у плоскій задачі; N_k – контактне зусилля між берегами k-ї тріщини, причому $N_k > 0$; φ_{y_k} – усереднений за товщиною пластини кут повороту нормалі до серединної площини пластини у задачі згину [17]; M_{y_k} – згинальний момент; Q_{y_k} і $H_{x_k y_k}$ – поперечна сила і крутний момент відповідно; $\partial_{x_k} = \partial/\partial x_k$, $[f] = f^+ - f^-$; символи «+» і «–» позначають відповідно граничні значення функції при прямуванні точки площини при $y_k \to \pm 0$; $\alpha = \left\{1+(1-\gamma)^2\right\}/2$, $\beta = 1-\gamma/3$, а $\gamma = h_1/h$ – зведена ширина області контакту [8].

Потрібно знайти напружено-деформований стан пластини.

ПОБУДОВА РОЗВ’ЯЗКУ ЗАДАЧІ

З використанням комплексних потенціалів плоскої задачі [18] та теорії згину пластин за Рейсснером [19], аналогічно як це зроблено у статті [16], розв'язування задачі зведено до задач лінійного спряження, на підставі яких отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих дійсних функцій $g_{sj}(x_j)$, $s = \overline{1,4}$, $j = 1,2$, яка після зведення інтегрування до проміжку $[-1;1]$ матиме вигляд:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{2}\int_{-1}^{1}\left\{\sum_{s=1}^{3} R_{3k-2,3j-3+s}(t,\tilde{x})\,\tilde{g}_{sj}(t)+A_{kj}(t,\tilde{x})\,\tilde{g}_{4j}(t)\right\}dt = 2\pi M_y^{\infty}/n, \quad |\tilde{x}|<1, \\ \sum_{j=1}^{2}\int_{-1}^{1}\sum_{s=1}^{3} R_{3k-1,3j-3+s}(t,\tilde{x})\,\tilde{g}_{sj}(t)\,dt = 0, \quad |\tilde{x}|<1, \\ \sum_{j=1}^{2}\int_{-1}^{1}\sum_{s=1}^{3} R_{3k,3j-3+s}(t,\tilde{x})\,\tilde{g}_{sj}(t)\,dt = 0, \quad |\tilde{x}|<1, \\ \sum_{j=1}^{2}\int_{-1}^{1}\left\{\tilde{K}_{kj}(t,\tilde{x})\,\tilde{g}_{2j}(t)+\tilde{L}_{kj}(t,\tilde{x})\,\tilde{g}_{4j}(t)\right\}dt = 0, \quad |\tilde{x}|<1, \end{cases} \tag{4}$$

де

$$R_{3k-2,3j-2}(t,\tilde{x}) = -\frac{b_{kj}}{r_{kj}^2}\left\{1-\left(3-4b_{kj}^2/r_{kj}^2\right)\left\{1+2n_3\tilde{K}_2\left(\frac{r_{kj}}{\lambda}\right)\right\}+\frac{2n_3}{\lambda}\left(b_{kj}^2/r_{kj}^2-1\right)r_{kj}K_1\left(\frac{r_{kj}}{\lambda}\right)\right\},$$

$$R_{3k-2,3j-1}(t,\tilde{x}) = \left(t-a_{kj}\right)/r_{kj}^2\left\{n_1+6n_2\alpha\beta\left(2b_{kj}^2/r_{kj}^2+1\right)+\left(1-4b_{kj}^2/r_{kj}^2\right)\left\{1+2n_3\tilde{K}_2\left(r_{kj}/\lambda\right)\right\}-\right.$$

$$\left.-2n_3b_{kj}^2/\left(\lambda r_{kj}\right)K_1\left(r_{kj}/\lambda\right)\right\}, \quad R_{3k-2,3j}(t,\tilde{x}) = ln_3b_{kj}\left(t-a_{kj}\right)/r_{kj}^2\,\tilde{K}_2\left(r_{kj}/\lambda\right),$$

$$R_{3k-1,3j-2}(t,\tilde{x}) = \frac{t-a_{kj}}{r_{kj}^2}\left\{n_4-\left(1-4b_{kj}^2/r_{kj}^2\right)\left\{1+2n_3\tilde{K}_2\left(\frac{r_{kj}}{\lambda}\right)\right\}+\frac{n_3}{\lambda}\left(2b_{kj}^2/r_{kj}^2-1\right)r_{kj}K_1\left(\frac{r_{kj}}{\lambda}\right)\right\},$$

$$R_{3k-1,3j-1}(t,\tilde{x}) = -\frac{b_{kj}}{r_{kj}^2}\left\{n_4+\left(3-4b_{kj}^2/r_{kj}^2\right)\left\{1+2n_3\tilde{K}_2\left(\frac{r_{kj}}{\lambda}\right)\right\}-\frac{n_3}{\lambda}\left(2b_{kj}^2/r_{kj}^2-1\right)r_{kj}K_1\left(\frac{r_{kj}}{\lambda}\right)\right\},$$

$$R_{3k-1,3j}(t,\tilde{x}) = -ln_3\left(b_{kj}^2/r_{kj}^2-1/2\right)\tilde{K}_2\left(r_{kj}/\lambda\right),$$

$$R_{3k,3j-2}(t,\tilde{x}) = 4/\left(\lambda r_{kj}^2\right)\left\{\left(r_{kj}^2-2b_{kj}^2\right)\tilde{K}_1'\left(r_{kj}/\lambda\right)-b_{kj}^2K_0\left(r_{kj}/\lambda\right)\right\},$$

$$R_{3k,3j-1}(t,\tilde{x}) = 4/\left(\lambda r_{kj}^2\right)b_{kj}\left(t-a_{kj}\right)\tilde{K}_2\left(r_{kj}/\lambda\right),\ R_{3k,3j}(t,\tilde{x}) = -2l\left(t-a_{kj}\right)K_1\left(r_{kj}/\lambda\right)/r_{kj},$$

$$A_{kj}(t,\tilde{x}) = 4\beta b_{kj}h^2/\left(nr_{kj}^2\right)\left(1-2b_{kj}^2/r_{kj}^2\right),$$

$$\tilde{K}_{kj}(t,\tilde{x}) = \alpha Ehb_{kj}/\left\{r_{kj}^2(1-\nu)\right\}\left(1/2-b_{kj}^2/r_{kj}^2\right), \quad \tilde{L}_{kj}(t,\tilde{x}) = \left(t-a_{kj}\right)/r_{kj}^2\left(2b_{kj}^2/r_{kj}^2-1\right),$$

$$\tilde{g}_{sj}(t) = g_{sj}(lt), \quad r_{kj} = \sqrt{\left(t-a_{kj}\right)^2+b_{kj}^2}, \quad a_{kj} = \begin{cases}\tilde{x}, k=j, \\ \tilde{x}+(-1)^k c/l, k\neq j,\end{cases} \quad b_{kj} = \begin{cases}0, k=j, \\ (-1)^k d/l, k\neq j,\end{cases}$$

$$n_1 = (5+3\nu)/(1-\nu), \quad n_2 = (1+\nu)/(1-\nu), \quad n_3 = \frac{4}{1-\nu}, \quad n_4 = (3+\nu)/(1-\nu),$$

$$\tilde{x} = \frac{x}{l}, \quad \lambda = h\sqrt{10}/(5l).$$

Систему (4) доповнимо умовами

$$\int_{-1}^{1}\tilde{g}_{1j}(t)\,dt = 0, \quad \int_{-1}^{1}\tilde{g}_{2j}(t)\,dt = 0, \quad \int_{-1}^{1}\left\{t\tilde{g}_{1j}(t)-l\lambda^2\tilde{g}_{3j}(t)\right\}dt = 0, \quad \int_{-1}^{1}\tilde{g}_{4j}(t)\,dt = 0, \tag{5}$$

які відображають відповідно однозначність усереднених кутів повороту нормалі φ_{x_j}, φ_{y_j}, прогину w_j і переміщення u_{p_j} при обході навколо контуру j-ої тріщини.

Контактне зусилля між берегами k-ої тріщини визначимо за формулою

$$N_k(\tilde{x}) = \frac{2h}{\pi}\sum_{j=1}^{2}\int_{-1}^{1}\left\{B_{kj}(t,\tilde{x})\tilde{g}_{2j}(t) + nA_{kj}(t,\tilde{x})\big/\left(4\beta h^2\right)\tilde{g}_{4j}(t)\right\}dt, |\tilde{x}|<1,$$

де $B_{kj}(t,\tilde{x}) = \alpha Eh\left(t-a_{kj}\right)\big/\left\{r_{kj}^2(1-\nu)\right\}\left(1+2b_{kj}^2\big/r_{kj}^2\right)$.

Для обчислення коефіцієнтів інтенсивності зусиль $K_{1j}^{\pm}$, $K_{2j}^{\pm}$, згинальних $K_{Mj}^{\pm}$ і крутних $K_{Hj}^{\pm}$ моментів та поперечних сил $K_{Qj}^{\pm}$ скористаємося відповідними залежностями із монографій [3] та [19]

$$K_{1j}^{\pm} = \pm 2\alpha Eh^2\big/(1-\nu)\sqrt{l}\lim_{t\to\pm1}\left\{\sqrt{1-t^2}\,\tilde{g}_{2j}(t)\right\},\quad K_{2j}^{\pm} = \pm 2h\sqrt{l}\lim_{t\to\pm1}\left\{\sqrt{1-t^2}\,\tilde{g}_{4j}(t)\right\},$$

$$K_{Mj}^{\pm} = \mp m\sqrt{l}\lim_{t\to\pm1}\left\{\sqrt{1-t^2}\,\tilde{g}_{2j}(t)\right\},\quad K_{Hj}^{\pm} = \mp m\sqrt{l}\lim_{t\to\pm1}\left\{\sqrt{1-t^2}\,\tilde{g}_{1j}(t)\right\},$$

$$K_{Qj}^{\pm} = \pm D\sqrt{l}\lim_{t\to\pm1}\left\{\sqrt{1-t^2}\,\tilde{g}_{3j}(t)\right\}. \tag{6}$$

Тут верхні знаки відповідають вершині тріщини $x_j = l$, а нижній – $x_j = -l$, причому коефіцієнти інтенсивності $K_{1j}^{\pm}$ і $K_{Mj}^{\pm}$ зв'язані залежністю

$$K_{1j}^{\pm} = 3\alpha K_{Mj}^{\pm}\big/h.$$

З урахуванням формул (6) зведені коефіцієнти інтенсивності зусиль (ЗКІЗ) $\tilde{K}_{1j}^{\pm} = 2hK_{1j}^{\pm}\big/\left(M_y^{\infty}\sqrt{l}\right)$, $\tilde{K}_{2j}^{\pm} = 2hK_{2j}^{\pm}\big/\left(M_y^{\infty}\sqrt{l}\right)$, згинальних (ЗКІЗМ) $\tilde{K}_{Mj}^{\pm} = K_{Mj}^{\pm}\big/\left(M_y^{\infty}\sqrt{l}\right)$ і крутних моментів (ЗКІКМ) $\tilde{K}_{Hj}^{\pm} = K_{Hj}^{\pm}\big/\left(M_y^{\infty}\sqrt{l}\right)$ та поперечних сил (ЗКІПС) $\tilde{K}_{Qj}^{\pm} = K_{Qj}^{\pm}\lambda\sqrt{l}\big/M_y^{\infty}$ можна подати так:

$$\tilde{K}_{1j}^{\pm} = 6\alpha\tilde{K}_{Mj}^{\pm},\quad \tilde{K}_{2j}^{\pm} = \pm 4h^2\big/M_y^{\infty}\lim_{t\to\pm1}\left\{\sqrt{1-t^2}\,\tilde{g}_{4j}(t)\right\},\quad \tilde{K}_{Mj}^{\pm} = \mp m\big/M_y^{\infty}\lim_{t\to\pm1}\left\{\sqrt{1-t^2}\,\tilde{g}_{2j}(t)\right\},$$

$$\tilde{K}_{Hj}^{\pm} = \mp m\big/M_y^{\infty}\lim_{t\to\pm1}\left\{\sqrt{1-t^2}\,\tilde{g}_{1j}(t)\right\},\quad \tilde{K}_{Qj}^{\pm} = \pm Dl\lambda\big/M_y^{\infty}\lim_{t\to\pm1}\left\{\sqrt{1-t^2}\,\tilde{g}_{3j}(t)\right\}. \tag{7}$$

Систему рівнянь (32) і (33) розв'язуємо числово за допомогою методу механічних квадратур [20] з використанням такого подання функцій $\tilde{g}_{kj}(t)$ $\left(j=1,2;\ k=\overline{1,4}\right)$:

$$\tilde{g}_{1j}(t) = \frac{M_y^{\infty}g_{1j}^{*}(t)}{n\sqrt{1-t^2}},\quad \tilde{g}_{2j}(t) = \frac{M_y^{\infty}g_{2j}^{*}(t)}{n\sqrt{1-t^2}},\quad \tilde{g}_{3j}(t) = \frac{M_y^{\infty}g_{3j}^{*}(t)}{nl\sqrt{1-t^2}},\quad \tilde{g}_{4j}(t) = \frac{M_y^{\infty}g_{4j}^{*}(t)}{h^2\sqrt{1-t^2}}. \tag{8}$$

У результаті отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь відносно вузлових значень $g_{kj}^{*}(t_s)$ $\left(j=1,2;\ k=\overline{1,4}\right)$, де $t_s = \cos\{\pi(2s-1)/(2S)\}$; S – кількість вузлів у методі механічних квадратур.

З урахуванням (8), з (7) для обчислення зведених коефіцієнтів інтенсивності отримуються залежності

$$\tilde{K}_{2j}^{\pm} = \pm 4g_{4j}^{*}(\pm1),\quad \tilde{K}_{Mj}^{\pm} = \mp qg_{2j}^{*}(\pm1),\quad \tilde{K}_{Hj}^{\pm} = \mp qg_{1j}^{*}(\pm1),\quad \tilde{K}_{Qj}^{\pm} = \pm\lambda n_3/4g_{3j}^{*}(\pm1), \tag{9}$$

де

$$g_{kj}^{*}(\pm 1) = \mp 1/S \sum_{s=1}^{S} (-1)^{s+(1\mp 1)S/2}\, g_{kj}^{*}(t_s)\, \mathrm{tg}^{\mp 1}\{\pi(2s-1)/(4S)\}.$$

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ І ВИСНОВКИ

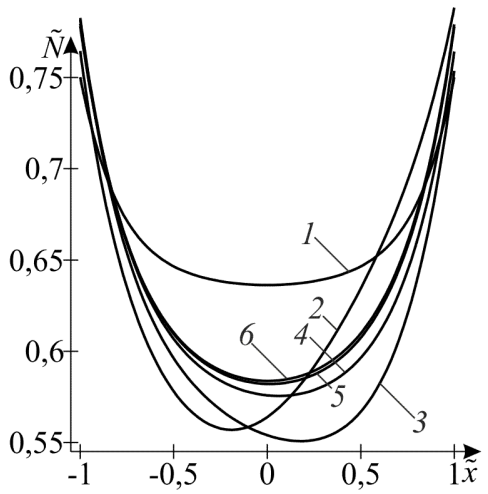

Рис. 2. Графічна залежність зведеного контактного зусилля $\tilde{N}$ між берегами тріщини

При $\nu = 0{,}3$, $\tilde{d} = d/l = 1$ і $\gamma = 0{,}13$ був проведений числовий аналіз задачі, який поданий на рис. 2-6.

На рис. 2 наведена графічна залежність зведеного контактного зусилля $\tilde{N} = hN_1 / M_y^{\infty}$ при $\lambda = 0{,}2$ та різних значеннях $\tilde{c} = c/l$. Крива *1* побудована при $\tilde{c} = 0$, крива *2* – при $\tilde{c} = 1$, крива *3* – при $\tilde{c} = 2$, крива *4* – при $\tilde{c} = 3$, крива *5* – при $\tilde{c} = 4$ та крива *6* – при $\tilde{c} = 5$. Як бачимо з цього рисунка, при збільшенні $\tilde{c}$ величина $\tilde{N}$ у середній частині тріщини спочатку зменшується, а потім збільшується, залишаючись меншою, ніж у випадку не зсунутих паралельних тріщин $(\tilde{c} = 0)$.

На рис. 3 подана графічна залежність ЗКІЗ $\tilde{K}_{21}^{\pm}$, на рис. 4 – ЗКІЗМ $\tilde{K}_{M1}^{\pm}$, на рис. 5 – ЗКІКМ $\tilde{K}_{H1}^{\pm}$ і на рис. 6 – ЗКІПС $\tilde{K}_{Q1}^{\pm}$ від $\tilde{c}$, причому штриховими лініями позначені коефіцієнти інтенсивності у вершині тріщини $\tilde{x} = -1$, а суцільними – $\tilde{x} = 1$. Криві *1* відповідають значенню $\lambda = 0{,}2$, криві *2* – $\lambda = 0{,}5$, криві *3* – $\lambda = 1$. Як бачимо з цих рисунків, при малих значеннях $\tilde{c}$ ЗКІЗМ більші у зовнішніх, а ЗКІЗ – у внутрішніх вершинах тріщин. При переході через деяке значення $\tilde{c}$ (для ЗКІЗМ воно знаходиться в околі $\tilde{c} = 2$, а для ЗКІЗ – в околі $\tilde{c} = 1$) ситуація змінюється на протилежну. Стосовно коефіцієнтів ЗКІКМ і ЗКІПС такої однозначності немає.

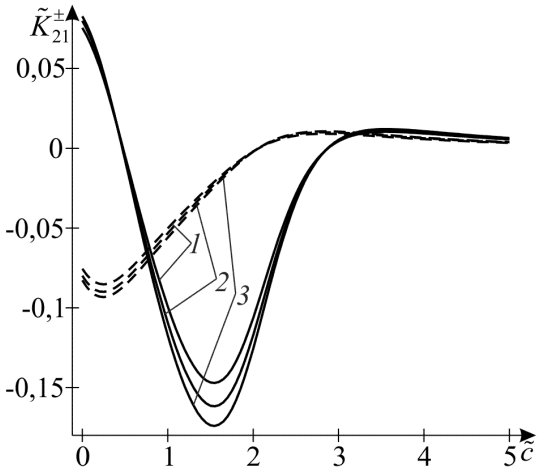

Рис. 3. Графічна залежність $\tilde{K}_{21}^{\pm}$ від зсуву тріщин $\tilde{c}$ при різних значеннях λ

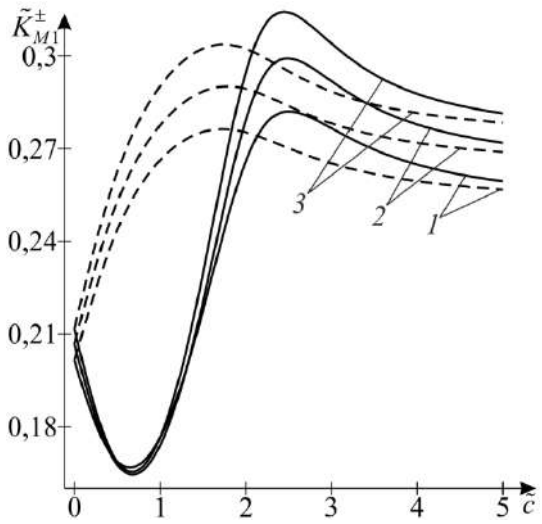

Рис. 4. Графічна залежність $\tilde{K}_{M1}^{\pm}$ від зсуву тріщин $\tilde{c}$ при різних значеннях λ

Зауважимо, що ЗКІЗ $\tilde{K}_{1j}^{\pm}$ і ЗКІЗМ $\tilde{K}_{Mj}^{\pm}$ пов'язані між собою першим співвідношенням (7), тому графічні залежності для $\tilde{K}_{11}^{\pm}$ не наводяться.

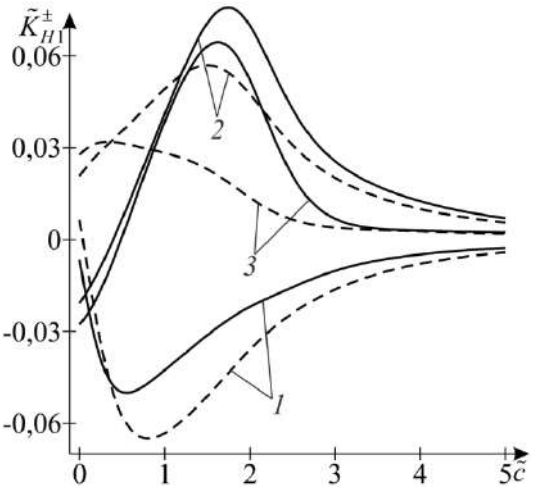

Рис. 5. Графічна залежність $\tilde{K}^{\pm}_{H1}$ від зсуву тріщин $\tilde{c}$ при різних значеннях $\tilde{K}^{\pm}_{21}$

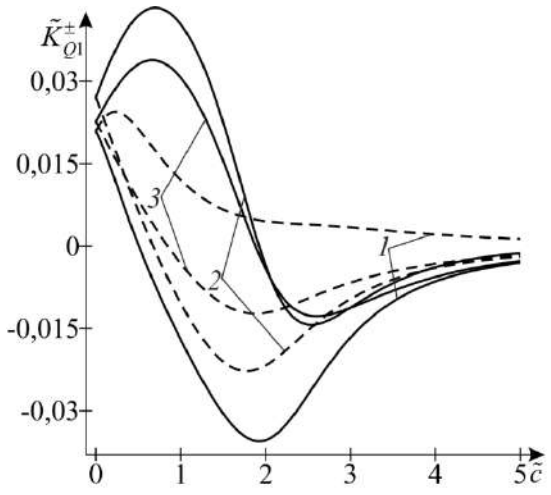

Рис. 6. Графічна залежність $\tilde{K}^{\pm}_{H1}$ від зсуву тріщин $\tilde{c}$ при різних значеннях $\tilde{K}^{\pm}_{21}$

У частинних випадках, коли $\tilde{c} = 0$, контактне зусилля та коефіцієнти інтенсивності прямують до відповідних значень задачі згину пластини з двома паралельними не зсунутими тріщинами [16], при $\tilde{c} > 1$ і $\tilde{d} = 0$ одержується випадок згину пластини з двома співвісними тріщинами [15], а якщо один із параметрів $\tilde{c}$ або $\tilde{d}$ прямує до нескінченності – випадок однієї ізольованої тріщини [10].

ЛІТЕРАТУРА

1. Бережницкий Л. Т., Делявский М. В., Панасюк В. В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. Киев: Наук. думка, 1979. 400 с.
2. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит. Минск: Изд-во БГУ, 1975. 256 с.
3. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 324 с.
4. Alwar R. S., Ramachandran Nambissan K. N. Influence of crack closure on the stress intensity factor for plates subjected to bending – A 3-D finite element analysis. *Eng. Fracture Mech.* 1983. 17, No. 4. P. 323–333.
5. Heming F. S. Jr. Sixth order analysis of crack closure in bending of an elastic plate. *Int. J. Fracture*. 1980. 16, No. 4. P. 289–304.
6. Jones D. P., Swedlow J. L. The influence of crack closure and elasto-plastic flow on the bending of a cracked plate. *Int. J. Fracture*. 1975. 11, No. 6. P. 897–914.
7. Williams M. L. The bending stress distribution at the base of a stationary crack. *Trans ASME. J. Appl. Mech.* 1961. 28. P. 78–82.
8. Опанасович В. К. Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь. *Наукові нотатки Луцького технічного університету*. 2007. Вип. 20 (2). С. 123–127.
9. Опанасович В. К., Новосад В. П., Селіверстов Р. Г. Врахування контакту берегів тріщини під час згину трансверсально-ізотропної пластини. *Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій: Зб. наук. праць*. Вип. 5. Львів: Каменяр, 2002. С. 148–153.
10. Опанасович В., Яцик І. Згин пластини Рейсснера з наскрізною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів. *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат*. 2008. Вип. 69. С. 125–135.
11. Шацький І. П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами. *Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз.-мат. та техн. науки*. 1988. № 7. С. 49–51.

12. Шацький І. П., Перепічка В. В. Згин напівнескінченної пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 1992. 28, № 2. С. 54–58.

13. Шацький І., Перепічка В., Даляк Т., Щербій А. Мат. проблеми механіки неоднорідних структур. Т. 2. Задачі теорії пластин та оболонок із взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізах. Львів, 2000. С. 51–54.

14. Dempsey J. P., Shektman I. I., Slepyan L. L. Closure of a through crack in a plate under bending. *International Journal or Solids and Structures*. 1998. Vol. 35. P. 4077–4089.

15. Опанасович В., Яцик І. Згин пластини Рейсснера з двома співвісними наскрізними тріщинами різної довжини з урахуванням ширини області контакту їхніх берегів. *Машинознавство*. 2009. Вип. 4 (142). С. 18–25.

16. Сулим Г. Т., Опанасович В. К., Яцик І. М. Згин пластини Рейсснера з двома не співвісними однаковими наскрізними тріщинами з урахуванням ширини області контакту їхніх берегів. *Вісник ТНТУ. Механіка та матеріалознавство*. 2015. Т. 80, № 4. С. 7–19.

17. Тимошенко С. П., Войновски-Кригер С. Пластины и оболочки. Москва: Наука, 1966. 636 с.

18. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва: Наука, 1966. 708 с.

19. Мазурак Л. П., Бережницкий Л. Т. Изгиб трансверсально-изотропных пластин с дефектами типа трещин. Киев: Наук. думка, 1990. 256 с.

20. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распространение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 444 с.

REFERENCES

1. Beregnitskiy, L. T., Delyavskiy, M. V. & Panasyuk, V. V. (1979). Bending of thin plates with defects type of cracks. Kiev: Naukova Dumka.

2. Prusov, I. A. (1975). The method of conjugation in the theory of plates. Minsk: Izdatelstvo Beloruskogo universiteta.

3. Savruk, M. P. (1981). Two-dimensional problems of elasticity for bodies with cracks. Kiev: Naukova Dumka.

4. Alwar, R. S. & Ramachandran Nambissan, K. N. (1983). Influence of crack closure on the stress intensity factor for plates subjected to bending – A 3-D finite element analysis. Eng. Fracture Mech., 17, No. 4, pp. 323-333.

5. Heming, F. S. Jr. (1980). Sixth order analysis of crack closure in bending of an elastic plate. Int. J. Fracture, 16, No. 4, pp. 289-304.

6. Jones, D. P. & Swedlow, J. L. (1975). The influence of crack closure and elasto-plastic flow on the bending of a cracked plate. Int. J. Fracture, 11, No. 6, pp. 897-914.

7. Williams, M. L. (1961). The bending stress distribution at the base of a stationary crack. Trans ASME. J. Appl. Mech., 28, pp. 78-82.

8. Opanasovych, V. K. (2007). Bending the plate with a through crack linear considering width of its contact surfaces. Naukovi notatki Lutskogo tehnichnogo universitetu, Vol. 20(2), pp. 123-127.

9. Opanasovych, V. K., Novosad, V. P. & Seliverstov, R. H. (2002). Consideration contact crack by bending transversely-isotropic plate. Mehanika ta fizyka ruynuvannya budivelnyh materiaiv ta konstruktsiy: Coll. Science. works, Vol. 5. Lviv: Kamenyar, pp. 148-153.

10. Opanasovych, V. & Yatsyk, I. (2008). Bending of the Reissner's plate with through-the-thickness crack taking into account contact region width of its faces. Visnyk L'vivskogo Universitetu. Seria Mehaniko-Matematichna, Vol. 69, pp. 125-135.

11. Shats'kyy, I. P. (1988). Plate bending attenuated by slit with contacting faces. Dopovidi AN URSR. Seria A. Fiziko-matematichni ta tehnichni nauki, No. 7, pp. 49-51.

12. Shats'kyy, I. P. & Perepichka, V. V. (1992). Semi-infinite plate bending attenuated by slit with contacting faces. Fiz.-him. mekhanika materialiv, 28, No. 2, pp. 54-58.

13. Shats'kyy, I., Perepichka, V., Dalyak, T. & Shcherbiy, A. (2000). Mat. problemy mekhaniky neodnoridnykh struktur. (vol. 2). Problems of plates and shells theory with interconnected boundary conditions on slits. L'viv, pp. 51-54.

14. Dempsey, J. P., Shektman, I. I. & Slepyan, L. L. (1998). Closure of a through crack in a plate under bending. International Journal or Solids and Structures, Vol. 35, pp. 4077-4089.

15. Opanasovych, V. & Yatsyk, I. (2009). Reissner's plate bending with two collinear through-the-thickness cracks of different length taking into account contact region width of their faces**.** Mashynoznavstvo, Iss. 4(142), pp. 18-25.

16. Sulym, H. T., Opanasovych, V. K. & Yatsyk, I. M. (2015). Reissner's plate bending containing two not coaxial identical through-the-thickness cracks taking into account contact zone width of their faces. Visnyk TNTU, Vol. 80, No. 4, pp. 7-19.

17. Timoshenko, S. P. & Voynovsky-Krieger, S. (1966). Plates and shells. Moscow: Nauka.

18. Mushelishvili, N. I. (1966). Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Moscow: Nauka.

19. Mazurak, L. P. & Berezhnitskiy, L. T. (1990). Bending of transversally isotropic plates with defects of cracks type. Kiev: Naukova Dumka.

20. Panasyuk, V. V., Savruk, M. P. & Datsyshyn, A. P. (1976). Distribution of stresses around cracks in plates and shells. Kiev: Naukova Dumka.

УДК 517.9

ЗАДАЧА ОПТИМІЗАЦІЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛЯПУНОВА В ПРОСТОРІ ГІЛЬБЕРТА

Панасенко Є. В., к. ф.-м. н., доцент

Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна

panasenko.yevgeniy@gmail.com

У статті розглянуто двоточкову крайову задачу в критичному випадку для матричних диференціальних рівнянь типу Ляпунова. Досліджено задачу в припущенні, що оператор, який описує однорідну лінійну крайову задачу, є нетеровим. Запропоновано підхід до знаходження серед розв'язків крайової задачі того розв'язку, який мінімізує деякий функціонал.

Ключові слова: крайова задача, еволюційний оператор, псевдообернена матриця, функціонал.

ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЛЯПУНОВА В ПРОСТРАНСТВЕ ГИЛЬБЕРТА

Панасенко Е. В., к. ф.-м. н., доцент

Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина

panasenko.yevgeniy@gmail.com

В статье рассмотрена двухточечная краевая задача в критическом случае для матричных дифференциальных уравнений типа Ляпунова. Исследована задача в предположении, что оператор, который описывает линейную краевую задачу, является нетеровым. Предложен подход к нахождению среди решений краевой задачи того решения, которое минимизирует некоторый функционал.

Ключевые слова: краевая задача, эволюционный оператор, псевдообратная матрица, функционал.